FM210 - Meccanica Analitica

Anno Accademico 2024/2025

Secondo appello (08-07-2025)

<u>Esercizio 1.</u> [6+2] Si consideri il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa $m = 1$ sottoposto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = \left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right) \log|x|.$$

1. Si studi il grafico dell'energia potenziale $V(x)$.
2. Si determinino i punti di equilibrio del sistema dinamico associato e se ne discuta la stabilità.
3. Si discuta qualitativamente il moto del sistema nel piano delle fasi $(x, \dot{x})$.
4. Si dimostri che tutte le traiettorie sono limitate.
5. Si discuta per quali valori di energia E esistono traiettorie periodiche e si verifichi in particolare che esistono due traiettorie periodiche con energia $E = E_0 = (15/4)\log 2$.
6. [Si scriva il periodo di una delle due soluzioni con energia E_0 come integrale definito.]

<u>Esercizio 2.</u> [6+2] Sia $k = Oxyz$ un sistema di riferimento fisso. Un carrello si muove nel piano verticale xy lungo la guida γ descritta dall'equazione $y = f(x) = x(x^2 - 6x + 11)$ in modo tale che la sua posizione all'istante $t = 0$ coincide con l'origine O e la sua velocità di avanzamento nelle direzione x è uguale a $v_0 = 1$. Sia $K = O'\xi\eta\zeta$ un sistema di riferimento mobile solidale con il carrello la cui origine coincide con la posizione del carrello e i cui assi ξ, η e ζ sono il primo tangente alla guida γ, il secondo ortogonale alla guida, rivolto verso l'alto rispetto alla guida stessa, e il terzo parallelo all'asse z. Un punto materiale P si muove lungo ξ con legge oraria $\xi(t) = vt$, dove v è una costante.

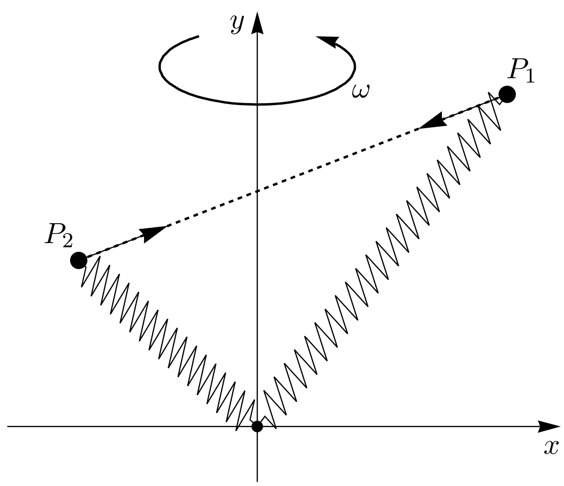
1. Si descriva il moto di P nel sistema di riferimento fisso k come composizione di una rotazione B e di una traslazione C.
2. Si determino la velocità assoluta, la velocità relativa e le componenti rotatoria e traslatoria della velocità di trascinamento di P.
3. Si determinino la forza di Coriolis e la forza centrifuga che agiscono sul carrello.
4. [Si dimostri che se v è sufficientemente grande il punto P attraversa l'asse x e si discuta in tal caso quante volte lo attraversa.]

<u>Esercizio 3.</u> [6+3] Un sistema meccanico è costituito da 2 punti materiali P_1 e P_2, entrambi di massa m, e da un'asta omogenea, di massa M e lunghezza $\ell = 1$, che si muovono nel piano verticale xy nel modo seguente: l'estremo A dell'asta è fissato nell'origine O; i punti P_1 e P_2 scorrono lungo le rette orizzontali di equazione $y = 1$ e $y = -1$, rispettivamente; quattro molle, tutte di lunghezza a riposo trascurabile e di costante elastica k, collegano, rispettivamente, P_1 con O, P_1 con B, P_2 con O e P_2 con B, dove B è l'estremo dell'asta opposto ad A; sul sistema agisce la forza di gravità, diretta nel verso discendente dell'asse y (sia g l'accelerazione di gravità).

1. Si scrivano la lagrangiana del sistema.
2. Si scrivano le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.
3. Si individuino le configurazioni di equilibrio e se ne discuta la stabilità.
4. [Si calcoli la forza vincolare che agisce sul punto P_1.]

Esercizio 4. [6+2] Un sistema meccanico è costituito da due punti materiali P_1 e P_2 che si muovono nel piano verticale xy nel modo seguente: sui due punti agisce una forza attrattiva diretta lungo retta la congiungente i due punti, la cui intensità è data da α/d^2, dove $\alpha > 0$ e d è la distanza tra i due punti; sui due punti agisce la forza di gravità (sia g l'accelerazione di gravità); ciascun punto è collegato all'origine da una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla; il piano ruota intorno all'asse y con velocità angolare costante ω.

1. Si scrivano la lagrangiana del sistema e le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.
2. Si determinino le configurazioni di equilibrio.
3. [Si discuta la stabilità delle configurazioni di equilibrio.]



Esercizio 5. [6+3] Si consideri la trasformazione di coordinate

$$\begin{cases} Q = \dfrac{(1+q^2)p}{1+2q^2}, \\ P = \dfrac{(1+q^2)^2p^2}{(1+2q^2)^2} - 2q + \arctan q. \end{cases}$$

1. Si determini il dominio $\mathcal{D}$ della trasformazione.
2. Si dimostri che la trasformazione è canonica trovandone una funzione generatrice di prima specie $F(q,Q)$.
3. Si consideri il sistema descritto dalla lagrangiana

$$\mathcal{L}(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}\frac{(1+2q^2)^2}{(1+q^2)^2}\dot{q}^2 + q - \frac{1}{2}\arctan q$$

   e si scriva l'hamiltoniana $H(q,p)$ associata alla lagrangiana $\mathcal{L}(q,\dot{q})$.
4. Si esprima l'hamiltoniana in termini delle coordinate (Q,P) e si risolvano le equazioni di Hamilton corrispondenti.
5. [Si dimostri la soluzione $q(t)$ con condizioni iniziali $(q(0),\dot{q}(0)) = (0,1)$ è illimitata e se ne discuta l'andamento asintotico per t grande.]
6. [Si verifichi esplicitamente che la trasformazione di coordinate conserva le parentesi di Poisson fondamentali].