FM210 - Meccanica Analitica

Anno Accademico 2024/2025

Terzo appello (02-09-2025)

<u>Esercizio 1.</u> [6+2] Si consideri il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa $m = 1$ sottoposto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = \frac{x^4 - x^2 + 1}{x^2 + 1}.$$

1. Si studi il grafico dell'energia potenziale $V(x)$.
2. Si determinino i punti di equilibrio del sistema dinamico associato e se ne discuta la stabilità.
3. Si discuta qualitativamente il moto del sistema nel piano delle fasi $(x, \dot{x})$.
4. Si dimostri che tutte le traiettorie sono limitate.
5. Si dimostri che esistono traiettorie periodiche per valori arbitrariamente grandi dell'energia.
6. [Si discuta l'andamento del periodo delle traiettorie periodiche in funzione dell'energia E nel limite $E \to +\infty$.]

<u>Esercizio 2.</u> [6+2] Un sistema di riferimento mobile $K = O'\xi\eta\zeta$ si muove rispetto a un sistema di riferimento fisso $k = Oxyz$ nel modo seguente. L'origine O' scorre lungo la spirale di equazione

$$x = \alpha \cos \alpha, \quad y = \alpha \sin \alpha, \quad z = 0, \qquad \alpha \geq 0,$$

in modo tale che sia $\alpha = \alpha(t) = t$, mentre il piano $\xi\eta$ ruota con velocità angolare costante $\omega = 1$ intorno all'asse ζ. Un punto materiale P si muove nel sistema di riferimento K con legge oraria

$$\xi(t) = t \cos t, \quad \eta(t) = t \sin t, \quad \zeta(t) = 0.$$

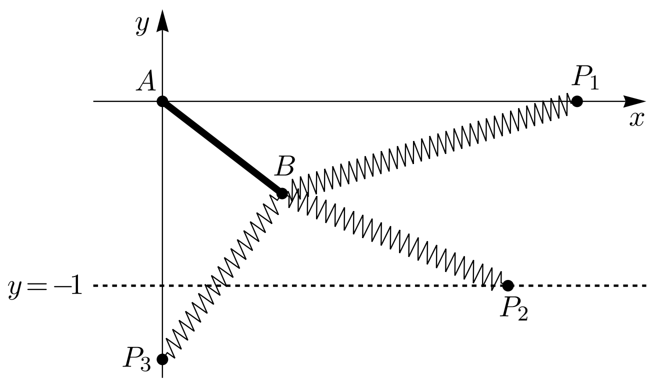
1. Si descriva il moto di P nel sistema di riferimento fisso k come composizione di una rotazione B e di una traslazione C.
2. Si determino la velocità assoluta, la velocità relativa e le componenti rotatoria e traslatoria della velocità di trascinamento di P.
3. Si determinino la forza di Coriolis e la forza centrifuga che agiscono sul punto P.
4. [Si dimostri che P attraversa infinite volte l'asse x e si calcoli in quali punti questo avviene.]

<u>Esercizio 3.</u> [6+3] Un sistema meccanico è costituito da due punti materiali P_1 e P_2, entrambi di massa m, che si muovono nel piano verticale xy nel modo seguente: il punto P_1 scorre lungo la guida di equazione $y = e^x$; il punto P_2 scorre lungo la guida di equazione $y = e^{-x}$; i due punti sono collegati tra loro da una molla di lunghezza a riposo trascurabile e di costante elastica k; sui due punti agisce la forza di gravità, diretta nel verso discendente dell'asse y (si indichi con g l'accelerazione di gravità).

1. Si scrivano la lagrangiana del sistema.
2. Si scrivano le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.
3. Si dimostri che esiste una sola configurazione di equilibrio e se ne discuta la stabilità.
4. [Si calcoli la forza vincolare che agisce sul punto P_1.]

ESERCIZIO 4. [6+2] Un sistema meccanico è costituito da un'asta omogenea, di massa M e lunghezza $\ell = 1$, e da tre punti materiali P_1, P_2 e P_3, tutti di massa m, che si muovono nel piano verticale xy nel modo seguente (cfr. la figura): l'asta ha un un estremo A fisso nell'origine O, il punto P_1 scorre lungo l'asse x, il punto P_2 può scorrere lungo la retta $y = -1$, il punto P_3 scorre lungo l'asse y; tre molle, tutte di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla, connettono l'estremo libero B dell'asta ai punti P_1, P_2 e P_3; sul sistema agisce infine la forza di gravità (si indichi con g l'accelerazione di gravità).

1. Si scrivano la lagrangiana del sistema e le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.
2. Si determinino le configurazioni di equilibrio.
3. Si discuta la stabilità delle configurazioni di equilibrio
4. [Si discuta come cambiano le configurazioni di equilibrio se il piano ruota intorno all'asse y con velocità angolare costante ω.]



ESERCIZIO 5. [6+3] Si consideri la trasformazione di coordinate

$$\begin{cases} Q = e^q\,(2qp + 2p\log p + p) - e^{-q}, \\ P = e^q p. \end{cases}$$

1. Si determini il dominio $\mathcal{D}$ della trasformazione.
2. Si dimostri che la trasformazione è canonica trovandone una funzione generatrice di seconda specie $F(q, P)$.
3. Si consideri il sistema descritto dalla lagrangiana
$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(q, \dot q) = \frac{1}{2e^{2q}}\dot q^2.$$
e si scriva l'hamiltoniana $H(q, p)$ associata alla lagrangiana $\mathcal{L}(q, \dot q)$.
4. Si esprima l'hamiltoniana in termini delle coordinate (Q, P) e si risolvano le equazioni di Hamilton corrispondenti.
5. [Si calcoli la soluzione delle equazioni di Eulero-Lagrange corrispondenti alla lagrangiana $\mathcal{L}$ con condizioni iniziali $(q(0), \dot q(0)) = (0, 1)$ e si verifichi che diverge in un tempo finito.]
6. [Si verifichi esplicitamente che la trasformazione di coordinate conserva le parentesi di Poisson fondamentali].