

FM210 - Meccanica Analitica

Anno Accademico 2024/2025

Quarto appello - Soluzioni (19-01-2026)

ESERCIZIO 1. La funzione

$$V(x) = \log(4 + x^4) - \log|1 + \alpha x^2| = \log(4 + x^4) - \log(1 + \alpha x^2), \quad \alpha > 0,$$

è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$. Inoltre $V(x)$ è pari in x , quindi è sufficiente studiarla in $[0, +\infty)$. Tenendo conto che

$$V(x) = \log(4 + x^4) - \log(1 + \alpha x^2) = \log \frac{4 + x^4}{1 + \alpha x^2} = \log \frac{x^4 (1 + 4x^{-4})}{x^2 (\alpha + x^{-2})} = \log \frac{x^2 (1 + 4x^{-4})}{\alpha + x^{-2}},$$

si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} V(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \log x^2 = +\infty.$$

La derivata di $V(x)$ è

$$V'(x) = \frac{4x^3}{4 + x^4} - \frac{2\alpha x}{1 + \alpha x^2} = \frac{4x^3(1 + \alpha x^2) - 2\alpha x(4 + x^4)}{(4 + x^4)(1 + \alpha x^2)} = \frac{2\alpha x^5 + 4x^3 - 8\alpha x}{(4 + x^4)(1 + \alpha x^2)},$$

da cui segue che $V'(x) = 0$ se e solo se

$$2\alpha x^5 + 4x^3 - 8\alpha x = 2x(\alpha x^4 + 2x^2 - 4\alpha) = 0.$$

Dal momento che si ha $\alpha x^4 + 2x^2 - 4\alpha = 0$ se e solo se

$$x^2 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\alpha^2}}{\alpha} \quad \text{oppure} \quad x^2 = \frac{-1 - \sqrt{1 + 4\alpha^2}}{\alpha},$$

dove la seconda radice va scartata in quanto x^2 non può essere negativo, ne concludiamo che i punti critici di $V(x)$ sono

$$x = 0, \quad x = -x_0, \quad x = x_0, \quad \text{dove} \quad x_0 = \sqrt{\frac{\sqrt{1 + 4\alpha^2} - 1}{\alpha}}.$$

Osservando che si ha $\alpha x^4 + 2x^2 - 4\alpha > 0$ se $x > x_0$ oppure $x < -x_0$, mentre si ha $\alpha x^4 + 2x^2 - 4\alpha < 0$ se $-x_0 < x < x_0$, concludiamo che

1. $V'(x) > 0$ se $x > 0$ e $x > x_0$ ($\implies x > x_0$) oppure $x < 0$ e $-x_0 < x < x_0$ ($\implies -x_0 < x < 0$),
2. $V'(x) < 0$ se $x < 0$ e $x < -x_0$ ($\implies x < -x_0$) oppure $x > 0$ e $-x_0 < x < x_0$ ($\implies 0 < x < x_0$),

così che $V(x)$ è crescente in $(-x_0, 0) \cup (x_0, +\infty)$ e decrescente in $(-x_0, 0) \cup (0, x_0)$: ne segue che $x = 0$ è un punto di massimo relativo, mentre $\pm x_0$ sono punti di minimo relativo (e quindi di minimo assoluto, tenendo conto dell'andamento per $x \rightarrow \pm\infty$).

Calcolando la derivata seconda, si trova

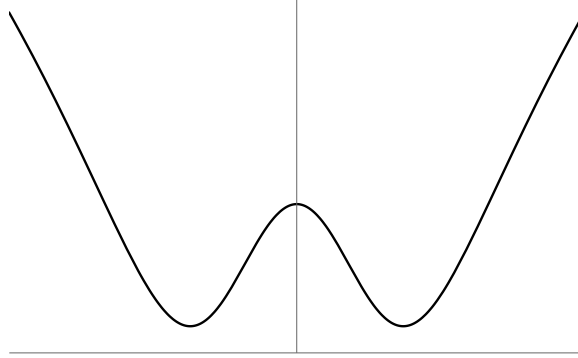
$$V''(x) = \frac{4x^2(12 - x^4)}{(4 + x^4)^2} - \frac{2\alpha(1 - \alpha x^2)}{(1 + \alpha x^2)^2} = \frac{4x^2(12 - x^4)(1 + \alpha x^2)^2 - 2\alpha(1 - \alpha x^2)(4 + x^4)^2}{(4 + x^4)^2(1 + \alpha x^2)^2}$$

$$= -\frac{32\alpha - (48 + 32\alpha^2)x^2 - 80\alpha x^4 + (4 - 64\alpha^2)x^6 + 10\alpha x^8 + 2\alpha^2 x^{10}}{(4 + x^4)^2(1 + \alpha x^2)^2},$$

e dal fatto che ci sono due cambi di segno si deduce che i punti di flesso per $x > 0$ sono 0 o 2. D'altra parte, poiché $V(x)$ ha un massimo in $x = 0$, ha un minimo in $x = x_0$ e diverge logarithmicamente per $x \rightarrow +\infty$, e quindi è concava intorno a $x = 0$, convessa intorno a $x = x_0$ e di nuovo concava per x sufficientemente grande, la sua derivata seconda cambia segno almeno due volte per $x > 0$. Ne segue che i punti di flesso sono due per $x > 0$ (e quindi quattro in $\mathbb{R}$, per parità). In particolare i punti di flesso non possono coincidere con i punti critici, così che si deve avere $V''(\pm x_0) \neq 0$ e $V''(0) \neq 0$. Due punti di flesso sono compresi tra $-x_0$ e 0 e tra 0 e x_0 , mentre gli altri due sono uno maggiore di x_0 e l'altro minore di $-x_0$. Per $x = 0$ si può anche verificare per calcolo esplicito che

$$V''(0) = -\frac{32\alpha}{16} = -2\alpha < 0. \quad (*)$$

Il grafico di $V(x)$, per $\alpha > 0$, è rappresentato nella figura seguente.



Per studiare le curve di livello

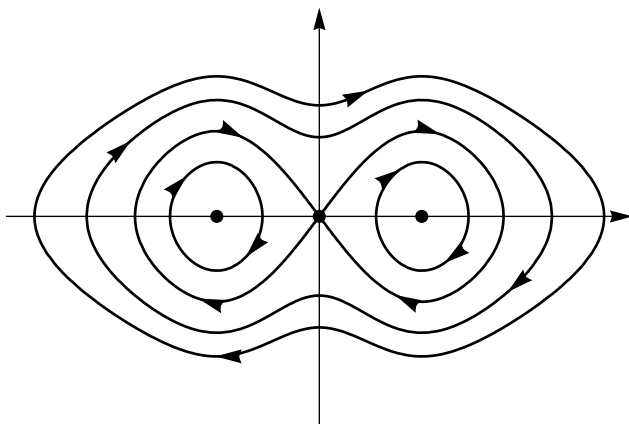
$$\Gamma_E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2}y^2 + V(x) \right\},$$

si vede dal grafico dell'energia potenziale che

1. Γ_E è definita se e solo se $E \geq E_0 = \min\{V(x) : x \in \mathbb{R}\} = V(x_0)$;
2. Γ_{E_0} consiste nei soli punti di equilibrio $P_1 = (x_0, 0)$ e $P_2 = (-x_0, 0)$, che sono stabili per il teorema di Lagrange-Dirichlet, essendo $\pm x_0$ punti di minimo isolati per l'energia potenziale $V(x)$;
3. per ogni valore $E \in (E_0, E_1)$, dove $E_1 = V(0)$, la curva di livello Γ_E è formata da due componenti connesse γ_E^+ e γ_E^- , ciascuna delle quali consiste in un'orbita chiusa, la prima nel semipiano $x > 0$ e la seconda nel semipiano $x < 0$, che è il supporto di una traiettoria periodica;

4. Γ_{E_1} contiene, oltre al punto di equilibrio $P_0 = (0, 0)$ due orbite omocline, asintotiche al punto P_0 per $t \rightarrow \pm\infty$;
5. per ogni valore $E > E_1$, la curva di livello Γ_E consiste in un'unica orbita chiusa che è percorsa da una traiettoria periodica.

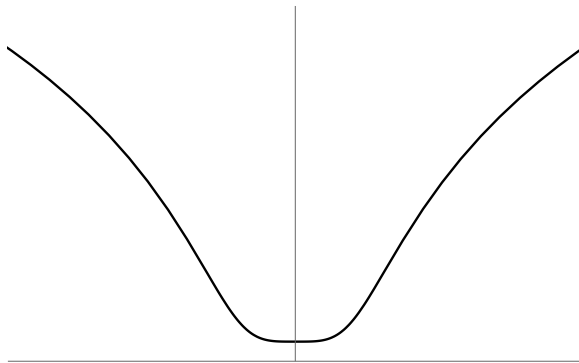
Alcune orbite del sistema – inclusi i punti di equilibrio – sono rappresentate nella figura seguente. Per determinare di verso di percorrenza delle orbite si tiene conto che $\dot{x} = y$, così che $x = x(t)$ è crescente per $y > 0$ e decrescente per $y < 0$: il moto avviene da sinistra a destra nel semipiano $y > 0$ e da destra a sinistra nel semipiano $y < 0$. Si è inoltre tenuto conto che $V''(0) \neq 0$ (cfr. la formula (*)), così che la curva di livello Γ_{E_1} attraversa P_0 con tangente obliqua.



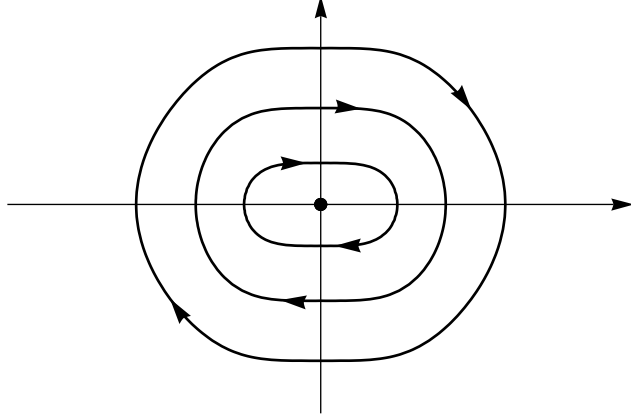
[Per $\alpha = 0$ si ha

$$V(x) = \log(4 + x^4), \quad V'(x) = \frac{4x^3}{1 + x^4}.$$

La funzione $V(x)$ è definita in $\mathbb{R}$, ha un minimo isolato in $x = 0$, è crescente per $x > 0$ e decrescente per $x < 0$, e tende a $+\infty$ logaritmicamente per $x \rightarrow \pm\infty$. Il grafico di $V(x)$ è data dalla figura seguente.



Per quanto riguarda le orbite, si ha la situazione descritta nella figura seguente. In particolare si vede che tutte le orbite sono chiuse e sono percorse da traiettorie periodiche.



Infine, se $\alpha < 0$, il dominio di $V(x)$ è dato da $\mathbb{R} \setminus \{\pm x_1\}$, dove

$$x_1 = \sqrt{-1/\alpha}.$$

Si hanno quindi due asintoti verticali in $x = -x_1$ e $x = x_1$, tali che

$$\lim_{x \rightarrow x_1^\pm} V(x) = \lim_{x \rightarrow -x_1^\pm} V(x) = +\infty.$$

La derivata prima ha stessa espressione del caso $\alpha > 0$, ovvero

$$V'(x) = \frac{2\alpha x^5 + 4x^3 - 8\alpha x}{(4 + x^4)(1 + \alpha x^2)} = \frac{2x(\alpha x^4 + 2x^2 - 4\alpha)}{(4 + x^4)(1 + \alpha x^2)},$$

e si discute ragionando come nel caso $\alpha > 0$, con la differenza che ora $1 + \alpha x^2$ non ha segno definito: si ha $1 + \alpha x^2 > 0$ per $|x| < x_1$. Tenendo conto che, per $\alpha < 0$, si ha $\alpha x^4 + 2x^2 - 4\alpha = 0$ se e solo se

$$x^2 = x_2^2 = \frac{\sqrt{1 + 4\alpha^2} + 1}{-\alpha},$$

e che quindi risulta $\alpha x^4 + 2x^2 - 4\alpha = 0$ se e solo se $x = \pm x_2$, mentre si ha $\alpha x^4 + 2x^2 - 4\alpha > 0$ se e solo se $-x_2 < x < x_2$, con

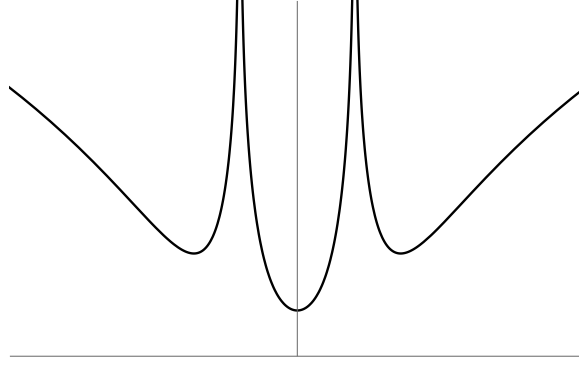
$$x_2 = \sqrt{\frac{\sqrt{1 + 4\alpha^2} + 1}{-\alpha}},$$

si vede che $V'(x) > 0$ se

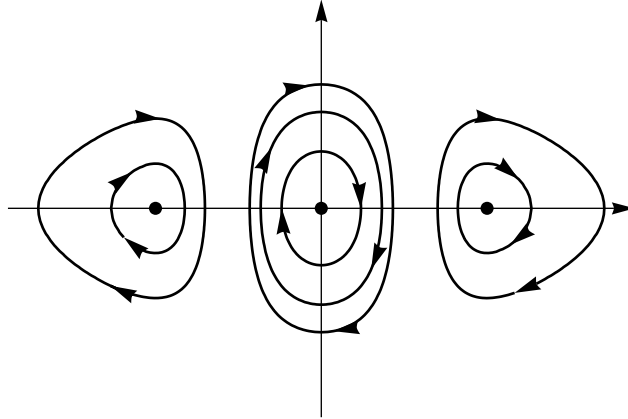
1. $x > 0$, $|x| < x_1$, $|x| < x_2 \implies 0 < x < x_1$,
2. $x > 0$, $|x| > x_1$, $|x| > x_2 \implies x > x_2$,
3. $x < 0$, $|x| < x_1$, $|x| > x_2 \implies$ impossibile,
4. $x < 0$, $|x| > x_1$, $|x| < x_2 \implies -x_2 < x < -x_1$.

Oppure, più semplicemente, notando che si ha $x_2 > x_1$ e che $V(x)$ diverge sia per $x \rightarrow +\infty$ sia per $x \rightarrow x_1^+$, si vede immediatamente che il punto critico x_2 è a destra dell'asintoto verticale ed è pertanto un punto di minimo. Inoltre, per parità, anche $-x_2$ è un punto di minimo. Che anche

$x = 0$ sia un punto di minimo per $\alpha < 0$ si deduce immediatamente o dal fatto che $V''(0) > 0$ per $\alpha < 0$ (cfr. la formula (*)) o, equivalentemente, dal fatto che $x = 0$ è l'unico punto critico nell'intervallo $(-x_1, x_1)$ e $V(x) \rightarrow +\infty$ per $x \rightarrow \pm x_1$. Il grafico di $V(x)$ è quindi dato dalla figura seguente.



Le orbite si discutono in modo analogo a quanto visto nel caso $\alpha > 0$. Per $\alpha < 0$ si trova la situazione illustrata nella figura seguente. Tutte le orbite sono chiuse e limitate: tutti i moti che non siano i punti di equilibrio sono periodici.



In conclusione, per $\alpha \leq 0$, oltre alle configurazioni di equilibrio (tutte stabili, perché corrispondenti a punti di minimo isolati per l'energia potenziale, si hanno orbite chiuse, percorse quindi da orbite periodiche. Non ci sono quindi traiettorie asintotiche per $\alpha \leq 0$.]

ESERCIZIO 2. Se $\mathbf{q}$ e $\mathbf{Q}$ sono le coordinate di un punto nel sistema di riferimento fisso k e nel sistema di riferimento mobile K , rispettivamente, si ha

$$\mathbf{q} = B\mathbf{Q} + \mathbf{r},$$

dove

$$B = \begin{pmatrix} \cos \theta(t) & -\sin \theta(t) & 0 \\ \sin \theta(t) & \cos \theta(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \theta(t) = \frac{\pi}{4} \sin t,$$

6

e

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} \sin \theta(t) \\ -\cos \theta(t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

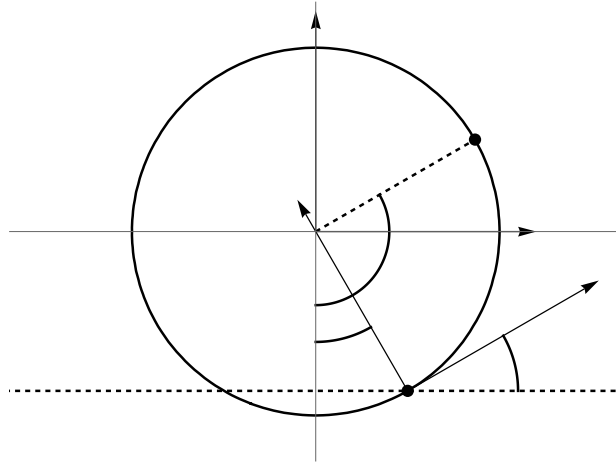
Scrivendo $\mathbf{q} = (x, y, z)$ e $\mathbf{Q} = (\xi, \eta, \zeta)$, dove $x = x(t) = \sin \omega t$, $y = y(t) = -\cos \omega t$ e $z = z(t) = 0$, si trova

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = B^T(\mathbf{q} - \mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \cos \theta(t) & \sin \theta(t) & 0 \\ -\sin \theta(t) & \cos \theta(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin \omega t - \sin \theta(t) \\ -\cos \omega t + \cos \theta(t) \\ 0 \end{pmatrix},$$

da cui ricava

$$\begin{aligned} \xi &= \cos \theta(t) \sin \omega t - \cos \theta(t) \sin \theta(t) - \sin \theta(t) \cos \omega t + \sin \theta(t) \cos \theta(t) \\ &= \cos \theta(t) \sin \omega t - \sin \theta(t) \cos \omega t \\ &= -\sin(\theta(t) - \omega t), \\ \eta &= -\sin \theta(t) \sin \omega t + \sin^2 \theta(t) - \cos \theta(t) \cos \omega t + \cos^2 \theta(t) \\ &= 1 - \cos \theta(t) \cos \omega t - \sin \theta(t) \sin \omega t \\ &= 1 - \cos(\theta(t) - \omega t). \\ \zeta &= 0, \end{aligned}$$

Si veda la figura seguente.



Possiamo scrivere

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(\theta(t) - \omega t) \\ 1 - \cos(\theta(t) - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \implies \dot{\mathbf{Q}} = \begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \\ \dot{\zeta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos(\theta(t) - \omega t) (\dot{\theta}(t) - \omega) \\ \sin(\theta(t) - \omega t) (\dot{\theta}(t) - \omega) \\ 0 \end{pmatrix},$$

dove

$$\dot{\theta}(t) = \frac{\pi}{4} \cos t.$$

La velocità assoluta è data da

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega \cos \omega t \\ \omega \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La velocità relativa è

$$\begin{aligned} \mathbf{v}' = B\dot{\mathbf{Q}} &= \begin{pmatrix} \cos \theta(t) & -\sin \theta(t) & 0 \\ \sin \theta(t) & \cos \theta(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\cos(\theta(t) - \omega t)(\dot{\theta}(t) - \omega) \\ \sin(\theta(t) - \omega t)(\dot{\theta}(t) - \omega) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -(\cos \theta(t) \cos(\theta(t) - \omega t) + \sin \theta(t) \sin(\theta(t) - \omega t))(\dot{\theta}(t) - \omega) \\ -(\sin \theta(t) \cos(\theta(t) - \omega t) - \cos \theta(t) \sin(\theta(t) - \omega t))(\dot{\theta}(t) - \omega) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\cos \omega t (\dot{\theta}(t) - \omega) \\ -\sin \omega t (\dot{\theta}(t) - \omega) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos \omega t \dot{\theta}(t) \\ -\sin \omega t \dot{\theta}(t) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega \cos \omega t \\ \omega \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

dove si è tenuto conto che

$$\begin{aligned} \cos \theta(t) \cos(\theta(t) - \omega t) + \sin \theta(t) \sin(\theta(t) - \omega t) &= \cos(\theta(t) - (\theta(t) - \omega t)), \\ \sin \theta(t) \cos(\theta(t) - \omega t) - \cos \theta(t) \sin(\theta(t) - \omega t) &= \sin(\theta(t) - (\theta(t) - \omega t)). \end{aligned}$$

La componente traslatoria della velocità di trascinamento è

$$\mathbf{v}_0 = \dot{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} \cos \theta(t) \dot{\theta}(t) \\ \sin \theta(t) \dot{\theta}(t) \\ 0 \end{pmatrix},$$

mentre la componente rotatoria della velocità di trascinamento $\mathbf{v}_T = \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{q} - \mathbf{r})$ è

$$\mathbf{v}_T = \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 0 & 0 & \dot{\theta}(t) \\ \sin \omega t - \sin \theta(t) & -\cos \omega t + \cos \theta(t) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\theta}(t)(\cos \omega t - \cos \theta(t)) \\ \dot{\theta}(t)(\sin \omega t - \sin \theta(t)) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Si verifica immediatamente che $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_T$ (in pratica, $\mathbf{v}_T$ si può calcolare, una volta ottenute $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}'$ e $\mathbf{v}_0$, come $\mathbf{v}_T = \mathbf{v} - \mathbf{v}' - \mathbf{v}_0$).

La distanza $d(t)$ di P dall'origine del sistema di riferimento mobile è tale che

$$d^2(t) = \xi^2 + \eta^2 = (\sin(\theta(t) - \omega t))^2 + (1 - \cos(\theta(t) - \omega t))^2 = 2(1 - \cos(\theta(t) - \omega t)),$$

dove

$$0 \leq 1 - \cos(\theta(t) - \omega t) \leq 2,$$

quindi il valore massimo di $d(t)$ al variare di t è dato da $d(t) = 2$ ed è raggiunto per t tale che $\theta(t) - \omega t = \pi, 3\pi, 5\pi, \dots$

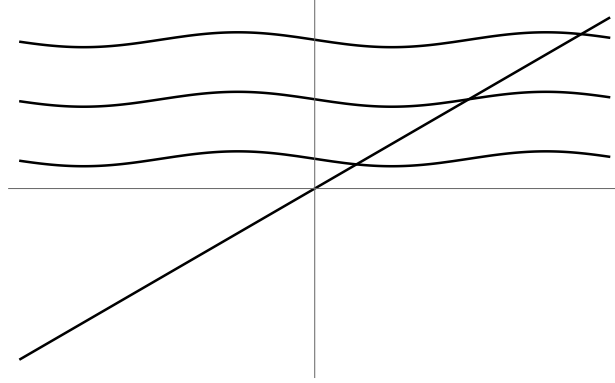
[Dalla discussione precedente segue che si ha $d(t) = 2$ per $t \in \mathbb{R}_+$ se e solo se

$$\theta(t) - \omega t = \frac{\pi}{4} \sin t - \omega t = (2k + 1)\pi, \quad k \in \mathbb{N},$$

ovvero se t è tale che la retta $y = \omega t$ interseca una delle curve

$$(2k + 1)\pi - \frac{\pi}{4} \sin t, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Quindi il primo istante $t_0 > 0$ in cui si $d_0(t_0) = 2$ è il tempo t_0 tale che $\pi - (\pi/4) \sin t_0 = \omega t_0$. Disegnando la retta e le prime curve si ottiene la figura seguente.



Si vede quindi graficamente che, per $\omega > 0$, tale t_0 esiste ed è univocamente determinato.]

[La forza di Coriolis che agisce sul punto P è data da

$$\begin{aligned} -2m\boldsymbol{\Omega} \wedge \dot{\mathbf{Q}} &= -2m(\dot{\theta}(t) - \omega) \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 0 & 0 & \dot{\theta}(t) \\ -\cos(\theta(t) - \omega t) & \sin(\theta(t) - \omega t) & 0 \end{pmatrix} \\ &= 2m(\dot{\theta}(t) - \omega) \begin{pmatrix} \dot{\theta}(t) \sin(\theta(t) - \omega t) \\ -\dot{\theta}(t) \cos(\theta(t) - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

mentre

$$\begin{aligned} -m\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{Q} &= -m\dot{\theta}(t) \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 0 & 0 & \dot{\theta}(t) \\ (1 - \cos(\theta(t) - \omega t)) & -\sin(\theta(t) - \omega t) & 0 \end{pmatrix} \\ &= m\dot{\theta}^2(t) \begin{pmatrix} \cos(\theta(t) - \omega t) - 1 \\ \sin(\theta(t) - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

è la forza centrifuga.]

ESERCIZIO 3. Le coordinate dei tre punti P_1 , P_2 e P_3 sono

$$P_1 = (x_1, y_1) = (x_1, e^{x_1}), \quad P_2 = (x_2, y_2) = (x_2, 0), \quad P_3 = (x_3, y_3) = (0, y).$$

In assenza dei vincoli (oltre a quello che il moto avvenga nel piano xy), l'energia cinetica è

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{x}_3^2 + \dot{y}_3^2),$$

mentre l'energia potenziale è

$$V = mg(y_1 + y_2 + y_3) + \frac{k}{2} \left((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 \right).$$

Tenuto conto dei vincoli si ottiene

$$T_V = \frac{m}{2} (\dot{x}_1^2 + e^{2x_1} \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{y}^2)$$

e

$$\begin{aligned} V_V &= mg(y + e^{x_1}) + \frac{k}{2} \left((x_1 - x_2)^2 + e^{2x_1} + x_1^2 + (e^{x_1} - y)^2 \right) \\ &= mg(y + e^{x_1}) + \frac{k}{2} (2x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + 2e^{2x_1} + y^2 - 2e^{x_1}y). \end{aligned}$$

Quindi la lagrangiana vincolata è

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= T_V - V_V = \frac{m}{2} (\dot{x}_1^2 + e^{2x_1} \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{y}^2) \\ &\quad - mg(y + e^{x_1}) - \frac{k}{2} (2x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + 2e^{2x_1} + y^2 - 2e^{x_1}y) \end{aligned}$$

e le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange sono date da

$$m(\ddot{x}_1(1 + e^{2x_1}) + 2e^{2x_1}\dot{x}_1^2) = -\frac{\partial V_V}{\partial x_1}, \quad m\ddot{x}_2 = -\frac{\partial V_V}{\partial x_2}, \quad m\ddot{y} = -\frac{\partial V_V}{\partial y},$$

dove

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_V}{\partial x_1} &= mge^{x_1} + k(2x_1 - x_2 + 2e^{2x_1} - ye^{x_1}), \\ \frac{\partial V_V}{\partial x_2} &= k(x_2 - x_1), \\ \frac{\partial V_V}{\partial y} &= mg + k(y - e^{x_1}). \end{aligned}$$

Le configurazioni di equilibrio del sistema si ottengono richiedendo che si abbia

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = \frac{\partial V}{\partial x_2} = \frac{\partial V}{\partial y} = 0,$$

ovvero

$$2x_1 - x_2 + 2e^{2x_1} - ye^{x_1} + \alpha e^{x_1} = 0, \quad x_2 = x_1, \quad y = e^{x_1} - \alpha,$$

dove si è posto

$$\alpha = \frac{mg}{k}.$$

Sostituendo le ultime due equazioni nella prima si ottiene

$$x_1 + e^{2x_1} + 2\alpha e^{x_1} = 0.$$

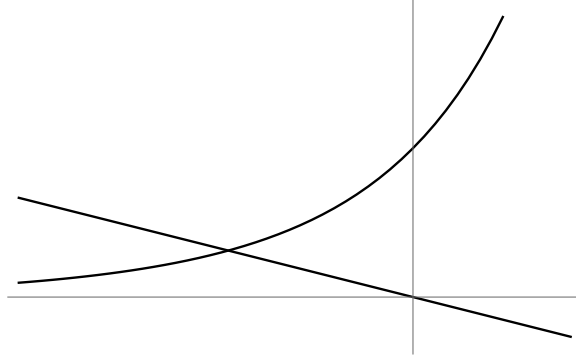
L'ultima equazione ammette una sola radice in $\mathbb{R}$, come si può mostrare graficamente. Infatti, riscrivendo l'equazione nella forma

$$f(x) = e^{2x_1} + 2\alpha e^{x_1} = -x_1,$$

si vede che la funzione $f(x)$

1. è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$;
2. è crescente poiché $f'(x) = 2e^{2x_1} + 2\alpha e^{x_1} > 0$ (poiché si ha $\alpha > 0$);
3. tende a $+\infty$ per $x \rightarrow +\infty$;
4. tende a 0^+ per $x \rightarrow -\infty$.

Quindi i grafici delle due funzioni $f(x)$ e $g(x) = -x$ si intersecano in un unico punto $x_0 < 0$, come illustrato nella figura seguente.



Esiste perciò un unico valore x_0 tale che $x_1 + e^{2x_1} + 2\alpha e^{x_1} = 0$ per $x_1 = x_0$. In corrispondenza di tale valore si trova anche

$$x_2 = x_1 = x_0, \quad y = y_0 = e^{x_0} - \alpha.$$

Pertanto esiste un'unica configurazione di equilibrio, data da

$$Q = (x_0, x_0, y_0).$$

Per studiarne la stabilità si calcola matrice hessiana. Si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V_V}{\partial x_1^2} &= mge^{x_1} + k(2 + 4e^{2x_1} - ye^{x_1}), & \frac{\partial^2 V_V}{\partial x_1 \partial x_2} &= -k, & \frac{\partial^2 V_V}{\partial x_1 \partial y} &= -ke^{x_1}, \\ \frac{\partial^2 V_V}{\partial x_1 \partial x_2} &= -k, & \frac{\partial^2 V_V}{\partial x_2^2} &= k, & \frac{\partial^2 V_V}{\partial x_2 \partial y} &= 0, \\ \frac{\partial^2 V_V}{\partial y \partial x_1} &= -ke^{x_1}, & \frac{\partial^2 V_V}{\partial y \partial x_2} &= 0, & \frac{\partial^2 V_V}{\partial y^2} &= k. \end{aligned}$$

Quindi, la matrice hessiana è data, in corrispondenza della configurazione Q , da

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} kA & -k & -kB \\ -k & k & 0 \\ -kB & 0 & k \end{pmatrix},$$

dove $A = 2\alpha e^{x_0} + 2 + 3e^{2x_0}$ e $B = e^{x_0}$. Applicando il criterio di Sylvester, si calcolano i minori di ordine 1, 2 e 3 dati da

$$M_1 = kA, \quad M_2 = k^2(A - 1), \quad M_3 = \det \mathcal{H} = kA(k^2) + k(-k^2) - kB(k^2B) = k^3(A - 1 - B^2).$$

Poiché risulta

$$M_1 = k(2\alpha e^{x_0} + 2 + 3e^{2x_0}), \quad M_2 = k(2\alpha e^{x_0} + 1 + 3e^{2x_0}), \quad M_3 = k(2\alpha e^{x_0} + 1 + 2e^{2x_0}),$$

ne concludiamo che Q è un punto di minimo per V_V e quindi, per il teorema di Dirichlet-Lagrange, una configurazione di equilibrio stabile per il sistema.

[Per calcolare la forza vincolare R che agisce sul punto P_1 , riprendiamo l'espressione dell'energia potenziale non vincolata V e calcoliamo le due componenti della forza attiva che agisce su P_1 ,

$$f_x^{(1)} = -\frac{\partial V}{\partial x_1} = -k(x_1 - x_2 + x_1 - x_3), \quad f_y^{(1)} = -\frac{\partial V}{\partial y_1} = -mg - k(y_1 - y_2 + y_1 - y_3),$$

che, in corrispondenza del vincolo, diventano

$$f_x^{(1)} = \frac{\partial V}{\partial x_1} = -k(2x_1 - x_2), \quad f_y^{(1)} = \frac{\partial V}{\partial y_1} = -mg - k(2e^{x_1} - y).$$

La forza vincolare R ha componenti $R_x^{(1)}$ e $R_y^{(1)}$ tali che

$$m\ddot{x}_1 = f_x^{(1)} + R_x^{(1)}, \quad m\ddot{y}_1 = f_y^{(1)} + R_y^{(1)},$$

dove $m\ddot{x}_1$ si ricava dall'equazione di Eulero-Lagrange

$$\begin{aligned} m(\ddot{x}_1(1 + e^{2x_1}) + 2e^{2x_1}\dot{x}_1^2) &= -(mge^{x_1} + k(2x_1 - x_2 + 2e^{2x_1} - ye^{x_1})), \\ m\ddot{y}_1 &= m\frac{d^2}{dt^2}e^{x_1} = m\frac{d}{dt}(e^{x_1}\dot{x}_1) = me^{x_1}(\ddot{x}_1 + \dot{x}_1^2). \end{aligned}$$

Si trova quindi che

$$\begin{aligned} R_x^{(1)} &= m\ddot{x}_1 - f_x^{(1)} = (1 + e^{2x_1})^{-1}(-2me^{2x_1}\dot{x}_1^2 - mge^{x_1} - k(2x_1 - x_2 + 2e^{2x_1} - ye^{x_1})) \\ &\quad + mg + k(2x_1 - x_2), \\ R_y^{(1)} &= m\ddot{y}_1 - f_y^{(1)} = e^{x_1}(1 + e^{2x_1})^{-1}(-2me^{2x_1}\dot{x}_1^2 - mge^{x_1} - k(2x_1 - x_2 + 2e^{2x_1} - ye^{x_1})) \\ &\quad + me^{x_1}\dot{x}_1^2 + mg + k(2e^{x_1} - y) \end{aligned}$$

sono le due componenti della forza vincolare che agisce sul punto P_1 .]

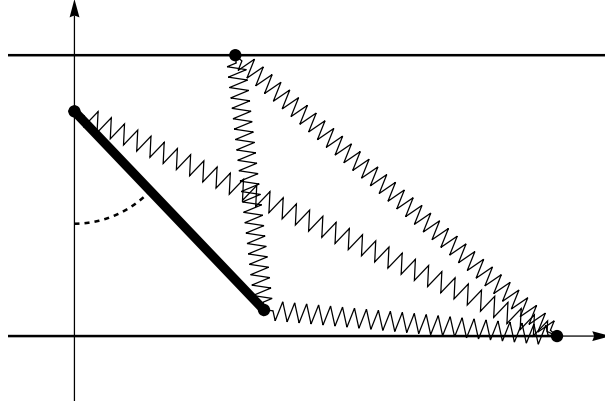
ESERCIZIO 4. Le coordinate dei due punti P_1 e P_2 sono

$$P_1 = (x_1, y_1) = (x_1, 1), \quad P_2 = (x_2, y_2) = (x_2, 0),$$

mentre le coordinate dei due estremi e del centro di massa dell'asta sono

$$A = (0, y), \quad B = (x_B, y_B) = (\sin \theta, y - \cos \theta), \quad C = (x_C, y_C) = \left(\frac{\sin \theta}{2}, y - \frac{\cos \theta}{2} \right),$$

dove θ è l'angolo che l'asta forma con l'asse y discendente. Si veda la figura seguente.



In assenza dei vincoli (oltre a quello che il moto avvenga nel piano xy), l'energia cinetica è

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + \frac{M}{2} (\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2) + \frac{M}{24} \dot{\theta}^2,$$

dove si è applicato il teorema di König e si è tenuto conto che il momento d'inerzia di un'asta omogenea di lunghezza ℓ e massa M , per rotazioni intorno a un asse passante per il suo centro di massa e ortogonale all'asse di simmetria, è $I = M\ell^2/12$, mentre l'energia potenziale è

$$V = mg(y_1 + y_2) + Mgy_C + \frac{k}{2} \left((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (x_1 - x_B)^2 + (y_1 - y_B)^2 + (x_2 - x_B)^2 + (y_2 - y_B)^2 + (x_2 - x_A)^2 + (y_2 - y_A)^2 \right).$$

Tenuto conto dei vincoli e del fatto che

$$\frac{d}{dt} \left(y - \frac{\cos \theta}{2} \right) = \dot{y} + \frac{\dot{\theta} \sin \theta}{2},$$

si ottiene

$$\begin{aligned} T_V &= \frac{m}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) + \frac{M}{8} \dot{\theta}^2 + \frac{M}{2} \dot{y}^2 + \frac{M}{2} \dot{y} \dot{\theta} \sin \theta + \frac{M}{24} \dot{\theta}^2 \\ V_V &= Mg \left(y - \frac{\cos \theta}{2} \right) + \frac{k}{2} \left((x_1 - x_2)^2 + (x_1 - \sin \theta)^2 + (1 - y + \cos \theta)^2 + (x_2 - \sin \theta)^2 + (y - \cos \theta)^2 + x_2^2 + y^2 \right) \\ &= Mg \left(y - \frac{\cos \theta}{2} \right) + k(x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2 - x_1 \sin \theta - x_2 \sin \theta + y^2 - y - 2y \cos \theta) + \dots, \end{aligned}$$

dove si sono trascurati i termini costanti. Quindi la lagrangiana vincolata è

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = T_V - V_V = & \frac{m}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) + \frac{M}{6} \dot{\theta}^2 + \frac{M}{2} \dot{y}^2 + \frac{M}{2} \dot{y} \dot{\theta} \sin \theta \\ & - Mg \left(y - \frac{\cos \theta}{2} \right) - k \left(x_1^2 + \frac{3}{2} x_2^2 - x_1 x_2 - x_1 \sin \theta - x_2 \sin \theta + \frac{3}{2} y^2 - y + \cos \theta - 2y \cos \theta \right)\end{aligned}$$

e le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange sono date da

$$\begin{aligned}m\ddot{x}_1 &= -\frac{\partial V_V}{\partial x_1}, \\ m\ddot{x}_2 &= -\frac{\partial V_V}{\partial x_2}, \\ \frac{M}{2} (2\ddot{y} + \ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta) &= -\frac{\partial V_V}{\partial y}, \\ \frac{M}{3} \ddot{\theta} + \frac{M}{2} (\ddot{y} \sin \theta + \dot{y} \dot{\theta} \cos \theta) &= -\frac{\partial V_V}{\partial \theta},\end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned}\frac{\partial V_V}{\partial x_1} &= k(2x_1 - x_2 - \sin \theta), \\ \frac{\partial V_V}{\partial x_2} &= k(3x_2 - x_1 - \sin \theta), \\ \frac{\partial V_V}{\partial y} &= Mg + k(3y - 1 - 2 \cos \theta) \\ \frac{\partial V_V}{\partial \theta} &= \frac{Mg}{2} \sin \theta + k(-x_1 \cos \theta - x_2 \cos \theta - \sin \theta + 2y \sin \theta).\end{aligned}$$

Le configurazioni di equilibrio del sistema si ottengono richiedendo che si abbia

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = \frac{\partial V}{\partial x_2} = \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0,$$

ovvero

$$\begin{aligned}2x_1 - x_2 - \sin \theta &= 0, & 3x_2 - x_1 - \sin \theta &= 0, \\ 3y - 1 - 2 \cos \theta + \frac{Mg}{k} &= 0, & \left(\frac{Mg}{2k} + 2y - 1 \right) \sin \theta - (x_1 + x_2) \cos \theta &= 0.\end{aligned}$$

Le prime due equazioni implicano

$$x_1 = \frac{4}{5} \sin \theta, \quad x_2 = \frac{3}{5} \sin \theta,$$

che, inserita nella quarta, dà

$$\left(\frac{Mg}{2k} + 2y - 1 - \frac{7}{5} \cos \theta \right) \sin \theta = 0,$$

che è soddisfatta o se $\sin \theta = 0$ (e quindi $\theta = 0$ oppure $\theta = \pi$) o se

$$\cos \theta = \frac{5}{7} \left(\frac{Mg}{2k} + 2y - 1 \right).$$

Si ha quindi una configurazione di equilibrio per $\theta = \pi$, in corrispondenza della quale si ha

$$x_1 = x_2 = 0, \quad y = y_0 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cos \theta - \frac{Mg}{3k} = -\frac{1}{3} - \frac{Mg}{3k}.$$

Per discutere la stabilità della configurazione di equilibrio

$$(x_1, x_2, y, \theta) = (0, 0, y_0, \pi)$$

si deve calcolare la matrice hessiana $\mathcal{H}$, tenendo conto che

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V_V}{\partial x_1^2} &= 2k, & \frac{\partial^2 V_V}{\partial x_1 \partial x_2} &= -k, & \frac{\partial^2 V_V}{\partial x_1 \partial y} &= 0, & \frac{\partial^2 V_V}{\partial x_1 \partial \theta} &= -k \cos \theta, \\ \frac{\partial^2 V_V}{\partial x_1 \partial x_2} &= -k, & \frac{\partial^2 V_V}{\partial x_2^2} &= 3k, & \frac{\partial^2 V_V}{\partial x_2 \partial y} &= 0, & \frac{\partial^2 V_V}{\partial x_2 \partial \theta} &= -k \cos \theta, \\ \frac{\partial^2 V_V}{\partial y \partial x_1} &= 0, & \frac{\partial^2 V_V}{\partial y \partial x_2} &= 0, & \frac{\partial^2 V_V}{\partial y^2} &= 3k, & \frac{\partial^2 V_V}{\partial \theta y \partial \theta} &= 2k \sin \theta, \\ \frac{\partial^2 V_V}{\partial \theta \partial x_1} &= -k \cos \theta, & \frac{\partial^2 V_V}{\partial \theta \partial x_2} &= -k \cos \theta, & \frac{\partial^2 V_V}{\partial \theta \partial y} &= 2k \sin \theta, \\ \frac{\partial^2 V_V}{\partial \theta^2} &= \frac{Mg}{2} \cos \theta + k(x_1 + x_2) \sin \theta + k(2y - 1) \cos \theta. \end{aligned}$$

In corrispondenza della configurazione di equilibrio trovata, la matrice hessiana $\mathcal{H}$ è data da

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} 2k & -k & 0 & k \\ -k & 3k & 0 & k \\ 0 & 0 & 3k & 0 \\ k & k & 0 & kb \end{pmatrix},$$

dove

$$b = -\frac{Mg}{2k} - (2y_0 - 1) = -\frac{Mg}{2k} - \left(-\frac{2}{3} - \frac{2Mg}{3k} - 1\right) = -\frac{Mg}{2k} + \frac{5}{3} + \frac{2Mg}{3k} = \frac{5}{3} + \frac{Mg}{6k}.$$

Applicando il criterio di Sylvester, poiché i minori principali di ordine 1, 2 e 3 sono positivi a vista, basta calcolare il determinante $\det \mathcal{H}$, ovvero il minore principale di ordine 3, per stabilire se la matrice hessiana sia definita positiva (se risulta $\det \mathcal{H} > 0$) e indefinita (se risulta invece $\det \mathcal{H} < 0$); qualora si trovasse $\det \mathcal{H} = 0$ non si potrebbe concludere nulla.

Si trova

$$\begin{aligned} \det \mathcal{H} &= 2k(3k(3k^2b) + k(-3k^2)) + k(-k(3k^2b) + k(-3k^2)) - k(-k(-3k^2) - 3k(-3k^2)) \\ &= k^4(18b - 6 - 3b - 3 - 3 - 9) = k^4(15b - 21) \\ &= k^4\left(15\left(\frac{5}{3} + \frac{Mg}{6k}\right) - 21\right) = 25 + \frac{Mg}{6k} - 21 = 4 + \frac{Mg}{6k}. \end{aligned}$$

Dal momento che anche il determinante $\det \mathcal{H}_2$ è positivo, poiché $Mg/6k > 0$, concludiamo che la configurazione di equilibrio corrisponde a un minimo isolato dell'energia potenziale, per il teorema di Lagrange-Dirichlet essa costituisce una configurazione di equilibrio stabile.

[In generale, per trovare tutte le configurazioni di equilibrio, distinguiamo i seguenti casi:

1. se $\theta = 0$ si ha $x_1 = x_2 = 0$ e $y = a_1$, dove

$$a_1 = 1 - \frac{Mg}{3k},$$

2. se $\theta = \pi$ si ha $x_1 = x_2 = 0$ e $y = a_2$, dove

$$a_2 = -\frac{1}{3} - \frac{Mg}{3k},$$

che corrisponde alla configurazione già discussa,

3. se $\cos \theta = (5/7)((Mg/2k) + 2y - 1)$, si trovano due condizioni, date da

$$3y - 1 - 2 \cos \theta + \frac{Mg}{k} = 0, \quad \cos \theta = \frac{5}{7} \left(\frac{Mg}{2k} + 2y - 1 \right),$$

che legano tra loro le coordinate y e θ . Esprimendo y in funzione di θ , si ottiene

$$y = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cos \theta - \frac{Mg}{3k} = \frac{7}{10} \cos \theta - \frac{Mg}{4k} + \frac{1}{2},$$

che fornisce un'equazione chiusa per θ , data da

$$\frac{1}{30} \cos \theta = -\frac{Mg}{12k} - \frac{1}{6} \implies \cos \theta = \alpha = -5 \left(\frac{Mg}{2k} + 1 \right).$$

In conclusione, se $|\alpha| \geq 1$ si hanno le due configurazioni

$$Q_1 = (0, 0, a_1, 0),$$

$$Q_2 = (0, 0, a_2, \pi),$$

mentre, se $|\alpha| < 1$, oltre alle due configurazioni precedenti, si hanno anche

$$Q_3 = \left(\frac{4}{5} \sin \theta_0, \frac{3}{5} \sin \theta_0, a_3, \theta_0 \right),$$

$$Q_4 = \left(-\frac{4}{5} \sin \theta_0, -\frac{3}{5} \sin \theta_0, a_3, -\theta_0 \right),$$

dove

$$\theta_0 = \arccos \alpha \in (0, \pi), \quad a_3 = \frac{1}{3} \left(1 + 2 \cos \theta_0 - \frac{Mg}{k} \right) = - \left(2 \frac{Mg}{k} + 3 \right).$$

Per studiare la stabilità delle configurazioni di equilibrio, si considera la matrice hessiana, che è data in corrispondenza della configurazione Q_1 , da

$$\mathcal{H}_1 = \begin{pmatrix} 2k & -k & 0 & -k \\ -k & 3k & 0 & -k \\ 0 & 0 & 3k & 0 \\ -k & -k & 0 & kb_1 \end{pmatrix},$$

in corrispondenza della configurazione Q_2 (già discussa), da

$$\mathcal{H}_2 = \begin{pmatrix} 2k & -k & 0 & k \\ -k & 3k & 0 & k \\ 0 & 0 & 3k & 0 \\ k & k & 0 & kb_2 \end{pmatrix},$$

in corrispondenza della configurazione Q_3 , da

$$\mathcal{H}_3 = \begin{pmatrix} 2k & -k & 0 & -kc \\ -k & 3k & 0 & -kc \\ 0 & 0 & 3k & 2ks \\ -kc & -kc & 2ks & kb_3 \end{pmatrix}$$

e, in corrispondenza della configurazione Q_1 , da

$$\mathcal{H}_4 = \begin{pmatrix} 2k & -k & 0 & -kc \\ -k & 3k & 0 & -kc \\ 0 & 0 & 3k & -2ks \\ -kc & -kc & -2ks & kb_4 \end{pmatrix},$$

dove si è abbreviato per semplicità $c = \cos \theta_0$ e $s = \sin \theta_0$ e si è definito

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{Mg}{2k} + 2a_1 - 1 = 1 - \frac{Mg}{6k}, \\ b_2 &= -\frac{Mg}{2k} + 2a_2 - 1 = \frac{5}{3} + \frac{Mg}{6k}, \\ b_3 &= \frac{Mg}{2k} \cos \theta_0 + \frac{7}{5} \sin^2 \theta_0 + (2a_3 - 1) \cos \theta_0, \\ b_4 &= \frac{Mg}{2k} \cos \theta_0 + \frac{7}{5} \sin^2 \theta_0 + (2a_3 - 1) \cos \theta_0. \end{aligned}$$

Applicando il criterio di Sylvester, di nuovo si vede immediatamente che i minori principali di ordine 1, 2 e 3 sono positivi, quindi basta calcolare il determinante $\det \mathcal{H}$. Si trova

$$\begin{aligned} \det \mathcal{H}_1 &= k^4(15b_1 - 21), \\ \det \mathcal{H}_2 &= k^4(15b_2 - 21), \\ \det \mathcal{H}_3 &= k^4(15b_3 - 20 - \cos^2 \theta_0), \\ \det \mathcal{H}_4 &= k^4(15b_4 - 20 - \cos^2 \theta_0). \end{aligned}$$

Definiamo

$$\beta = \frac{Mg}{2k} \implies \alpha = -5(\beta + 1),$$

così che

$$-1 < \alpha < 1 \iff -1 < -5(\beta + 1) < 1 \iff -\frac{1}{5} < \beta + 1 < \frac{1}{5} \iff -\frac{6}{5} < \beta < -\frac{4}{5}.$$

La configurazione Q_1 è stabile se

$$15b_1 - 21 = 15 \left(1 - \frac{\beta}{3} \right) - 21 > 0 \iff -6 - 5\beta > 0 \iff \beta < -\frac{6}{5},$$

mentre la configurazione Q_2 è stabile se

$$15b_2 - 21 = 15 \left(\frac{5}{3} + \frac{\beta}{3} \right) - 21 > 0 \iff 4 + 5\beta > 0 \iff \beta > -\frac{4}{5}.$$

Infine le configurazioni Q_3 e Q_4 , essendo simmetriche, sono entrambe stabili se

$$\begin{aligned} 15b_3 - 20 - \cos^2 \theta_0 &= 15 \left(\beta\alpha + \frac{7}{5}(1 - \alpha^2) + (-2(4\beta + 3) - 1)\alpha \right) - 20 - \alpha^2 \\ &= 15 \left(-5\beta(\beta + 1) + \frac{7}{5}(1 - 25(\beta^2 + 2\beta + 1)) \right. \\ &\quad \left. - 5(-8\beta - 7)(\beta + 1) \right) - 20 - 25(\beta^2 + 2\beta + 1) \\ &= 15 \left(-5\beta^2 - 5\beta + \frac{7}{5} - 35\beta^2 - 70\beta - 35 + 40\beta^2 + 75\beta + 35 \right) \\ &\quad - 20 - 25\beta^2 - 50\beta - 25 \\ &= 15 \frac{7}{5} - 45 - 25\beta^2 - 50\beta = -24 - 50\beta - 25\beta^2 > 0, \end{aligned}$$

ovvero se

$$25\beta^2 + 50\beta + 24 < 0.$$

Dal momento che gli zeri del polinomio $25\beta^2 + 50\beta + 24$ sono

$$\beta = \frac{-25 \pm \sqrt{25 \cdot 25 - 25 \cdot 24}}{25} = \frac{-25 \pm 5}{25} = -1 \pm \frac{1}{5},$$

si ha che la disequazione $25\beta^2 + 50\beta + 24 < 0$ è verificata se e solo se

$$-\frac{6}{5} = -1 - \frac{1}{5} < \beta < -1 + \frac{2}{5} = -\frac{4}{5}.$$

Quindi, per i valori del parametro β per cui esistono, le due configurazioni di equilibrio Q_3 e Q_4 sono entrambe stabili.

Per $\beta = -4/5$ si ha $\alpha = -1$ ovvero $\theta = \pi$, mentre per $\beta = -6/5$ si ha $\alpha = 1$ ovvero $\theta = 0$. Ne concludiamo che, al variare di β si ha la seguente situazione:

1. per $\beta < -6/5$ esistono due configurazioni di equilibrio, Q_1 e Q_2 , di cui Q_1 è stabile e Q_2 è instabile;
2. per $\beta \in (-6/5, 4/5)$, la configurazione Q_1 diventa instabile e configurazione Q_2 resta instabile, ma da Q_1 biforciano, in corrispondenza del valore $\beta = -6/5$, due configurazioni stabili, che rimangono fino al valore $\beta = -4/5$, dove collassano nella configurazione Q_2 ;
3. per $\beta > -4/5$, scompaiono le due configurazioni Q_3 e Q_4 , la configurazione Q_1 resta instabile, mentre la configurazione Q_2 diventa stabile.

Si noti che, dal punto di vista fisico, il parametro β è positivo, quindi si ha sempre $\beta > -4/5$. Ne segue che, di fatto, esistono solo le due configurazioni di equilibrio Q_1 e Q_2 , la prima stabile e instabile la seconda.]

ESERCIZIO 5. Il dominio della trasformazione di coordinate è $\{(q, p) \in \mathbb{R}^2 : p > 0\}$.

Per trovare una funzione generatrice di seconda specie $F(q, P)$, procediamo come segue. La seconda equazione si può riscrivere

$$(P + qe^{q^2})^2 = \frac{e^{-q^2}p}{1 + 2q^2} \implies p = (1 + 2q^2)e^{q^2}(P + qe^{q^2})^2.$$

Richiedendo che si abbia $p = \partial F / \partial q$, si ottiene

$$F(q, P) = \int (1 + 2q^2)e^{q^2}(P + qe^{q^2})^2 dq,$$

che, con la sostituzione

$$t = P + qe^{q^2} \implies dt = (e^{q^2} + 2q^2e^{q^2})dq = e^{q^2}(1 + 2q^2)dq,$$

dà

$$F(q, P) = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + c_1(P) = \frac{1}{3}(P + qe^{q^2})^3 + c_1(P),$$

dove $c_1(P)$ è al momento una funzione arbitraria della sola variabile P . Dalla prima equazione si ottiene invece

$$Q = (P + qe^{q^2})^2,$$

così che, richiedendo che si abbia $Q = \partial F / \partial P$, con la sostituzione

$$t = P + qe^{q^2} \implies dt = dP,$$

si ottiene

$$F(q, P) = \int (P + qe^{q^2})^2 dP = \frac{1}{3}(P + qe^{q^2})^3 + c_2(q),$$

dove $c_2(q)$ è una funzione arbitraria di q . In conclusione, scegliendo

$$c_1(P) = c_2(q) = 0,$$

si trova la funzione generatrice

$$F(q, P) = \frac{1}{3}(P + qe^{q^2})^3.$$

Data la lagrangiana $\mathcal{L}(q, \dot{q}) = (1 + 2q^2)^2 e^{2q^2} \dot{q}^2$, posto

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = 2(1 + 2q^2)^2 e^{2q^2} \dot{q} \implies \dot{q} = \frac{p}{2(1 + 2q^2)^2 e^{2q^2}},$$

si trova

$$H(q, p) = p\dot{q} - (1 + 2q^2)^2 e^{2q^2} \dot{q}^2 = \frac{p^2}{2(1 + 2q^2)^2 e^{2q^2}} - \frac{p^2}{4(1 + 2q^2)^2 e^{2q^2}} = \frac{p^2 e^{-2q^2}}{4(1 + 2q^2)^2}.$$

In termini delle nuove coordinate (Q, P) , l'hamiltoniana diventa

$$K(Q, P) = \frac{1}{4}Q^2.$$

Le corrispondenti equazioni di Hamilton sono

$$\dot{Q} = 0, \quad \dot{P} = -\frac{Q}{2},$$

che si integrano immediatamente e danno

$$Q(t) = Q(0), \quad P(t) = P(0) - \frac{Q(0)}{2}t.$$

Le condizioni iniziali $(q(0), \dot{q}(0)) = (0, 1)$ danno

$$p(0) = 2(1 + 2q(0)^2)^2 e^{2q(0)^2} \dot{q}(0) = 2,$$

da cui si ricavano le condizioni iniziali

$$Q(0) = p(0) = 2, \quad P(0) = \sqrt{p(0)} = \sqrt{2}.$$

La soluzione delle equazioni di Hamilton, in termini delle variabili (Q, P) , è quindi data da

$$Q(t) = 2, \quad P(t) = \sqrt{2} - t.$$

[Poiché $Q(t) = 2$ per ogni t per cui la soluzione è definita, dalla definizione di Q si ottiene

$$e^{q^2(t)}(1 + 2q^2(t)) = p(t),$$

mentre la definizione di P implica che

$$q(t)e^{q^2(t)} = \sqrt{Q(t)} - P(t) = \sqrt{2} - \sqrt{2} + t = t.$$

La funzione $f(q) = qe^{q^2}$

1. è definita per ogni q ,
2. è crescente in q ,
3. tende a $\pm\infty$ per q che tende a $\pm\infty$.

Quindi per ogni t esiste un unico $q(t)$ tale che $f(q(t)) = t$. Ne segue che la soluzione $q(t)$ è definita per ogni $t \in \mathbb{R}$ e dal fatto che

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(q(t)) = +\infty,$$

si conclude che

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q(t) = +\infty,$$

per le proprietà viste sopra della funzione f .]

[Per calcolare le parentesi di Poisson, può essere conveniente scrivere

$$P = \sqrt{Q} - f(q) = Q^{1/2} - f(q), \quad f(q) = qe^{q^2}.$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned} \{Q, P\} &= \frac{\partial Q}{\partial q} \frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial q} = \frac{\partial Q}{\partial q} \frac{\partial Q^{1/2}}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p} \left(\frac{\partial Q^{1/2}}{\partial q} - \frac{\partial f}{\partial q} \right) \\ &= \frac{1}{2Q^{1/2}} \left(\frac{\partial Q}{\partial q} \frac{\partial Q}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial Q}{\partial q} \right) + \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial f}{\partial q} = \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial f}{\partial q} \\ &= \frac{e^{-q^2}}{1 + 2q^2} \frac{\partial f}{\partial q} = \frac{e^{-q^2}}{1 + 2q^2} (1 + 2q^2) e^{q^2} = 1. \end{aligned}$$

mentre le relazioni $\{Q, Q\} = \{P, P\} = 0$ sono banalmente soddisfatte essendo le parentesi di Poisson antisimmetriche.]
