

FM210 - Meccanica Analitica

Anno Accademico 2024/2025

Quarto appello (19-01-2026)

ESERCIZIO 1. [6+2] Si consideri il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa $m = 1$ sottoposto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = \log(4 + x^4) - \log|1 + \alpha x^2|, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

1. Si studi il grafico dell'energia potenziale $V(x)$ al variare di $\alpha > 0$.
2. Si determinino i punti di equilibrio del sistema dinamico associato e se ne discuta la stabilità.
3. Si discuta qualitativamente il moto del sistema nel piano delle fasi $(x, \dot{x})$.
4. Si dimostri che tutte le traiettorie sono limitate.
5. Si dimostri che esistono traiettorie asintotiche.
6. [Si studi il sistema per $\alpha \leq 0$ e si discuta se esistano ancora traiettorie asintotiche.]

ESERCIZIO 2. [6+2] Un sistema di riferimento mobile $K = O'\xi\eta\zeta$ si muove rispetto a un sistema di riferimento fisso $k = Oxyz$ nel modo seguente. L'origine O' oscilla lungo la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1$ in modo tale che il segmento OO' forma un angolo

$$\theta(t) = \frac{\pi}{4} \sin t$$

con l'asse y discendente; l'asse η è diretto verso il centro della circonferenza, mentre l'asse ζ ha la direzione e il verso dell'asse z . Un punto materiale P si muove nel sistema di riferimento k lungo la circonferenza con legge oraria

$$x(t) = \sin \omega t, \quad y(t) = -\cos \omega t, \quad z(t) = 0, \quad \omega > 0.$$

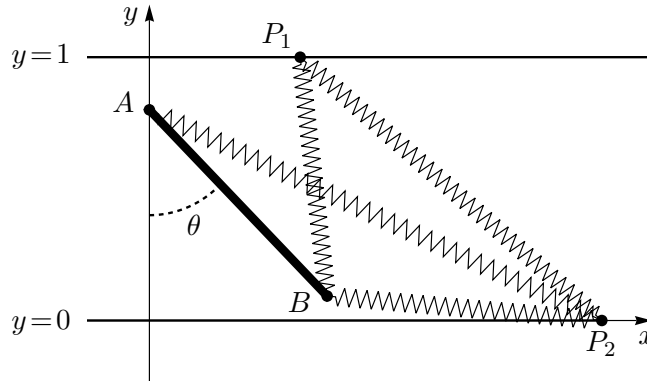
1. Si descriva il moto di P nel sistema di riferimento mobile K come composizione di una rotazione B e di una traslazione C .
2. Si determinino la velocità assoluta, la velocità relativa e le componenti rotatoria e traslatoria della velocità di trascinamento di P .
3. Si calcoli la distanza massima d_0 di P dall'origine O' nel sistema di riferimento mobile.
4. [Si determini il primo istante t_0 in cui viene raggiunta la distanza d_0 .]
5. [Si determinino la forza di Coriolis e la forza centrifuga che agiscono sul punto P .]

ESERCIZIO 3. [6+2] Un sistema meccanico è costituito da tre punti materiali P_1 , P_2 e P_3 , tutti di massa m , che si muovono nel piano verticale xy nel modo seguente: il punto P_1 scorre lungo la guida di equazione $y = e^x$; il punto P_2 scorre lungo l'asse x ; il punto P_3 scorre lungo l'asse y ; due molle di lunghezza a riposo trascurabile e di costante elastica k collegano il punto P_1 ai punti P_2 e P_3 ; sui punti agisce inoltre la forza di gravità, diretta nel verso discendente dell'asse y (si indichi con g l'accelerazione di gravità).

1. Si scrivano la lagrangiana del sistema.
 2. Si scrivano le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.
 3. Si dimostri che esiste una sola configurazione di equilibrio e se ne discuta la stabilità.
 4. [Si calcoli la forza vincolare che agisce sul punto P_1 .]
-

ESERCIZIO 4. [6+2] Un sistema meccanico è costituito da un'asta omogenea, di estremi A e B , di massa M e lunghezza $\ell = 1$, e da due punti materiali P_1 e P_2 , entrambi di massa m , che si muovono nel piano xy nel modo seguente:

- l'estremo A dell'asta scorre lungo l'asse y ;
 - P_1 scorre lungo l'asse $y = 1$, mentre P_2 scorre lungo l'asse $y = 0$;
 - quattro molle di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla connettono l'estremo libero B dell'asta ai due punti P_1 e P_2 , i due punti P_1 e P_2 tra loro, e il punto P_2 all'estremo A dell'asta;
 - sul sistema agisce infine la forza di gravità (si indichi con g l'accelerazione di gravità), diretta nel verso discendente dell'asse y .
1. Si scrivano la lagrangiana del sistema e le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange, utilizzando come coordinate lagrangiane le ascisse dei due punti P_1 e P_2 , l'ordinata dell'estremo A dell'asta e l'angolo θ che l'asta forma con l'asse y discendente (cfr. la figura).
 2. Si dimostri che esiste una configurazione di equilibrio con $\theta = \pi$ e se ne discuta la stabilità.
 3. Si determinino le altre configurazioni di equilibrio.
 4. [Si discuta la stabilità delle configurazioni di equilibrio in generale.]



ESERCIZIO 5. [6+2] Si consideri la trasformazione di coordinate

$$Q = \frac{e^{-q^2} p}{1 + 2q^2}, \quad P = \sqrt{\frac{e^{-q^2} p}{1 + 2q^2}} - qe^{q^2}.$$

1. Si studi il dominio $\mathcal{D}$ della trasformazione.
2. Si dimostri che la trasformazione è canonica trovando una funzione generatrice di seconda specie.
3. Si consideri il sistema descritto dalla lagrangiana

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = (1 + 2q^2)^2 e^{2q^2} \dot{q}^2$$

e si scriva l'hamiltoniana $H(q, p)$ associata alla lagrangiana $\mathcal{L}(q, \dot{q})$.

4. Si esprima l'hamiltoniana in termini delle coordinate (Q, P) e si risolvano le equazioni di Hamilton corrispondenti.
 5. [Si mostri che la soluzione delle equazioni di Eulero-Lagrange con condizioni iniziali $(q(0), \dot{q}(0)) = (0, 1)$ è definita globalmente nel tempo e se ne calcoli il limite per $t \rightarrow +\infty$.]
 6. [Si verifichi esplicitamente che la trasformazione conserva le parentesi di Poisson fondamentali].
-
-