

FM210 - Meccanica Analitica

Anno Accademico 2024/2025

Quinto appello - Soluzioni (02-02-2026)

ESERCIZIO 1. La funzione

$$V(x) = \frac{x^2 + 1}{|x^2 - 1|} + x^2.$$

è definita per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$. Inoltre $V(x)$ è pari in x , quindi è sufficiente studiare la funzione in $[0, +\infty)$. Tenendo conto che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{|x^2 - 1|} = \frac{x^2(1 + x^{-2})}{x^2(1 + x^{-2})} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1^\pm} \frac{x^2 + 1}{|x^2 - 1|} = +\infty,$$

si trova, utilizzando anche la parità,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} V(x) = 1 + \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^2 = +\infty.$$

Inoltre $V(x)$ ha un asintoto verticale in $x = 1$ e quindi, per parità, anche un asintoto verticale in $x = -1$: tende a $+\infty$ per x che tende a ± 1 sia da destra che da sinistra.

La derivata di $V(x)$ per $|x| > 1$ è data da

$$\begin{aligned} V'(x) &= \frac{2x(x^2 - 1) - 2x(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^2} + 2x = \frac{2x(-2)}{(x^2 - 1)^2} + 2x \\ &= \frac{2x(-2) + 2x(x^2 - 1)^2}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2x(x^4 - 2x^2 - 1)}{(x^2 - 1)^2}, \end{aligned}$$

mentre per $|x| < 1$ è data da

$$\begin{aligned} V'(x) &= -\frac{2x(x^2 - 1) - 2x(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^2} + 2x = -\frac{2x(-2)}{(x^2 - 1)^2} + 2x \\ &= \frac{2x(2) + 2x(x^2 - 1)^2}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2x(x^4 - 2x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^2}. \end{aligned}$$

Ne segue che, per $|x| > 1$, si ha $V'(x) = 0$ se e solo se

$$x^4 - 2x^2 - 1 = 0 \implies x^2 = 1 \pm \sqrt{2} \implies x = \pm \sqrt{1 \pm \sqrt{2}},$$

dal momento che $x = 0$ non va considerato in quanto non soddisfa la condizione $|x| > 1$ e la determinazione $x^2 = 1 - \sqrt{2}$ va scartata in quanto negativa. Invece, per $|x| < 1$, si ha $V'(x) = 0$ se e solo se $x = 0$, dal momento che risulta

$$x^4 - 2x^2 + 3 = 0 \implies x^2 = 1 \pm \sqrt{-2} \implies x^2 = 1 \pm i\sqrt{2},$$

così che non esistono altri zeri reali.

In conclusione si hanno 3 punti critici e quindi 3 configurazioni di equilibrio:

$$x = 0, \quad x = x_0, \quad x = -x_0, \quad \text{dove} \quad x_0 = \sqrt{1 + \sqrt{2}},$$

Poiché nell'intervallo $[-1, 1]$ la funzione $V(x)$ diverge agli estremi e ha un unico punto critico in $x = 0$, necessariamente $x = 0$ è un punto di minimo relativo. Analogamente, in $[1, +\infty]$ la funzione $V(x)$ diverge agli estremi e ha un solo punto critico in $x = x_0$, quindi anche $x = x_0$ è un punto di minimo relativo. Per parità, anche $x = -x_0$ è un punto di minimo relativo.

Calcolando la derivata seconda di $V(x)$, si trova, per $|x| > 1$,

$$V''(x) = \frac{2x^6 - 6x^4 + 18x^2 + 2}{(x^2 - 1)^3} = \frac{2(x^6 - 3x^4 + 9x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^3},$$

e, poiché risulta

$$x^2 - 1 > 0$$

e

$$\begin{aligned} x^6 - 3x^4 + 9x^2 + 1 &= (x^4 - 3x^2 + 9)x^2 + 1 = \left(x^4 - 3x^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(9 - \frac{9}{4}\right)\right)x^2 + 1 \\ &= \left(x^2 - \frac{3}{2}\right)^2 x^2 + \frac{9 \cdot 3}{4} x^2 + 1 \geq 1 > 0, \end{aligned}$$

si ha $V''(x) > 0$ in $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. Analogamente, per $|x| < 1$, si ha

$$V''(x) = \frac{2(x^6 - 3x^4 - 3x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^3},$$

così che, notando che

$$x^2 - 1 < 0$$

e

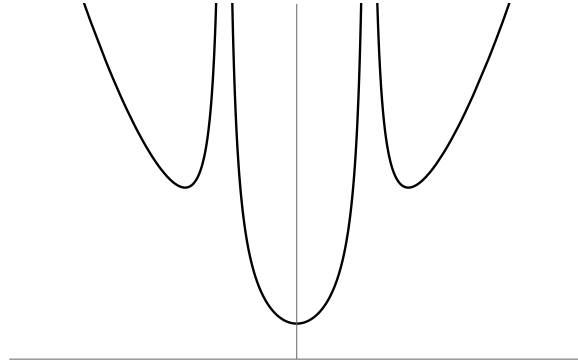
$$x^6 - 3x^4 - 3x^2 - 3 \leq 1 - 3x^4 - 3x^2 - 3 \leq -2 - 3x^4 - 3x^2 \leq -2 < 0,$$

si trova $V''(x) > 0$ anche in $(-1, 1)$. In conclusione la funzione $V(x)$ è strettamente convessa in tutto il suo dominio.

Infine notiamo che $V(0) = 1$, mentre

$$V(\pm x_0) = \frac{2 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} + 2(1 + \sqrt{2}) = \frac{2}{\sqrt{2}} + 2\sqrt{2} + 3 > V(0).$$

Il grafico di $V(x)$ è rappresentato nella figura seguente.



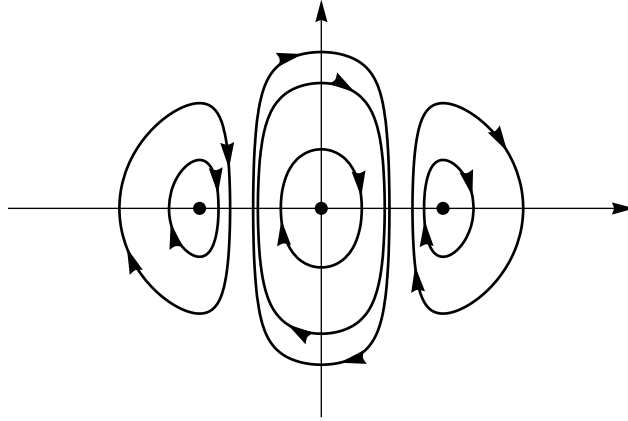
Per studiare le curve di livello

$$\Gamma_E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2}y^2 + V(x) \right\},$$

si vede dal grafico dell'energia potenziale che

1. Γ_E è definita se e solo se $E \geq E_0 = \min\{V(x) : x \in \mathbb{R}\} = V(0)$;
2. Γ_{E_0} consiste nel solo punto di equilibrio $P_0 = (0, 0)$, che è stabile per il teorema di Lagrange-Dirichlet, essendo $x = 0$ un punto di minimo isolato per l'energia potenziale $V(x)$;
3. per ogni valore $E \in (E_0, E_1)$, dove $E_1 = V(\pm x_0)$, la curva di livello Γ_E è formata da un'orbita chiusa, che è il supporto di una traiettoria periodica;
4. Γ_{E_1} consiste, oltre che nei punti di equilibrio $P_1 = (x_0, 0)$ e $P_2 = (-x_0, 0)$, entrambi stabili sempre per il teorema di Lagrange-Dirichlet, anche in un'orbita chiusa che contiene P_0 al suo interno;
5. per ogni valore $E > E_1$, la curva di livello Γ_E consiste in tre componenti connesse γ_E , γ_E^+ e γ_E^- , ciascuna delle quali consiste in un'orbita chiusa percorsa da una traiettoria periodica, delle quali la prima è contenuta nella striscia $|x| < 1$, la seconda è contenuta nel semipiano $x > 1$ e la terza è contenuta nel semipiano $x < -1$.

Alcune orbite del sistema – inclusi i punti di equilibrio – sono rappresentate nella figura seguente. Per determinare di verso di percorrenza delle orbite si tiene conto che $\dot{x} = y$, così che $x = x(t)$ è crescente per $y > 0$ e decrescente per $y < 0$: il moto avviene da sinistra a destra nel semipiano $y > 0$ e da destra a sinistra nel semipiano $y < 0$.



In corrispondenza del dato iniziale $(x(0), y(0)) = (x(0), \dot{x}(0)) = (0, 4)$ si ha

$$E = \frac{4^2}{2} + V(0) = 8 + 1 = 9$$

e, poichè si ha $x(0) \in (-1, 1)$ ed $E > 1 = E_0$, la traiettoria corrispondente è periodica.

[Il periodo è dato da

$$T = \int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{2(E - V(x))}}, \quad E = 9,$$

dove $x_{\pm}$ sono le due soluzioni nell'intervallo $(-1, 1)$ dell'equazione

$$E - V(x) = 0, \quad E = 9,$$

ovvero

$$\frac{x^2 + 1}{1 - x^2} + x^2 = E \implies x^2 + 1 + (x^2 - E)(1 - x^2) = 0 \implies x^2 + 1 + x^2 - E - x^4 + x^2 E = 0$$

Si tratta quindi di risolvere l'equazione di secondo grado in x^2 data da

$$x^4 - (2 + E)x^2 + (E - 1) = 0, \quad E = 9.$$

Si trova

$$x^2 = \frac{2 + E \pm \sqrt{(2 + E)^2 - 4(E - 1)}}{2} = \frac{11 \pm \sqrt{(11)^2 - 4 \cdot 8}}{2} = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 32}}{2} = \frac{11 \pm \sqrt{89}}{2}.$$

Delle due determinazioni solo quella con il segno $-$ è minore di 1. Quindi, ne concludiamo che

$$x_+ = \sqrt{\frac{11 - \sqrt{89}}{2}}$$

e $x_- = -x_+$.]

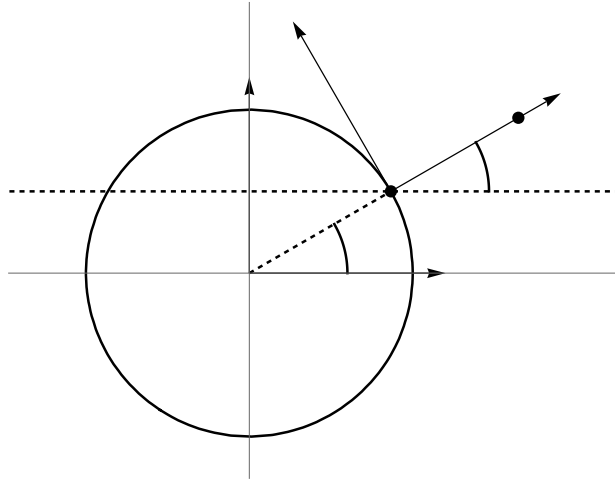
ESERCIZIO 2. Se $\mathbf{q}$ e $\mathbf{Q}$ sono le coordinate di un punto nel sistema di riferimento fisso k e nel sistema di riferimento mobile K , rispettivamente, si ha

$$\mathbf{q} = B\mathbf{Q} + \mathbf{r},$$

dove

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos \theta(t) \\ \sin \theta(t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \cos \theta(t) & -\sin \theta(t) & 0 \\ \sin \theta(t) & \cos \theta(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \theta(t) = \omega_0 t,$$

dal momento che l'asse ξ ha direzione radiale e forma quindi con l'asse x un angolo uguale all'angolo $\theta(t)$ che forma rispetto allo stesso asse il segmento OO' . Si veda la figura seguente.



Scrivendo $\mathbf{q} = (x, y, z)$ e $\mathbf{Q} = (\xi, \eta, \zeta)$, si trova

$$\mathbf{q} = B\mathbf{Q} + \mathbf{r} = \begin{pmatrix} \cos \theta(t) & -\sin \theta(t) & 0 \\ \sin \theta(t) & \cos \theta(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \sin \omega_1 t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \theta(t) \\ \sin \theta(t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega_0 t (1 + 2 \sin \omega_1 t) \\ \sin \omega_0 t (1 + 2 \sin \omega_1 t) \\ 0 \end{pmatrix},$$

da cui ricava

$$x = \cos \omega_0 t (1 + 2 \sin \omega_1 t), \quad y = \sin \omega_0 t (1 + 2 \sin \omega_1 t), \quad z = 0.$$

La velocità assoluta è data da

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega_0 \sin \omega_0 t (1 + 2 \sin \omega_1 t) + 2\omega_1 \cos \omega_0 t \cos \omega_1 t \\ \omega_0 \cos \omega_0 t (1 + 2 \sin \omega_1 t) + 2\omega_1 \sin \omega_0 t \cos \omega_1 t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La velocità relativa è

$$\begin{aligned} \mathbf{v}' &= B\dot{\mathbf{Q}} = \begin{pmatrix} \cos \theta(t) & -\sin \theta(t) & 0 \\ \sin \theta(t) & \cos \theta(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\xi}(t) \\ \dot{\eta}(t) \\ \dot{\zeta}(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \omega_0 t & -\sin \omega_0 t & 0 \\ \sin \omega_0 t & \cos \omega_0 t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\omega_1 \cos \omega_1 t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\omega_1 \cos \omega_0 t \cos \omega_1 t \\ 2\omega_1 \sin \omega_0 t \cos \omega_1 t \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La componente traslatoria della velocità di trascinamento è

$$\mathbf{v}_0 = \dot{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} -\sin \theta(t) \dot{\theta}(t) \\ \cos \theta(t) \dot{\theta}(t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega_0 \sin \omega_0 t \\ \omega_0 \cos \omega_0 t \\ 0 \end{pmatrix},$$

mentre la componente rotatoria della velocità di trascinamento è data da $\mathbf{v}_T = \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{q} - \mathbf{r})$, con

$$\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \dot{\theta}(t)) = (0, 0, \omega_0), \quad \mathbf{q} - \mathbf{r} = (2 \cos \omega_0 t \sin \omega_1 t, 2 \sin \omega_0 t \sin \omega_1 t, 0),$$

ed è quindi

$$\mathbf{v}_T = \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 0 & 0 & \omega_0 \\ 2 \cos \omega_0 t \sin \omega_1 t & 2 \sin \omega_0 t \sin \omega_1 t & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\omega_0 \sin \omega_0 t \sin \omega_1 t \\ 2\omega_0 \cos \omega_0 t \sin \omega_1 t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Si verifica immediatamente che $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_T$ (in pratica, $\mathbf{v}_T$ si può calcolare, una volta ottenute $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}'$ e $\mathbf{v}_0$, come $\mathbf{v}_T = \mathbf{v} - \mathbf{v}' - \mathbf{v}_0$).

Il punto P attraversa l'origine del sistema di riferimento k negli istanti t in cui si ha

$$\mathbf{q}(t) = (0, 0, 0),$$

ovvero

$$\cos \omega_0 t (1 + 2 \sin \omega_1 t) = \sin \omega_0 t (1 + 2 \sin \omega_1 t) = 0.$$

Entrambe le equazioni sono soddisfatte se

$$\sin \omega_1 t = -\frac{1}{2}$$

ovvero se

$$\omega_1 t = -\frac{\pi}{6} + 2k_1\pi, \quad k_1 \in \mathbb{N}, \quad \text{oppure} \quad \omega_1 t = \frac{\pi}{6} - \pi + 2k_2\pi, \quad k_2 \in \mathbb{N},$$

dove si è tenuto conto che si sta considerando il moto per $t \geq 0$. Ne segue che il punto P attraversa infinite volte il centro della circonferenza.

[L'equazione $\cos \omega_0 t (1 + 2 \sin \omega_1 t) = 0$ è soddisfatta anche se

$$\omega_0 t = (\pi/2) + (k_3 - 1)\pi, \quad k_3 \in \mathbb{N},$$

mentre l'equazione $\sin \omega_0 t (1 + 2 \sin \omega_1 t) = 0$ è soddisfatta anche se

$$\omega_0 t = k_4\pi, \quad k_4 \in \mathbb{N}.$$

Se da una parte si ha sempre $\mathbf{q}(t) = (0, 0, 0)$ per t tale che

$$t = \frac{1}{\omega_1} \left(-\frac{\pi}{6} + 2k\pi \right) \quad \text{oppure} \quad t = \frac{1}{\omega_1} \left(\frac{\pi}{6} - \pi + 2k\pi \right) \quad (*)$$

per qualche $k \in \mathbb{N}$, dall'altra si trova $\mathbf{q}(t) = (0, 0, 0)$ anche se ω_0 e ω_1 sono tali che una delle seguenti identità

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega_0} \left(\frac{\pi}{2} + (k-1)\pi \right) &= \frac{1}{\omega_1} \left(-\frac{\pi}{6} + 2k'\pi \right), \\ \frac{1}{\omega_0} \left(\frac{\pi}{2} + (k-1)\pi \right) &= \frac{1}{\omega_1} \left(\frac{\pi}{6} - \pi + 2k'\pi \right), \\ \frac{1}{\omega_0} (k\pi) &= \frac{1}{\omega_1} \left(-\frac{\pi}{6} + 2k'\pi \right), \\ \frac{1}{\omega_0} (k\pi) &= \frac{1}{\omega_1} \left(\frac{\pi}{6} - \pi + 2k'\pi \right), \end{aligned}$$

è soddisfatta per qualche $k, k' \in \mathbb{N}$. Le quattro relazioni sopra si possono riscrivere

$$\begin{aligned} \frac{\omega_1}{\omega_0} &= \frac{12k' - 1}{6k - 3}, \\ \frac{\omega_1}{\omega_0} &= \frac{12k' - 5}{6k - 3}, \\ \frac{\omega_1}{\omega_0} &= \frac{12k' - 1}{6k}, \\ \frac{\omega_1}{\omega_0} &= \frac{12k' - 5}{6k}, \end{aligned}$$

In conclusione, se ω_0 e ω_1 sono commensurabili e il loro rapporto soddisfa una delle relazioni sopra riportate per qualche $k, k' \in \mathbb{N}$, allora, oltre agli istanti dati da (*), esiste un altro istante t , in cui la traiettoria passa per il centro della circonferenza.]

ESERCIZIO 3. Le coordinate del punto P sono

$$P = (x, y) = (x, -x),$$

mentre le coordinate punto di contatto A del disco con la guida $y = x$ e del suo centro di massa C sono, rispettivamente,

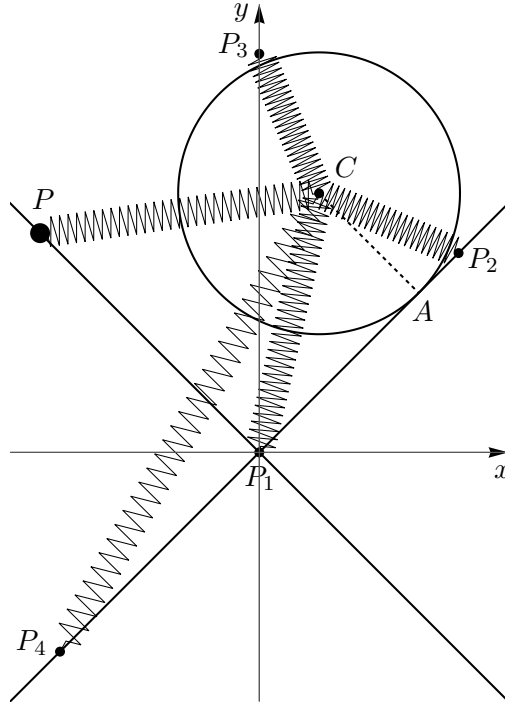
$$A = (x_A, y_A) = (x_0, x_0), \quad C = (x_C, y_C) = (x_0 - 1, x_0 + 1),$$

dove si è tenuto conto che il segmento AC che collega il punto A al centro C del disco ha lunghezza $R = \sqrt{2}$ e forma un angolo $\pi/2$ con la guida e quindi un angolo $\theta = (\pi/2) + (\pi/4) = 4\pi/4$ con l'asse x , così che si ha

$$x_C = x_A + R \cos(3\pi/4) = x_0 + \sqrt{2} \cos(3\pi/4) = x_0 + \sqrt{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = x_0 - 1,$$

$$y_C = y_A + R \sin(3\pi/4) = x_0 + \sqrt{2} \sin(3\pi/4) = x_0 + \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = x_0 + 1.$$

Il sistema è rappresentato nella figura seguente.



In assenza dei vincoli (oltre a quello che il moto avvenga nel piano xy), l'energia cinetica è

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{M}{2} (\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2) + \frac{M}{2} \dot{\theta}^2,$$

dove si è applicato il teorema di König e si è tenuto conto che il momento d'inerzia di un disco omogeneo di raggio R e massa M , per rotazioni intorno a un asse passante per il suo centro di massa e ortogonale all'asse di simmetria, è $I = MR^2/2 = M$, mentre l'energia potenziale è

$$V = mgy + Mgy_C + \frac{k}{2} \left(x_C^2 + y_C^2 + (x_C - 2)^2 + (y_C - 2)^2 + x_C^2 + (y_C - 4)^2 + (x_C + 2)^2 + (y_C + 2)^2 + (x_C - x)^2 + (y_C - y)^2 \right).$$

Tenuto conto dei vincoli si ottiene

$$T_V = m\dot{x}^2 + M\dot{x}_0^2 + \frac{1}{2}M\dot{x}_0^2 = m\dot{x}^2 + \frac{3}{2}M\dot{x}_0^2,$$

dove si è imposta la condizione di rotolamento senza strisciamento $|v| = R|\dot{\theta}|$, con

$$v = (\dot{x}_C, \dot{y}_C) = (\dot{x}_0, \dot{x}_0) \implies |v| = \sqrt{\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2} = \sqrt{2\dot{x}_0^2} \implies \sqrt{2\dot{x}_0^2} = \sqrt{2}|\dot{\theta}| \implies |\dot{x}_0| = |\dot{\theta}|,$$

e

$$\begin{aligned} V_V &= -mgx + Mg(x_0 + 1) + \frac{k}{2} \left((x_0 - 1)^2 + (x_0 + 1)^2 + (x_0 - 3)^2 + (x_0 - 1)^2 \right. \\ &\quad \left. + (x_0 - 1)^2 + (x_0 - 3)^2 + (x_0 + 1)^2 + (x_0 + 3)^2 + (x_0 - 1 - x)^2 + (x_0 + 1 + x)^2 \right) \\ &= -mgx + Mg x_0 + k(5x_0^2 - 4x_0 + x^2 + 2x) + \dots, \end{aligned}$$

dove si sono trascurati i termini costanti.

Quindi la lagrangiana vincolata è

$$\mathcal{L} = T_V - V_V = m\dot{x}^2 + \frac{3}{2}M\dot{x}_0^2 + mgx - Mg x_0 - k(5x_0^2 - 4x_0 + x^2 + 2x),$$

e le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange sono date da

$$2m\ddot{x} = -\frac{\partial V_V}{\partial x}, \quad 3m\ddot{x}_0 = -\frac{\partial V_V}{\partial x_0},$$

dove

$$\frac{\partial V_V}{\partial x} = -mg + k(2x + 1), \quad \frac{\partial V_V}{\partial x_0} = Mg + k(10x_0 - 4).$$

Le configurazioni di equilibrio del sistema si ottengono richiedendo che si abbia

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial x_0} = 0,$$

ovvero

$$x = \frac{\alpha m - 1}{2}, \quad x_0 = \frac{4 - \alpha M}{10}$$

dove si è posto

$$\alpha = \frac{g}{k}.$$

Si ha quindi un'unica configurazione di equilibrio

$$Q = ((\alpha m - 1)/2, (4 - \alpha M)/10).$$

Per studiarne la stabilità si calcola matrice hessiana. Poichè si ha

$$\frac{\partial^2 V_V}{\partial x^2} = 2k, \quad \frac{\partial^2 V_V}{\partial x \partial x_0} = 0, \quad \frac{\partial^2 V_V}{\partial x_0^2} = 10k,$$

la matrice hessiana è data, in corrispondenza della configurazione Q , da

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} 2k & 0 \\ 0 & 10k \end{pmatrix},$$

da cui si vede immediatamente che Q è un punto di minimo per V_V e quindi, per il teorema di Dirichlet-Lagrange, una configurazione di equilibrio stabile per il sistema.

[Per calcolare la forza vincolare R che agisce sul punto P_1 , riprendiamo l'espressione dell'energia potenziale non vincolata V e calcoliamo le due componenti della forza attiva che agisce su P ,

$$f_x^{(1)} = -\frac{\partial V}{\partial x} = -k(x - x_C), \quad f_y^{(1)} = -\frac{\partial V}{\partial y} = -mg - k(y - y_C),$$

che, in corrispondenza del vincolo, diventano

$$f_x^{(1)} = \frac{\partial V}{\partial x_1} = -k(x - x_0 + 1), \quad f_y^{(1)} = \frac{\partial V}{\partial y_1} = -mg - k(-x - x_0 - 1).$$

La forza vincolare R ha componenti $R_x^{(1)}$ e $R_y^{(1)}$ tali che

$$m\ddot{x} = f_x^{(1)} + R_x^{(1)}, \quad m\ddot{y} = f_y^{(1)} + R_y^{(1)},$$

dove $m\ddot{x}$ si ricava dall'equazione di Eulero-Lagrange

$$m\ddot{x} = \frac{1}{2}(mg - k(2x - 1)),$$

mentre si ha $m\ddot{y} = -m\ddot{x}$ per via del vincolo $y = -x$. Si trova quindi che

$$R_x^{(1)} = m\ddot{x} - f_x^{(1)} = \frac{1}{2}(mg - k(2x - 1)) + k(x - x_0 + 1) = \frac{1}{2}(mg + k(3 - 2x_0)),$$

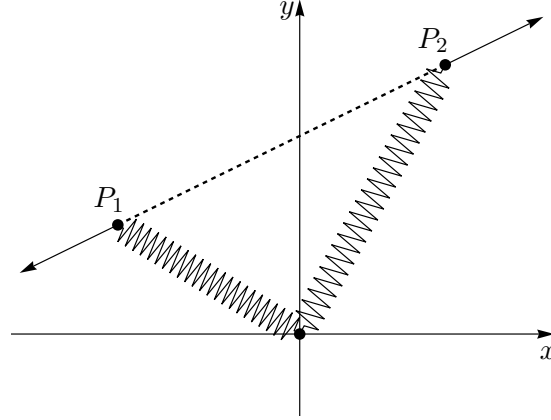
$$R_y^{(1)} = m\ddot{y} - f_y^{(1)} = -\frac{1}{2}(mg - k(2x - 1)) + mg + k(-x - x_0 - 1) = \frac{1}{2}(mg - k(3 + 2x_0)),$$

sono le due componenti della forza vincolare che agisce sul punto P .]

ESERCIZIO 4. Le coordinate dei due punti P_1 e P_2 sono

$$P_1 = (x_1, y_1), \quad P_2 = (x_2, y_2).$$

Il sistema è rappresentato nella figura seguente.



L'energia cinetica è

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2),$$

mentre l'energia potenziale è

$$V = \frac{k}{2} (x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2) + \frac{\alpha}{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Quindi la lagrangiana è

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{m}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) - \frac{k}{2} (x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2) - \frac{\alpha}{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

e le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange sono date da

$$m\ddot{x}_1 = -\frac{\partial V}{\partial x_1}, \quad m\ddot{x}_2 = -\frac{\partial V}{\partial x_2}, \quad m\ddot{y}_1 = -\frac{\partial V}{\partial y_1}, \quad m\ddot{y}_2 = -\frac{\partial V}{\partial y_2},$$

dove

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x_1} &= kx_1 - \frac{2\alpha(x_1 - x_2)}{((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2)^2}, \\ \frac{\partial V}{\partial x_2} &= kx_2 + \frac{2\alpha(x_1 - x_2)}{((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2)^2}, \\ \frac{\partial V}{\partial y_1} &= ky_1 - \frac{2\alpha(y_1 - y_2)}{((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2)^2}, \\ \frac{\partial V}{\partial y_2} &= ky_2 + \frac{2\alpha(y_1 - y_2)}{((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2)^2}. \end{aligned}$$

Se (x_0, y_0) denota il centro di massa del sistema, ovvero

$$x_0 = \frac{mx_1 + mx_2}{2m} = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_0 = \frac{my_1 + my_2}{2m} = \frac{y_1 + y_2}{2},$$

si può scrivere

$$x_1 = x_0 + \frac{\rho}{2} \cos \theta, \quad y_1 = x_0 + \frac{\rho}{2} \sin \theta, \quad x_2 = y_0 - \frac{\rho}{2} \cos \theta, \quad y_2 = y_0 - \frac{\rho}{2} \sin \theta,$$

dove ρ è la distanza tra i due punti e θ è l'angolo che la retta che passa per i due punti P_1 e P_2 forma con l'asse x . In termini delle coordinate (x_0, y_0, ρ, θ) , l'energia cinetica e l'energia potenziale diventano

$$\begin{aligned} T &= \frac{m}{2} \left(\left(\dot{x}_0 + \frac{\dot{\rho}}{2} \cos \theta - \frac{\rho}{2} \sin \theta \dot{\theta} \right)^2 + \left(\dot{x}_0 - \frac{\dot{\rho}}{2} \cos \theta + \frac{\rho}{2} \sin \theta \dot{\theta} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\dot{y}_0 + \frac{\dot{\rho}}{2} \sin \theta + \frac{\rho}{2} \cos \theta \dot{\theta} \right)^2 + \left(\dot{y}_0 - \frac{\dot{\rho}}{2} \sin \theta - \frac{\rho}{2} \cos \theta \dot{\theta} \right)^2 \right) \\ &= \frac{m}{2} \left(2\dot{x}_0^2 + 2\dot{y}_0^2 + \frac{\dot{\rho}^2}{2} + \frac{\rho^2}{2} \dot{\theta}^2 \right), \\ V &= \frac{k}{2} \left(\left(x_0 + \frac{\rho}{2} \cos \theta \right)^2 + \left(x_0 - \frac{\rho}{2} \cos \theta \right)^2 + \left(y_0 + \frac{\rho}{2} \sin \theta \right)^2 + \left(y_0 - \frac{\rho}{2} \sin \theta \right)^2 \right) + \frac{\alpha}{\rho^2} \\ &= \frac{k}{2} \left(2x_0^2 + 2y_0^2 + \frac{\rho^2}{2} \right) + \frac{\alpha}{\rho^2}. \end{aligned}$$

La lagrangiana diventa quindi

$$\mathcal{L} = T - V = m \left(\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \frac{\dot{\rho}^2}{4} + \frac{\rho^2}{4} \dot{\theta}^2 \right) - k \left(x_0^2 + y_0^2 + \frac{\rho^2}{4} \right) - \frac{\alpha}{\rho^2}$$

e le equazioni di Eulero-Lagrange sono date da

$$2m\ddot{x}_0 = -\frac{\partial V}{\partial x_0}, \quad 2m\ddot{y}_0 = -\frac{\partial V}{\partial y_0}, \quad \frac{m}{2}\ddot{\rho} = -\frac{\partial V}{\partial \rho} + \frac{m}{2}\rho\ddot{\theta}^2, \quad \frac{m}{2}(\rho^2\ddot{\theta} + 2\rho\dot{\rho}\dot{\theta}) = -\frac{\partial V}{\partial \theta},$$

dove

$$\frac{\partial V}{\partial x_0} = 2kx_0, \quad \frac{\partial V}{\partial y_0} = 2ky_0, \quad \frac{\partial V}{\partial \rho} = \frac{k}{2}\rho - \frac{2\alpha}{\rho^3}, \quad \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0. \quad (*)$$

Si vede in particolare che la coordinata θ è una variabile ciclica.

Dalle equazioni di Eulero-Lagrange, in particolare dall'equazione

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0,$$

si deduce che

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = \frac{m}{2} \rho^2 \dot{\theta}$$

è un momento conservato. La lagrangiana ridotta è definita come

$$\mathcal{L}_R = \mathcal{L} - p\dot{\theta},$$

dove $\dot{\theta}$ si esprime in funzione delle altre coordinate invertendo la relazione che definisce p :

$$\dot{\theta} = \frac{2p}{m\rho^2}.$$

Si trova quindi

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_R &= m \left(\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \frac{\dot{\rho}^2}{4} + \frac{\rho^2}{4} \left(\frac{2p}{m\rho^2} \right)^2 \right) - k \left(x_0^2 + y_0^2 + \frac{\rho^2}{4} \right) - \frac{\alpha}{\rho^2} - p \frac{2p}{m\rho^2} \\ &= m \left(\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \frac{\dot{\rho}^2}{4} + \frac{\rho^2}{4} \right) - k \left(x_0^2 + y_0^2 + \frac{\rho^2}{4} \right) - \frac{\alpha}{\rho^2} - \frac{p^2}{m\rho^2}. \end{aligned}$$

Possiamo quindi scrivere

$$\mathcal{L}_R = m\left(\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \frac{\dot{\rho}^2}{4}\right) - V_{\text{eff}}, \quad V_{\text{eff}} = k\left(x_0^2 + y_0^2 + \frac{\rho^2}{4}\right) + \frac{\alpha}{\rho^2} + \frac{p^2}{m\rho^2}.$$

Le configurazioni di equilibrio del sistema ridotto si ottengono richiedendo che si abbia

$$\frac{\partial V_{\text{eff}}}{\partial x_0} = \frac{\partial V_{\text{eff}}}{\partial y_0} = \frac{\partial V_{\text{eff}}}{\partial \rho} = 0,$$

ovvero

$$2kx_0 = 0, \quad 2ky_0 = 0, \quad \frac{k}{2}\rho - \frac{2\beta}{\rho^3} = 0,$$

con

$$\beta = \alpha + \frac{p^2}{m}.$$

Si noti che, poiché α è positivo, si ha $\beta > 0$. Le tre equazioni implicano

$$x_0 = y_0 = 0, \quad \rho = \rho_0 = \sqrt[4]{\frac{4\beta}{k}}.$$

Si ha quindi una sola configurazione di equilibrio $Q = (0, 0, \rho_0)$. Per discuterne la stabilità si calcolare la matrice hessiana $\mathcal{H}$, tenendo conto che

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V_V}{\partial x_0^2} &= 2k, & \frac{\partial^2 V_V}{\partial x_0 \partial y_0} &= -0, & \frac{\partial^2 V_V}{\partial x_0 \partial \rho} &= 0, \\ \frac{\partial^2 V_V}{\partial y_0 \partial x_0} &= 0, & \frac{\partial^2 V_V}{\partial y_0^2} &= 2k, & \frac{\partial^2 V_V}{\partial y_0 \partial \rho} &= 0, \\ \frac{\partial^2 V_V}{\partial \rho \partial x_0} &= 0, & \frac{\partial^2 V_V}{\partial \rho \partial y_0} &= 0, & \frac{\partial^2 V_V}{\partial \rho^2} &= \frac{k}{2} + \frac{6\beta}{\rho^4}. \end{aligned}$$

In corrispondenza della configurazione di equilibrio trovata, la matrice hessiana $\mathcal{H}$ è data da

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} 2k & 0 & 0 \\ 0 & 2k & 0 \\ 0 & 0 & b_0 \end{pmatrix},$$

dove

$$b_0 = \frac{k}{2} + \frac{6\beta}{\rho_0^4}.$$

La matrice hessiana è diagonale e i suoi elementi diagonali sono tutti positivi. Quindi la configurazione di equilibrio Q , rappresentando un punto di minimo isolato dell'energia potenziale, per il teorema di Lagrange-Dirichlet è una configurazione di equilibrio stabile.

[Le configurazioni di equilibrio del sistema originale si trovano cercando i punti critici dell'energia potenziale, ovvero imponendo che si annullino le derivate in (*). Si trova quindi

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 0, \quad \rho = \rho_1 = \sqrt[4]{4\alpha/k},$$

mentre θ resta arbitrario. Si hanno quindi infiniti punti di equilibrio: più precisamente, c'è una curva di punti di equilibrio, individuata dalle condizioni $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $\rho = \rho_1$. Per discuterne la stabilità, basta osservare che, scegliendo una condizione iniziale della forma

$$(x_0(0), y_0(0), \rho(0)), \theta(0), \dot{x}_0(0), \dot{y}_0(0), \dot{\rho}(0), \dot{\theta}(0)) = (0, 0, \rho_1, \theta, 0, 0, 0, \varepsilon),$$

con θ arbitrario e $\varepsilon > 0$, la soluzione delle equazioni di Eulero-Lagrange è data da

$$(x_0(t), y_0(t), \rho(t)), \theta(t)) = (0, 0, \rho_1, \theta + \varepsilon t).$$

Questo si verifica esplicitamente procedendo nel modo seguente:

- Le equazioni di Eulero-Lagrange per le coordinate x_0 e y_0 non dipendono dalle altre variabili: di fatto ciascuna di esse descrive un sistema unidimensionale e quindi il punto di equilibrio $(x_0, 0)$ costituisce una soluzione per la prima, mentre il punto di equilibrio $(y_0, 0)$ costituisce una soluzione per la seconda.
- Per quanto riguarda le coordinate ρ e θ , in corrispondenza del valore $\rho = \rho_1$ e indipendentemente dal valore di θ , si annullano le derivate dell'energia potenziale. Se esiste quindi una soluzione in cui $\rho(t) = \rho_1$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ (e quindi $\dot{\theta}(t) = \ddot{\theta}(t) = 0$), la funzione $\theta(t)$ deve essere tale che

$$0 = \frac{m}{2}\rho_1\ddot{\theta}^2, \quad \frac{m}{2}\rho_1^2\ddot{\theta} = 0.$$

ovvero $\dot{\theta}(t)$ deve essere costante. Questo è verificato se si ha $\theta(t) = \theta + \varepsilon t$.

Dal ragionamento sopra segue le configurazioni di equilibrio

$$(x_0, y_0, \rho, \theta) = (0, 0, \rho_1, \theta)$$

sono instabili, perché esistono traiettorie che se ne allontanano (linearmente) nel tempo.]

ESERCIZIO 5. Il dominio della trasformazione di coordinate è

$$\mathcal{D} = \{(q_1, q_2, p_1, p_2) \in \mathbb{R}^4 : p_2 - 2q_1^2 q_2 > 0, 1 - q_1 p_1 + 2q_1^2 q_2^2 \neq 0\},$$

dove il segno stretto nella disuguaglianza $p_2 - 2q_1^2 q_2 > 0$ serve per assicurare che l'applicazione $(q_1, q_2, p_1, p_2) \mapsto (Q_1, Q_2, P_1, P_2)$ sia differenziabile in $\mathcal{D}$.

Per trovare una funzione generatrice di seconda specie $F(q, P)$, procediamo come segue. La prima equazione si può riscrivere

$$Q_1^2 = p_2 - 2q_1^2 q_2 \implies p_2 = Q_1^2 + 2q_1^2 q_2,$$

così che, richiedendo che si abbia $p_2 = \partial F / \partial q_2$, si ottiene

$$F(q_1, q_2, Q_1, Q_2) = \int (Q_1^2 + 2q_1^2 q_2) dq_2 = q_2 Q_1^2 + q_1^2 q_2^2 + c_1(q_1, Q_1, Q_2)$$

dove $c_1(q_1, Q_1, Q_2)$ è al momento una funzione arbitraria delle variabili q_1, Q_1, Q_2 . Riscrivendo la seconda nella forma

$$Q_2(1 - q_1 p_1 + 2q_1^2 q_2^2) = p_1 - 2q_1 q_2^2$$

e isolando i termini che contengono p_1 , si trova

$$Q_2(1 + 2q_1^2 q_2^2) + 2q_1 q_2^2 = p_1(1 + q_1 Q_2)$$

da cui si ricava

$$p_1 = \frac{Q_2 + 2q_1^2 q_2^2 Q_2 + 2q_1 q_2^2}{1 + q_1 Q_2} = \frac{Q_2 + 2q_1 q_2^2 (q_1 Q_2 + 1)}{1 + q_1 Q_2} = \frac{Q_2}{1 + q_1 Q_2} + 2q_1 q_2^2, \quad (*)$$

Richiedendo che si abbia $p_1 = \partial F / \partial q_1$, si ottiene

$$F(q_1, q_2, Q_1, Q_2) = \int \left(\frac{Q_2}{1 + q_1 Q_2} + 2q_1 q_2^2 \right) dq_1 = \log|1 + q_1 Q_2| + q_1^2 q_2^2 + c_2(q_2, Q_1, Q_2),$$

dove $c_2(q_2, Q_1, Q_2)$ è una funzione arbitraria delle variabili q_2, Q_1, Q_2 . La terza equazione si può riscrivere

$$P_1 = -2q_2 Q_1,$$

così che, scrivendo $P_1 = -\partial F / \partial Q_1$ e integrando rispetto a Q_1 , si ottiene

$$F(q_1, q_2, Q_1, Q_2) = \int 2q_2 Q_1 dQ_1 = q_2 Q_1^2 + c_3(q_1, q_2, Q_2),$$

dove $c_3(q_1, q_2, Q_2)$ è una funzione arbitraria delle variabili q_1, q_2, Q_2 . Infine, utilizzando la (*) nella quarta, si trova

$$\begin{aligned} P_2 &= -q_1(1 - q_1 p_1 + 2q_1^2 q_2^2) \\ &= -q_1 \left(1 - q_1 \left(\frac{Q_2}{1 + q_1 Q_2} + 2q_1 q_2^2 \right) + 2q_1^2 q_2^2 \right) \\ &= -q_1 \left(1 - \frac{q_1 Q_2}{1 + q_1 Q_2} \right) - 2q_1^2 q_2^2 + 2q_1^2 q_2^2 \\ &= -q_1 \left(\frac{1 + q_1 Q_2 - q_1 Q_2}{1 + q_1 Q_2} \right) \\ &= -\frac{q_1}{1 + q_1 Q_2}, \end{aligned}$$

così che, scrivendo $P_2 = -\partial F / \partial Q_2$ e integrando rispetto a Q_2 , si ottiene

$$F(q_1, q_2, Q_1, Q_2) = \int 2q_2 Q_1 \frac{q_1}{1 + q_1 Q_2} dQ_2 = \log|1 + q_1 Q_2| + c_4(q_1, q_2, Q_1),$$

dove $c_4(q_1, q_2, Q_1)$ è una funzione arbitraria delle variabili q_1, q_2, Q_1 . In conclusione, scegliendo

$$\begin{aligned} c_1(q_1, Q_1, Q_2) &= \log|1 + q_1 Q_2|, \\ c_2(q_2, Q_1, Q_2) &= q_2 Q_1^2, \\ c_3(q_1, q_2, Q_2) &= q_1^2 q_2^2 + \log(1 + q_1 Q_2), \\ c_4(q_1, q_2, Q_1) &= q_1^2 q_2^2 + q_2 Q_1^2, \end{aligned}$$

si trova la funzione generatrice

$$F(q_1, q_2, Q_1, Q_2) = q_1^2 q_2^2 + q_2 Q_1^2 + \log|1 + q_1 Q_2|.$$

La matrice A di elementi $\partial^2 F / \partial q_i \partial Q_j$ è data da

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{1 + q_1 Q_2} - \frac{q_1 Q_2}{(1 + q_1 Q_2)^2} \\ 2Q_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{(1 + q_1 Q_2)^2} \\ 2Q_1 & 0 \end{pmatrix},$$

così che A è ben definita e si ha $\det A \neq 0$ se e solo se $1 + q_1 Q_2 \neq 0$ e $Q_1 \neq 0$. Nel dominio $\mathcal{D}$ si ha $p_2 - 2q_1^2 q_2 > 0$ e quindi $Q_1 = \sqrt{p_2 - 2q_1^2 q_2} > 0$. Inoltre si ha

$$\begin{aligned} 1 + q_1 Q_2 &= 1 + q_1 \frac{p_1 - 2q_1 q_2^2}{1 - q_1 p_1 + 2q_1^2 q_2^2} \\ &= \frac{1 - q_1 p_1 + 2q_1^2 q_2^2 + q_1 p_1 - 2q_1^2 q_2^2}{1 - q_1 p_1 + 2q_1^2 q_2^2} \\ &= \frac{1}{1 - q_1 p_1 + 2q_1^2 q_2^2}, \end{aligned}$$

che è ben definita in $\mathcal{D}$.

[Per calcolare le parentesi di Poisson, può essere conveniente definire

$$A = \sqrt{p_2 - 2q_1^2 q_2}, \quad B = p_1 - 2q_1 q_2^2,$$

in modo da scrivere

$$Q_1 = A, \quad Q_2 = \frac{B}{1 - q_1 B}, \quad P_1 = -2q_2 A, \quad P_2 = -q_1(1 - q_1 B).$$

Inoltre si tenga conto che, se $x \in \{q_1, q_2, p_1\}$, si ha

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{B}{1 - q_1 B} \right) = \begin{cases} \frac{1}{(1 - q_1 B)^2} \frac{\partial B}{\partial x}, & x = q_2, p_2, \\ \frac{1}{(1 - q_1 B)^2} \left(\frac{\partial B}{\partial x} + B^2 \right), & x = q_1, \end{cases}$$

dove

$$\frac{\partial B}{\partial q_1} = -2q_2^2, \quad \frac{\partial B}{\partial q_2} = -4q_1 q_2, \quad \frac{\partial B}{\partial p_1} = 1,$$

mentre

$$\frac{\partial A}{\partial q_1} = -\frac{2q_1 q_2}{A}, \quad \frac{\partial A}{\partial q_2} = -\frac{q_1^2}{A}, \quad \frac{\partial A}{\partial p_2} = \frac{1}{2A}.$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned}
\{Q_1, Q_2\} &= \frac{\partial Q_1}{\partial q_1} \frac{\partial Q_2}{\partial p_1} + \frac{\partial Q_1}{\partial q_2} \frac{\partial Q_2}{\partial p_2} - \frac{\partial Q_1}{\partial p_1} \frac{\partial Q_2}{\partial q_1} - \frac{\partial Q_1}{\partial p_2} \frac{\partial Q_2}{\partial q_2} \\
&= \frac{1}{(1 - q_1 B)^2} \left(\frac{\partial A}{\partial q_1} \frac{\partial B}{\partial p_1} + 0 - 0 - \frac{\partial A}{\partial p_2} \frac{\partial B}{\partial q_2} \right) \\
&= \frac{1}{A(1 - q_1 B)^2} \left(-2q_1 q_2 + 0 - 0 - \frac{1}{2}(-4q_1 q_2) \right) = 0, \\
\{Q_1, P_1\} &= \frac{\partial Q_1}{\partial q_1} \frac{\partial P_1}{\partial p_1} + \frac{\partial Q_1}{\partial q_2} \frac{\partial P_1}{\partial p_2} - \frac{\partial Q_1}{\partial p_1} \frac{\partial P_1}{\partial q_1} - \frac{\partial Q_1}{\partial p_2} \frac{\partial P_1}{\partial q_2} \\
&= \left(0 + \frac{\partial A}{\partial q_2}(-2q_2) \right) \frac{\partial A}{\partial p_2} + 0 - \frac{\partial A}{\partial p_2} \left(-2A - 2q_2 \frac{\partial A}{\partial q_2} \right) \\
&= 2A \frac{\partial A}{\partial p_2} = \frac{2A}{2A} = 1, \\
\{Q_1, P_2\} &= \frac{\partial Q_1}{\partial q_1} \frac{\partial P_2}{\partial p_1} + \frac{\partial Q_1}{\partial q_2} \frac{\partial P_2}{\partial p_2} - \frac{\partial Q_1}{\partial p_1} \frac{\partial P_2}{\partial q_1} - \frac{\partial Q_1}{\partial p_2} \frac{\partial P_2}{\partial q_2} \\
&= \left(\frac{\partial A}{\partial q_1} (q_1^2) \frac{\partial B}{\partial p_1} + 0 - 0 - \frac{\partial A}{\partial p_2} (q_1^2) \frac{\partial B}{\partial q_2} \right) \\
&= \frac{q_1^2}{A} \left((-2q_1 q_2) - \frac{1}{2}(-4q_1 q_2) \right) = 0, \\
\{Q_2, P_1\} &= \frac{\partial Q_2}{\partial q_1} \frac{\partial P_1}{\partial p_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial q_2} \frac{\partial P_1}{\partial p_2} - \frac{\partial Q_2}{\partial p_1} \frac{\partial P_1}{\partial q_1} - \frac{\partial Q_2}{\partial p_2} \frac{\partial P_1}{\partial q_2} \\
&= \frac{1}{(1 - q_1 B)^2} \left(0 + \frac{\partial B}{\partial q_2}(-2q_2) \frac{\partial A}{\partial p_2} - \frac{\partial B}{\partial p_1}(-2q_2) \frac{\partial A}{\partial q_1} - 0 \right) \\
&= \frac{1}{A(1 - q_1 B)^2} \left((-4q_1 q_2)(-2q_2) \frac{1}{2} - (-2q_2)(-2q_1 q_2) \right) = 0 \\
\{Q_2, P_2\} &= \frac{\partial Q_2}{\partial q_1} \frac{\partial P_2}{\partial p_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial q_2} \frac{\partial P_2}{\partial p_2} - \frac{\partial Q_2}{\partial p_1} \frac{\partial P_2}{\partial q_1} - \frac{\partial Q_2}{\partial p_2} \frac{\partial P_2}{\partial q_2} \\
&= \frac{1}{(1 - q_1 B)^2} \left(\left(\frac{\partial B}{\partial q_1} + B^2 \right) (q_1^2) \frac{\partial B}{\partial p_1} + 0 - \frac{\partial B}{\partial p_1} \left(-1 + 2q_1 B + q_1^2 \frac{\partial B}{\partial q_1} \right) - 0 \right) \\
&= \frac{1}{(1 - q_1 B)^2} \left(q_1^2 B^2 - (-1 + 2q_1 B) \right) = \frac{1}{(1 - q_1 B)^2} \left(q_1^2 B^2 + 1 - 2q_1 B \right) = 1 \\
\{P_1, P_2\} &= \frac{\partial P_1}{\partial q_1} \frac{\partial P_2}{\partial p_1} + \frac{\partial P_1}{\partial q_2} \frac{\partial P_2}{\partial p_2} - \frac{\partial P_1}{\partial p_1} \frac{\partial P_2}{\partial q_1} - \frac{\partial P_1}{\partial p_2} \frac{\partial P_2}{\partial q_2} \\
&= \left((-2q_2) \frac{\partial A}{\partial q_1} (q_1^2) \frac{\partial B}{\partial p_1} + 0 - 0 - (-2q_2) \frac{\partial A}{\partial p_2} (q_1^2) \frac{\partial B}{\partial q_2} \right) \\
&= \frac{-2q_2 q_1^2}{A} \left((-2q_1 q_2) - \frac{1}{2}(-4q_1 q_2) \right) = 0.
\end{aligned}$$

Le altre relazioni sono banalmente soddisfatte essendo le parentesi di Poisson antisimmetriche.]