

FM210 - Meccanica Analitica

Anno Accademico 2024/2025

Quinto appello (02-02-2026)

ESERCIZIO 1. [6+2] Si consideri il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa $m = 1$ sottoposto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = \frac{x^2 + 1}{|x^2 - 1|} + x^2.$$

1. Si studi il grafico dell'energia potenziale $V(x)$.
2. Si determinino i punti di equilibrio del sistema dinamico associato e se ne discuta la stabilità.
3. Si discuta qualitativamente il moto del sistema nel piano delle fasi $(x, \dot{x})$.
4. Si dimostri che tutte le traiettorie sono limitate.
5. Si dimostri che la traiettoria con dato iniziale $(x(0), \dot{x}(0)) = (0, 4)$ è periodica.
6. [Si scriva il periodo della traiettoria al punto precedente come integrale definito.]

ESERCIZIO 2. [6+2] Un sistema di riferimento mobile $K = O'\xi\eta\zeta$ si muove rispetto a un sistema di riferimento fisso $k = Oxyz$ nel modo seguente. L'origine O' si muove lungo la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1$ con velocità angolare costante $\omega_0 > 0$ e all'istante iniziale si trova nel punto $P = (1, 0, 0)$; l'asse ξ si mantiene ortogonale alla circonferenza ed è rivolto verso l'esterno; l'asse ζ ha la direzione e il verso dell'asse z . Un punto materiale P si muove nel sistema di riferimento K con legge oraria

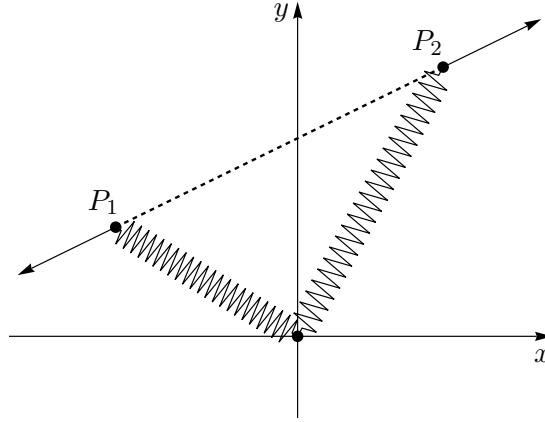
$$\xi(t) = 2 \sin \omega_1 t, \quad \eta(t) = \zeta(t) = 0, \quad \omega_1 > 0.$$

1. Si descriva il moto di P nel sistema di riferimento fisso k come composizione di una rotazione B e di una traslazione C .
2. Si determinino la velocità assoluta, la velocità relativa e le componenti rotatoria e traslatoria della velocità di trascinamento di P .
3. Si mostri che il punto P attraversa infinite volte il centro della circonferenza.
4. [Si determini in quali istanti P attraversa il centro della circonferenza.]

ESERCIZIO 3. [6+2] Un sistema meccanico è costituito da un disco rigido D di massa M e raggio $R = \sqrt{2}$ e da un punto materiale P di massa m che si muovono nel piano verticale xy nel modo seguente: il disco rotola senza strisciare lungo la guida $y = x$; il punto scorre lungo la guida $y = -x$; cinque molle di lunghezza a riposo trascurabile e di costante elastica k collegano il centro C del disco al punto P e ai punti fissi $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (2, 2)$, $P_3 = (0, 4)$ e $P_4 = (-2, -2)$; sul sistema agisce la forza di gravità, diretta nel verso discendente dell'asse y (si indichi con g l'accelerazione di gravità).

1. Si scrivano la lagrangiana del sistema.
 2. Si scrivano le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.
 3. Si determinino le configurazioni di equilibrio e se ne discuta la stabilità.
 4. [Si calcoli la forza vincolare che agisce sul punto P .]
-

Esercizio 4. [6+2] Un sistema meccanico è costituito da due punti materiali, entrambi di massa m , che si muovono in un piano orizzontale nel modo seguente (cfr. la figura): due molle di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla connettono i due punti a un punto fisso, che si può identificare con l'origine del piano; i due punti inoltre interagiscono tra loro tramite una forza repulsiva, che corrisponde a un'energia potenziale inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza (si indichi con α la costante di proporzionalità).



1. Si scrivano la lagrangiana del sistema e le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.
2. Si dimostri che esiste un sistema di coordinate in cui esiste una variabile ciclica. (Può essere conveniente utilizzare come coordinate le coordinate del centro di massa, la distanza tra i due punti e l'angolo che la retta che passa per i due punti forma con una direzione prefissata.)
3. Si determini la lagrangiana ridotta utilizzando il metodo di Routh.
4. Si determinino le configurazioni di equilibrio relativo per il sistema descritto dalla lagrangiana ridotta e se ne discuta la stabilità.
5. [Si discuta la stabilità delle configurazioni di equilibrio per il sistema lagrangiano originale.]

Esercizio 5. [6+2] Si consideri la trasformazione di coordinate

$$\begin{cases} Q_1 = \sqrt{p_2 - 2q_1^2 q_2}, \\ Q_2 = \frac{p_1 - 2q_1 q_2^2}{1 - q_1 p_1 + 2q_1^2 q_2^2}, \\ P_1 = -2q_2 \sqrt{p_2 - 2q_1^2 q_2} \\ P_2 = -q_1 (1 - q_1 p_1 + 2q_1^2 q_2^2). \end{cases}$$

1. Si studi il dominio $\mathcal{D}$ della trasformazione.
 2. Si dimostri che la trasformazione è canonica trovandone una funzione generatrice di prima specie $F = F(q_1, q_2, Q_1, Q_2)$.
 3. Si verifichi che la funzione generatrice F trovata al punto precedente soddisfa la condizione che la matrice 2×2 di elementi $\partial^2 F / \partial q_i \partial Q_j$ è non singolare nel dominio $\mathcal{D}$.
 4. [Si verifichi esplicitamente che la trasformazione conserva le parentesi di Poisson fondamentali].
-