

# FM210 - Meccanica Analitica

Anno Accademico 2024/2025

Recupero della prima prova di esonero (23-06-2025)

---

ESERCIZIO 1. [6+2] Si consideri in  $\mathbb{R}^2$  la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Si verifichi che

$$A^k = \begin{pmatrix} 1 & k & a_k \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a_k = \sum_{i=1}^k i = \frac{k(k+1)}{2}, \quad k \geq 1.$$

2. Si usi il risultato al punto 1 per calcolare  $e^{At}$ , per  $t \in \mathbb{R}$ , e quindi risolvere il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y + z, \\ \dot{y} = y + z, \\ \dot{z} = z \end{cases}$$

in corrispondenza di un dato iniziale arbitrario  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  in  $\mathbb{R}^3$ .

3. Si trovi un insieme invariante per il sistema al punto 2.

4. [Si dimostri che la matrice

$$N = A - \mathbb{1}, \quad \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è nilpotente e si usi il risultato per ricalcolare  $e^{At}$ .]

---

ESERCIZIO 2. [6+2] Si consideri il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa  $m = 1$  sottoposto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = \frac{(x^2 - 1)^4(4 - x^2)}{x^2}.$$

1. Si studi il grafico dell'energia potenziale  $V(x)$ .

2. Si determinino i punti di equilibrio del sistema dinamico associato e se ne discuta la stabilità.

3. Si discuta qualitativamente il moto del sistema nel piano delle fasi  $(x, \dot{x})$ .

4. Si individuino i dati iniziali che generano traiettorie periodiche.

5. Si dimostri che esistono traiettorie asintotiche.

6. [Si discuta se il tempo di fuga di eventuali traiettorie illimitate sia finito o infinito.]

---

---

---

**ESERCIZIO 3.** [6+2] Si consideri il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa  $m = 1$  sottoposto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = \sqrt{1 - x^2 + x^4} - \sqrt{1 + x^2}.$$

1. Si determinino i punti di equilibrio del sistema dinamico associato e se ne discuta la stabilità.
2. Si studi il grafico dell'energia potenziale  $V(x)$ .
3. Si discuta qualitativamente il moto del sistema nel piano delle fasi  $(x, \dot{x})$ .
4. Si dimostri che tutte le traiettorie sono limitate.
5. Si dimostri che esistono traiettorie periodiche per valori arbitrariamente grandi dell'energia.
6. [Si discuta l'andamento del periodo delle traiettorie periodiche in funzione dell'energia  $E$  nel limite  $E \rightarrow \infty$ .]

---

---

**ESERCIZIO 4.** [6+2] Un punto materiale di massa  $\mu$  è soggetto a una forza centrale di energia potenziale

$$V(\rho) = \frac{1}{2}k\rho^2 - \frac{\alpha}{\rho}, \quad k \geq 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Sia  $L$  il modulo del momento angolare. Si assuma inizialmente che sia  $L > 0$ .

1. Si scrivano l'equazione del moto per la variabile radiale  $\rho$  e per la variabile angolare  $\theta$ .
2. Si disegni il grafico dell'energia potenziale efficace.
3. Si dimostri che per ogni valore di  $\alpha$  esiste un unico punto di equilibrio per la variabile radiale.
4. Si dimostri che per ogni valore di  $\alpha$  il moto complessivo del sistema avviene all'interno di una corona circolare.
5. Si discuta come cambia lo scenario nel caso in cui si abbia  $L = 0$ .
6. [Si discuta se esistono valori di  $k$  e  $\alpha$  per i quali tutti i moti complessivi sono periodici.]

---

---

**ESERCIZIO 5.** [6+2] Si consideri, in un sistema di riferimento fisso  $k = Oxyz$ , una guida  $\gamma_1$ , posta nel piano verticale  $xy$  e descritta dall'equazione  $y = f(x) = x^2(x - 3)$ . Un carrello si muove lungo la guida  $\gamma_1$ , con velocità costante  $v_0 = 1$  lungo la direzione dell'asse  $x$ , in modo da trovarsi all'istante  $t = 0$  nell'origine  $O$ . Sia  $K = O'\xi\eta\zeta$  un sistema di riferimento mobile solidale con il carrello, la cui origine coincide con la posizione del carrello e i cui assi  $\xi$ ,  $\eta$  e  $\zeta$  sono il primo tangente alla guida  $\gamma_1$ , il secondo ortogonale alla guida, rivolto verso l'alto rispetto alla guida stessa, e il terzo parallelo all'asse  $z$ . Un secondo carrello, che indichiamo con  $P$ , si muove lungo una seconda guida  $\gamma_2$ , posta sempre nel piano  $xy$  e descritta dall'equazione  $y = x^2$ . All'istante iniziale  $t = 0$ , il carrello  $P$  si trova nel punto che ha coordinate  $(-1, 1, 0)$  nel sistema  $k$  e si muove con velocità costante  $v$  nella direzione dell'asse  $x$ .

1. Si descriva il moto del carrello  $P$  nel sistema di riferimento  $K$  come composizione di una rotazione  $B$  e di una traslazione  $C$ .
  2. Si determinino la velocità assoluta, la velocità relativa e le componenti rotatoria e traslatoria della velocità di trascinamento del carrello  $P$ .
  3. [Si calcoli in che punto si intersecano le due guide e si determini quale valore  $v$  non deve avere perché due carrelli non si scontrino mai.]
- 
-