

FM210 - Meccanica Analitica

Anno Accademico 2024/2025

Prima prova di esonero (16-04-2025)

ESERCIZIO 1. [6+2] Si considerino le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Si dimostri che $A^k = \mathbb{1} + kB$ per ogni $k \geq 0$ e si usi il risultato per calcolare e^{At} per $t \in \mathbb{R}$.
2. Si usi la matrice A trovata al punto 1 per risolvere il sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = y, \\ \dot{z} = y + z \end{cases}$$

in corrispondenza di un dato iniziale arbitrario $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ in \mathbb{R}^3 .

3. Si dimostri che tutte le rette del piano $y = 0$ passanti per l'origine sono invarianti.
4. [Si usi un metodo differente per calcolare la soluzione del sistema di equazioni lineari al punto 2.]

ESERCIZIO 2. [6+4] Si consideri il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa m sottoposto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = e^{-x^2} (2\alpha x^2 - x^4 + 1), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

1. Si studi di il grafico dell'energia potenziale $V(x)$ al variare di α .
2. Si determinino i punti di equilibrio del sistema dinamico associato e se ne discuta la stabilità.
3. Si discuta qualitativamente il moto del sistema nel piano delle fasi (x, \dot{x}) .
4. Si verifichi che esistono per ogni valore di α sia traiettorie illimitate che traiettorie periodiche.
5. [Si calcoli il periodo delle traiettorie vicino a un punto di equilibrio stabile nell'approssimazione delle piccole oscillazioni per ogni valore di α per cui esiste almeno un punto di equilibrio stabile.]
6. [Si disegni il diagramma di biforcazione delle configurazioni di equilibrio al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.]

ESERCIZIO 3. [6+2] Si consideri il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa m sottoposto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = \frac{1}{5}x^5 - |x^3| + x^4.$$

1. Si studi il grafico dell'energia potenziale $V(x)$.
2. Si determinino i punti di equilibrio del sistema dinamico associato e se ne discuta la stabilità.
3. Si discuta qualitativamente il moto del sistema nel piano delle fasi (x, \dot{x}) .
4. Si dimostri che esistono traiettorie periodiche.
5. Si determini per quali valori di energia E esistono traiettorie illimitate.
6. [Si discuta se il tempo di fuga delle traiettorie illimitate di cui al punto 5 è finito o infinito.]

ESERCIZIO 4. [6+1] Un punto materiale di massa μ è soggetto a una forza centrale di energia potenziale

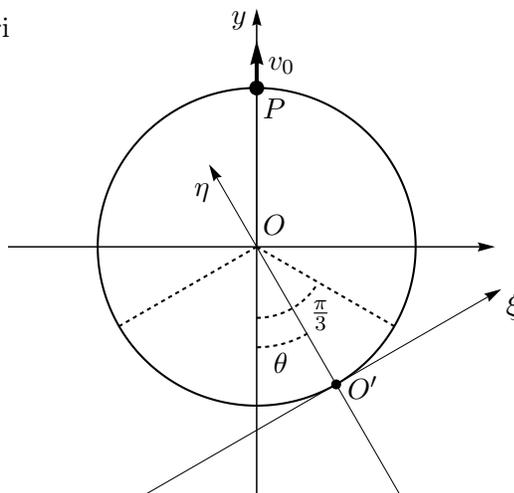
$$V(\rho) = -\frac{\alpha}{\rho^2(\rho^2 + 1)}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Sia L il modulo del momento angolare e si assuma che sia $L > 0$. Al variare del parametro α , si risponda alle seguenti domande.

1. Si scrivano le equazioni del moto per la variabile ρ e per la variabile θ .
2. Si studi il grafico dell'energia potenziale efficace.
3. Si determinino i punti di equilibrio del sistema dinamico associato all'equazione per la variabile ρ e se ne discuta la stabilità.
4. Si studino qualitativamente le orbite nel piano $(\rho, \dot{\rho})$.
5. Si discuta in particolare se esistano traiettorie periodiche nel piano $(\rho, \dot{\rho})$ al variare di α , e si discutano le condizioni sotto le quali il moto complessivo del sistema è periodico.
6. [Si discuta come cambia lo scenario nel caso in cui si abbia $L = 0$.]

ESERCIZIO 5. [7+3] Dato un sistema di riferimento fisso $\kappa = Oxyz$, si consideri un sistema di riferimento mobile $K = O'\xi\eta\zeta$ la cui l'origine O' oscilla nel piano verticale xy lungo una guida circolare di raggio R e centro in O in modo tale che l'angolo θ che il segmento OO' forma con l'asse y discendente vari nel tempo secondo la legge $\theta = \theta(t) = (\pi/3) \sin t$, l'asse ζ rimanga parallelo all'asse z e l'asse η si mantenga diretto verso O (cfr. la figura).

Un omino si trova in corrispondenza dell'origine O' del sistema K . Al tempo $t = 0$, un sasso P di massa m viene lanciato dal punto più in alto della guida in direzione dell'asse y con velocità v_0 (cfr. di nuovo la figura) e si muove sotto l'azione della forza gravità, rivolta nel verso dell'asse y discendente. Sia g l'accelerazione di gravità.



1. Si scriva la trasformazione rigida $D : K \rightarrow \kappa$ come composizione di una traslazione C con una rotazione B .
2. Si determini il moto $\mathbf{q}(t)$ del punto P nel sistema di riferimento fisso κ .
3. Si determini il moto $\mathbf{Q}(t)$ del punto P nel sistema di riferimento mobile K .
4. Si determinino la velocità assoluta, la velocità relativa e le componenti rotatoria e traslatoria della velocità di trascinamento del punto P .
5. Si calcoli il valore delle forze apparenti che agiscono sull'omino in O' nel sistema di riferimento mobile K (sia M la massa dell'omino).
6. [Si discuta per quali valori di v_0 il sasso P viene raccolto dall'omino mentre cade verso il basso e si determini corrispondentemente il tempo t_0 in cui questo avviene.]