FM210 - Meccanica Analitica

Anno Accademico 2024/2025

Seconda prova di esonero (12-06-2025)

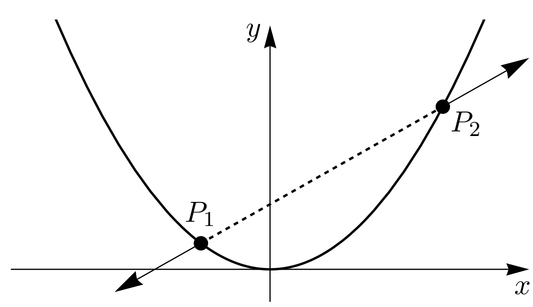
<u>Esercizio 1.</u> [5+2] Si consideri il sistema meccanico costituito da due punti materiali P_1 e P_2, entrambi di massa m, che si muovono nel piano verticale xy nel modo seguente: P_1 scorre lungo la guida di equazione $y = x + 1$; P_2 scorre lungo la guida di equazione $y = x - 1$; due molle di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla collegano P_1 e P_2 all'origine; una terza molla, sempre di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla, collega tra loro P_1 e P_2; infine sul sistema agisce la forza di gravità, diretta nel verso discendente dell'asse y (si indichi con g l'accelerazione di gravità).

1. Si scrivano la lagrangiana del sistema e le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.
2. Si determinino le configurazioni di equilibrio e se ne discuta la stabilità.
3. [Si risponda alle stesse domande nel caso in cui la molla che collega i due punti P_1 e P_2 sia sostituita da un'asta omogenea di massa M e lunghezza $\ell = 2$.

<u>Esercizio 2.</u> [6+2] Un'asta rigida omogenea di massa M e lunghezza $\ell = 2$ si muove nel piano verticale xy nel modo seguente: due molle di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla collegano un estremo P_1 dell'asta ai due vertici $A = (0, 0)$ e $B = (0, 2)$ di un rettangolo, mentre altre due molle, sempre di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla, collegano l'altro estremo P_2 dell'asta agli altri due vertici $C = (4, 2)$ e $D = (4, 0)$ del rettangolo. L'asta è inoltre soggetta all'azione della forza di gravità, che è diretta nel verso discendente dell'asse y (si indichi con g l'accelerazione di gravità).

1. Si scrivano la lagrangiana del sistema le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.
2. Si determinino le configurazioni di equilibrio del sistema e se studi la stabilità.
3. Si determini la forza vincolare che agisce sul punto P_1.
4. [Si discuta come cambia lo scenario se il piano xy ruota intorno all'asse y.]

<u>Esercizio 3.</u> [7+2] Due punti materiali P_1 e P_2, entrambi di massa m, si muovono nel piano verticale xy lungo un profilo parabolico di equazione $y = x^2$, soggetti all'azione della forza di gravità, diretta nel verso discendente dell'asse y (sia g l'accelerazione di gravità) e di una forza repulsiva diretta lungo la retta congiungente i due punti e di intensità αd^{-2}, dove d è la distanza tra i due punti e α è un parametro positivo.



1. Si scrivano la lagrangiana del sistema e le equazioni di Eulero-Lagrange.
2. Si determinino le configurazioni di equilibrio del sistema e se ne discuta la stabilità.
3. [Si studi il diagramma di biforcazione delle configurazioni di equilibrio al variare di un opportuno parametro che dipenda da m, α e g.]

Esercizio 4. [6+2] Si consideri la trasformazione di coordinate

$$\begin{cases} Q = 2\left(q - \dfrac{1}{q}\right)\sqrt{\dfrac{q^2 p}{q^2+1}}, \\[2ex] P = 1 + \sqrt{\dfrac{q^2 p}{q^2+1}}. \end{cases}$$

1. Se ne determini il dominio $\mathcal{D}$.
2. Si dimostri che la trasformazione è canonica trovandone una funzione generatrice di seconda specie $F(q, P)$.
3. Data la lagrangiana
$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{(1+q^2)^2 \dot{q}^2}{q^4}$$
si scriva l'hamiltoniana corrispondente e se ne determini l'espressione nelle variabili (Q, P).
4. [Si determini la soluzione delle equazioni di Eulero-Lagrande in corrispondenza del dato iniziale $(q(0), \dot{q}(0)) = (1, 1/4)$.]

Esercizio 5. [6+2] Si consideri la trasformazione di coordinate

$$\begin{cases} Q_1 = -\dfrac{p_2}{q_2}\sqrt{\dfrac{p_2^2}{4q_2^2} + q_2^2}, \\ Q_2 = q_1^2, \\ P_1 = \sqrt{\dfrac{p_2^2}{4q_2^2} + q_2^2}, \\[2ex] P_2 = \dfrac{p_1}{2q_1}. \end{cases}$$

1. Si determini il dominio $\mathcal{D}$ della trasformazione.
2. Si dimostri che la trasformazione è canonica trovandone una funzione generatrice di seconda specie $F(q_1, q_2, P_1, P_2)$.
3. Si verifichi esplicitamente che la matrice di elementi $\partial^2 F / \partial q_i \partial P_j$ è non singolare in $\mathcal{D}$.
4. Data l'hamiltoniana
$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{p_1^2}{2q_1^2} + \frac{p_2^2}{4q_2^2} + q_2^2,$$
si determini l'hamiltoniana $\mathcal{K}(Q_1, Q_2, P_1, P_2)$ nelle nuove variabili.
5. Si consideri il sistema descritto dall'hamiltoniana data e si determini la soluzione delle equazioni del moto nelle nuove variabili al variare dei dati iniziali.
6. Si determini la soluzione delle equazioni del moto nelle variabili originali in corrispondenza del dato iniziale $q_1(0) = q_2(0) = 1$, $p_1(0) = p_2(0) = 0$.
7. [Si verifichi esplicitamente che la trasformazione di coordinate conserva le parentesi di Poisson fondamentali].
8. [Si discuta se sia possibile trovare una funzione generatrice di prima specie e, in caso di risposta affermativa, la si determini.]