

FM210 Meccanica Analitica

A.A. 2024/2025

Guido Gentile - Livia Corsi

(Programma definitivo)

1. Equazioni differenziali ordinarie ed equazioni del moto

Richiami sulle equazioni differenziali ordinarie: teorema di esistenza e unicità; dipendenza continua dai dati iniziali; dipendenza differenziabile dai dati iniziali; teorema del prolungamento; equazioni a variabili separabili. Sistemi dinamici: traiettorie, orbite, flussi, traiettorie periodiche, insiemi invarianti, derivata sostanziale, costanti del moto. Sistemi meccanici e sistemi meccanici conservativi; legge di Newton.

2. Analisi qualitativa e stabilità

Sistemi dinamici lineari planari: analisi qualitativa, pozzi, sorgenti, centri, e moti a spirale. Stabilità secondo Ljapunov. Punti di equilibrio: stabili, asintoticamente stabili, attrattivi e instabili. Sistemi dinamici lineari: soluzione generale. Sistemi dinamici linearizzati. Teoremi di stabilità nel caso di sistemi conservativi: teoremi che si riconducono allo studio del sistema linearizzato (senza dimostrazione), teorema di Ljapunov (dimostrazione della stabilità) e teorema di Lagrange-Dirichlet. Sistemi meccanici conservativi unidimensionali: conservazione dell'energia e curve di livello. Moti periodici e moti asintotici. Separatrici, traiettorie omocline e traiettorie eterocline. L'oscillatore armonico e il pendolo semplice. Periodo come integrale definito e stima del periodo. Piccole oscillazioni per sistemi dinamici unidimensionali.

3. Moti centrali

Forze centrali. Problema dei due corpi. Moti centrali. Conservatività delle forze centrali. Conservazione del momento angolare per le forze centrali. Moto radiale e moto angolare. Condizioni di periodicità del moto. Teorema di Bertrand (senza dimostrazione). Campo centrale armonico e campo centrale coulombiano: equazioni delle orbite. Velocità areolare. Leggi di Keplero.

4. Moti relativi

Sistemi di riferimento fissi e sistemi di riferimento mobili, trasformazioni rigide, traslazioni e rotazioni, matrici ortogonali. Rotazione intorno a un asse. Richiami sul prodotto vettoriale: matrici ortogonali e prodotti vettoriali. Velocità angolare. Legge di trasformazione delle velocità. Forze d'inerzia: forza inerziale di traslazione, forza inerziale di rotazione, forza centrifuga, forza di Coriolis. Effetti della forza centrifuga sull'accelerazione di gravità, pendolo di Foucault nell'approssimazione lineare.

5. Vincoli e sistemi rigidi

Sistemi vincolati. Vincoli olonomi bilateri e superfici di vincolo. Principio di d'Alembert. Moltiplicatori di Lagrange. Derivazione delle equazioni del pendolo semplice usando i moltiplicatori di Lagrange. Sistemi rigidi discreti e continui: definizione e proprietà, spazio delle configurazioni dei sistemi rigidi. Velocità dei punti di un sistema rigido. Caratteristiche cinematiche dei sistemi rigidi: quantità: di moto, momento angolare, energia cinetica, teorema di König. Principio di d'Alembert ed equazioni cardinali della dinamica. Operatore di inerzia, momenti di inerzia, momenti principali di inerzia, assi di inerzia. Moto di rotolamento senza strisciamento.

6. Meccanica lagrangiana

Lagrangiana e funzionale d'azione. Equazioni di Eulero-Lagrange. Primo principio variazionale di Hamilton. Equazioni di Newton ed equazioni di Eulero-Lagrange per sistemi meccanici conservativi. Lagrangiana per sistemi vincolati. Equazioni di Newton integrate dal principio di d'Alembert ed equazioni di Eulero-Lagrange per sistemi meccanici conservativi vincolati. Equazioni del moto per il pendolo semplice, nel formalismo lagrangiano e mediante l'uso dei moltiplicatori di Lagrange. Calcolo delle reazioni vincolari.

7. Simmetrie e costanti del moto

Variabili cicliche e metodo di Routh. Applicazione al problema dei due corpi. Gruppi a un parametro di diffeomorfismi. Trasformazioni di coordinate e loro sollevamenti. Campi vettoriali, momenti associati ai campi vettoriali e momenti coniugati. Sistemi invarianti sotto l'azione di un gruppo a un parametro. Teorema di Noether. Sistemi invarianti per traslazione e sistemi invarianti per rotazione. Cenni sui sistemi invarianti sotto l'azione di più gruppi a un parametro: gruppi commutanti ed estensione del teorema di Noether (senza dimostrazione).

8. Meccanica hamiltoniana

Spazio delle fasi. Trasformata di Legendre. Hamiltoniana ed equazioni di Hamilton. Metodo di Routh nel formalismo hamiltoniano. Secondo principio variazionale di Hamilton. Campo vettoriale hamiltoniano. Campi a divergenza nulla. Teorema di Liouville (senza dimostrazione). Teorema del ritorno di Poincaré. Esperimento di Maxwell.

9. Trasformazioni canoniche

Trasformazioni di coordinate nello spazio delle fasi. Matrici simplettiche. Trasformazioni che conservano la struttura canonica delle equazioni. Trasformazioni canoniche. Trasformazioni simplettiche. Parentesi di Poisson e loro proprietà. Parentesi di Poisson fondamentali. Criterio per riconoscere una trasformazione canonica sulla base delle parentesi di Poisson fondamentali. Richiami sulle forme differenziali esatte e

chiuse. Differenziale a tempo bloccato. Condizione di Lie. Criterio per riconoscere una trasformazione canonica sulla base della condizione di Lie.

10. Funzioni generatrici e metodo di Hamilton-Jacobi

Funzioni generatrici indipendenti e dipendenti dal tempo. Funzioni generatrici di prima e seconda specie. Altri procedimenti per generare trasformazioni canoniche. Sollevamento di una trasformazione di coordinate a una trasformazione simplettica. Equazione di Hamilton-Jacobi. Integrale generale e integrale completo. Funzione principale di Hamilton. Funzione caratteristica di Hamilton. Sistemi unidimensionali e sistemi separabili. Variabili azione-angolo per sistemi unidimensionali. Variabili azione-angolo per sistemi a più dimensioni. Teorema di Liouville-Arnol'd (senza dimostrazione). Caso dei sistemi separabili. Sistemi integrabili.

TESTI CONSIGLIATI

- [1] G. GENTILE, *Introduzione ai sistemi dinamici – Volume 1. Equazioni differenziali ordinarie, analisi qualitativa e alcune applicazioni*. Springer (2021).
- [2] G. GENTILE, *Introduzione ai sistemi dinamici – Volume 2. Meccanica lagrangiana e hamiltoniana*. Springer (2022).

BIBLIOGRAFIA SUPPLEMENTARE

- [3] V.I. ARNOL'D, *Metodi Matematici della Meccanica Classica*. Editori Riuniti (1979).
- [4] G. DELL'ANTONIO, *Elementi di Meccanica*. Liguori Editore (1996).
- [5] A. FASANO & S. MARMI, *Meccanica analitica*. Bollati Boringhieri (1994).
- [6] G. GALLAVOTTI, *Meccanica Elementare*. Bollati-Boringhieri (1980).
- [7] L.D. LANDAU & E.M. LIFSHITZ, *Meccanica*. Editori Riuniti (1976).

MODALITÀ D'ESAME

- valutazione in itinere (“esoneri”)		☒ SI	☐ NO
- esame finale	scritto	☒ SI	☐ NO
	orale	☒ SI	☐ NO
- altre prove di valutazione del profitto (meglio descritte sotto)		☐ SI	☒ NO