

FM210 Meccanica Analitica

Soluzioni Tutorato 1

Docente: Guido Gentile, Esercitatrice: Livia Corsi

Tutori: Simone Corriano, Laura Fagotto

28/02/2025

Esercizio 1. Abbiamo una matrice già diagonale, quindi la soluzione sarà

$$\begin{aligned}x(t) &= \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2t} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Esercizio 2.

Ricordiamo che la soluzione ad una ODE lineare del primo ordine è data da

$$x(t) = e^{At}x(0)$$

Per calcolare l'esponenziale della matrice A , osserviamo dapprima che questa matrice è strettamente triangolare superiore, e quindi nilpotente. Utilizzando la definizione otteniamo immediatamente

$$e^{At} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!} = \mathbb{1} + At + \frac{1}{2}A^2t^2$$

poiché $A^k = 0$ per ogni $k \geq 3$. Concludiamo allora che la soluzione è

$$x(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2t & t - t^2 \\ 0 & 1 & -t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t - t^2 - 1 \\ -t \\ 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 3. Abbiamo due modi di sviluppare questo esercizio:

- Notiamo che, se $x = (x_1, x_2, x_3)$, il sistema dinamico diventa:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = x_2 + x_3 \\ \dot{x}_3 = x_3 \end{cases}.$$

Quindi si può partire dall'ultima equazione, che sappiamo avere soluzione $x_3(t) = e^t x_3(0) = e^t$.

A questo punto sostituiamo alla seconda equazione e risolviamo la ODE nella variabile x_2 e la soluzione è $x_2(t) = e^t(t+1)$ (qui abbiamo usato la formula standard per le ODE lineari del primo ordine: $x_2(t) = e^t(x_2(0) + \int_0^t e^{-s}e^s ds)$).

Infine sostituiamo $x_2(t)$ nella prima equazione e troviamo nello stesso modo la soluzione $x_1(t) = e^t(t + \frac{t^2}{2})$.

In conclusione, la soluzione sarà

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t(t + \frac{t^2}{2}) \\ e^t(t+1) \\ e^t \end{pmatrix}.$$

- Notiamo che la matrice A è somma di una matrice diagonale più una matrice nilpotente che commutano. Quindi applichiamo quello visto a lezione:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: B + C.$$

Quindi, $e^{At} = e^{Bt}e^{Ct}$ con

$$\begin{aligned} e^{Bt} &= \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}, \\ e^{Ct} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & t^2/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La soluzione sarà, quindi, $x(t) = e^{At}x(0)$.

Esercizio 4.

Osserviamo dapprima che il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = 4y \\ \dot{y} = -x \end{cases};$$

diventa, derivando a destra e sinistra la prima equazione rispetto al tempo,

$$\ddot{x} = 4\dot{y} = -4x$$

Non perdiamo traccia dei dati iniziali per questa nuova formulazione del problema, che diventano quindi in questo caso

$$x(0) = 1 \quad e \quad \dot{x}(0) = 4y(0) = 4$$

Ossia ci siamo ricondotti a risolvere il seguente Problema di Cauchy noto

$$\begin{cases} \ddot{x} + 4x = 0 \\ x(0) = 1 \\ \dot{x}(0) = 4 \end{cases}$$

che chiamiamo Oscillatore Armonico (con frequenza $\omega = 2$). Risolvendo dunque questa equazione differenziale omogenea, otteniamo

$$x(t) = A \cos(2t) + B \sin(2t)$$

ed imponendo i dati iniziali troviamo

$$A = 1 \quad e \quad B = 2$$

Concludiamo ricordando che, dalla prima equazione $y(t) = \frac{1}{4}\dot{x}(t)$, ottenendo

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2t) + 2 \sin(2t) \\ \cos(2t) - \frac{1}{2} \sin(2t) \end{pmatrix}$$

che completa l'esercizio.

Esercizio 5. Notiamo che, se $x = (x_1, x_2, x_3)$, il sistema dinamico diventa:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - x_2 \\ \dot{x}_2 = 2x_2 - x_3 \\ \dot{x}_3 = 4x_3 \end{cases}.$$

Procediamo come l'esercizio 3-primo modo e troviamo che

$$\begin{cases} x_1(t) = e^t - \frac{1}{3}e^{4t} \\ x_2(t) = e^{4t} \\ x_3(t) = -2e^{4t} \end{cases}$$

Esercizio 6.

(i) Siano $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ tali che $[A, B] = 0$ (ovvero le due matrici commutano), allora

$$\begin{aligned} e^A e^B &= \left(\sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} A^k \right) \left(\sum_{j \geq 0} \frac{1}{j!} B^j \right) = \\ &= \left(id + A + \frac{1}{2}A^2 + \dots + \frac{1}{k!}A^k + \dots \right) \left(id + B + \frac{1}{2}B^2 + \dots + \frac{1}{j!}B^j + \dots \right) = \\ &= id + (AB + BA) + \frac{1}{2}(A + B)^2 + \frac{1}{6}(A + B)^3 + \dots \end{aligned}$$

Quindi mi accorgo che se le matrici commutano mi è possibile ricostruire ordine per ordine il binomio di newton, e il calcolo si equivale a quello fatto come se A e B fossero dei numeri.

$$\left(id + A + \frac{1}{2}A^2 + \dots + \frac{1}{k!}A^k + \dots \right) \left(id + B + \frac{1}{2}B^2 + \dots + \frac{1}{j!}B^j + \dots \right) =$$

$$id + (AB + BA) + \frac{1}{2}(A + B)^2 + \frac{1}{6}(A + B)^3 + \dots = \sum_{i \geq 0} \frac{(A + B)^i}{i!} = e^{A+B}$$

(ii) Sia $A \in M_n(\mathbb{C})$ una matrice diagonalizzabile, ovvero esiste una matrice P invertibile tale che $A = PDP^{-1}$, allora osservo che:

$$e^A = \sum_{j \geq 0} \frac{A^j}{j!} = \sum_{j \geq 0} \frac{(PDP^{-1})^j}{j!}$$

Per induzione su $j \geq 0$ dimostro che:

$$(PDP^{-1})^j = PD^jP^{-1}$$

Quindi:

$$e^A = \sum_{j \geq 0} \frac{A^j}{j!} = \sum_{j \geq 0} \frac{(PDP^{-1})^j}{j!} = \sum_{j \geq 0} \frac{PD^jP^{-1}}{j!} = D \left(\sum_{j \geq 0} \frac{D^j}{j!} \right) D^{-1} = Pe^DP^{-1}$$

(iii) Se A è diagonalizzabile, esiste P matrice di cambiamento di base tale che

$$A = PDP^{-1}.$$

Notiamo che $\text{tr}(A) = \text{tr}(D)$. Usando questo, calcoliamo il determinante dell'esponenziale di A :

$$\begin{aligned} \det(e^A) &= \det(Pe^DP^{-1}) \\ &= \det(P)\det(e^D)\det(P^{-1}) \\ &= \det(e^D). \end{aligned}$$

Se chiamiamo $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ gli autovalori sulla diagonale di D , avremo che

$$\begin{aligned} \det(e^A) &= \det(e^D) \\ &= e^{\lambda_1} \dots e^{\lambda_n} \\ &= e^{\lambda_1 + \dots + \lambda_n} \\ &= e^{\text{tr}D} \\ &= e^{\text{tr}A} \end{aligned}$$

Esercizio 7. Dividiamo in vari casi:

- " $\alpha = 0$ " : in questo caso la matrice A si spezza in una matrice diagonale più una matrice nilpotente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Procedendo come prima, si trova che la soluzione è:

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t x_1(0) \\ te^t x_1(0) + e^t x_2(0) \end{pmatrix}.$$

- " $\alpha > 0$ " : Diagonalizziamo la matrice come abbiamo fatto sopra e troviamo le matrici Q e B tale che $A = Q^{-1}BQ$:

$$B = \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{\alpha} & 0 \\ 0 & 1 - \sqrt{\alpha} \end{pmatrix}; \quad Q^{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha} & -\sqrt{\alpha} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

A questo punto, quindi, la soluzione è:

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{e^t}{2}(e^{\sqrt{\alpha}t} + e^{-\sqrt{\alpha}t})x_1(0) + \frac{\sqrt{\alpha}e^t}{2}(e^{\sqrt{\alpha}t} - e^{-\sqrt{\alpha}t})x_2(0) \\ \frac{e^t}{2\sqrt{\alpha}}(e^{\sqrt{\alpha}t} - e^{-\sqrt{\alpha}t})x_1(0) + \frac{e^t}{2}(e^{\sqrt{\alpha}t} + e^{-\sqrt{\alpha}t})x_2(0) \end{pmatrix}.$$

- " $\alpha < 0$ " : la soluzione per $\alpha < 0$ è la stessa per $\alpha > 0$. Possiamo riscrivere la soluzione usando che:

$$\sqrt{\alpha} = i\sqrt{|\alpha|} \quad e \quad \cos(\sqrt{\alpha}t) = \frac{e^{\sqrt{\alpha}t} + e^{-\sqrt{\alpha}t}}{2}; \quad \cos(\sqrt{\alpha}t) = \frac{e^{\sqrt{\alpha}t} - e^{-\sqrt{\alpha}t}}{2i}.$$

Riscriviamo la soluzione, quindi, nel seguente modo:

$$x(t) = \begin{pmatrix} e^t \cos(\sqrt{|\alpha|}t)x_1(0) - \sqrt{|\alpha|}e^t \sin(\sqrt{|\alpha|}t)x_2(0) \\ \frac{e^t}{2\sqrt{|\alpha|}} \sin(\sqrt{|\alpha|}t)x_1(0) + e^t \cos(\sqrt{|\alpha|}t)x_2(0) \end{pmatrix} \quad (2)$$

Esercizio 8.

(i) Il passo base $n = 1$ è banalmente verificato, assumiamo dunque che la tesi sia vera per $n - 1$

$$A^{n-1} = 2^{n-2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

e dimostriamo per n . Un conto diretto mostra che

$$A^n = A^{n-1}A \stackrel{H.I}{=} 2^{n-2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2^{n-1} 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2^{n-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

che completa l'induzione.

(ii) Utilizzando il punto (i) e la definizione di esponenziale di matrice si ha

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \stackrel{(i)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{k-1}}{k!} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{e^2}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(iii) L'equazione

$$e^A - xA = \mathbb{1}$$

per il calcolo del punto precedente diventa

$$\left(\frac{e^2}{2} - x \right) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

che non ha soluzioni poiché dovrebbe essere vero che

$$\begin{cases} \left(\frac{e^2}{2} - x \right) = 1 \\ \left(\frac{e^2}{2} - x \right) = 0 \end{cases}$$