

FM210 Meccanica Analitica

Soluzioni Tutorato 10

Docente: Guido Gentile, Esercitatrice: Livia Corsi
Tutori: Francesco Artibani, Simone Corriano

30/05/2025

Esercizio 1.

utilizzando le coordinate lagrangiane consigliate nel testo si ha che coordinate di B sono

$$B = \left(x + \frac{L}{2} \cos \theta, \frac{L}{2} \sin \theta\right),$$

e quindi

$$\mathcal{L}(x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta}) = T - V, \quad T = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{12} M L^2 \right) \dot{\theta}^2, \quad V = \frac{1}{2} K (x^2 + (x-a)^2 + L(x-a) \cos \theta).$$

Le equazioni di Eulero-Lagrange saranno quindi

$$\begin{cases} M \ddot{x} = -K(2x - a + \frac{L}{2} \cos \theta) \\ I \ddot{\theta} = \frac{1}{2} K L (x - a) \sin \theta \end{cases}.$$

I momenti coniugati sono

$$\begin{cases} p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = M \dot{x} \\ p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = \frac{M L^2}{12} \dot{\theta} \end{cases}.$$

L'hamiltoniana

$$H = p_x \dot{x} + p_\theta \dot{\theta} - \mathcal{L}$$

espressa in termini di x, θ, p_x, p_θ è

$$H = \frac{p_x^2}{2M} + \frac{p_\theta^2}{2I} + \frac{1}{2} K (x^2 + (x-a)^2 + L(x-a) \cos \theta).$$

Le equazioni di Hamilton sono quindi

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{M} \\ \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{I} \\ \dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = -K(x + x - a + \frac{L}{2} \cos \theta) \\ \dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{1}{2} K L (x - a) \sin \theta \end{cases}.$$

Esercizio 2.

(i) Definendo

$$A := \sqrt{\frac{1-qp}{1+qp}},$$

si ha

$$\begin{cases} Q = -pA \\ P = qA^{-1} \end{cases},$$

così che si trova

$$\frac{\partial Q}{\partial q} = -p \frac{\partial A}{\partial q}, \quad \frac{\partial Q}{\partial p} = -A - p \frac{\partial A}{\partial p}, \quad \frac{\partial P}{\partial q} = \frac{1}{A} - \frac{q}{A^2} \frac{\partial A}{\partial q}, \quad \frac{\partial P}{\partial p} = -\frac{q}{A^2} \frac{\partial A}{\partial p},$$

dove

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial q} &= -\frac{1}{A} \frac{p}{(1+qp)^2}, \\ \frac{\partial A}{\partial p} &= -\frac{1}{A} \frac{q}{(1+qp)^2}. \end{aligned}$$

Si ha ovviamente per antisimmetria che $\{Q, Q\} = 0 = \{P, P\}$, calcoliamo quindi:

$$\begin{aligned} \{Q, P\} &= \frac{qp}{A^2} \frac{\partial A}{\partial q} \frac{\partial A}{\partial p} + \left(A + p \frac{\partial A}{\partial p} \right) \left(\frac{1}{A} - \frac{q}{A^2} \frac{\partial A}{\partial q} \right) = \\ &= \frac{qp}{A^2} \frac{\partial A}{\partial q} \frac{\partial A}{\partial p} + 1 + \frac{p}{A} \frac{\partial A}{\partial p} - \frac{q}{A} \frac{\partial A}{\partial q} - \frac{qp}{A^2} \frac{\partial A}{\partial q} \frac{\partial A}{\partial p} = 1 + \frac{p}{A} \frac{\partial A}{\partial p} - \frac{q}{A} \frac{\partial A}{\partial q}. \end{aligned}$$

Ponendo $x = qp$, si ha

$$\frac{\partial A}{\partial q} = \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial q} = p \frac{\partial A}{\partial x}, \quad \frac{\partial A}{\partial p} = q \frac{\partial A}{\partial x} \implies \frac{p}{A} \frac{\partial A}{\partial p} - \frac{q}{A} \frac{\partial A}{\partial q} = 0$$

da cui segue che $\{Q, P\} = 1$ e quindi la trasformazione è canonica.

(ii) Ovviamente $QP = -qp$, troviamo quindi che

$$P^2(1-qp) = q^2(1+qp) \implies q = P \sqrt{\frac{1+QP}{1-QP}},$$

dove per la scelta del segno abbiamo usato che P e q devono avere lo stesso segno (per def. di P). Si ha inoltre

$$p = -\frac{QP}{q} = -Q \sqrt{\frac{1-QP}{1+QP}}.$$

(iii) La trasformazione inversa è quindi

$$q = P \sqrt{\frac{1+QP}{1-QP}},$$

$$p = -Q\sqrt{\frac{1-QP}{1+QP}}.$$

(iv) Per semplificarci la vita nel cercare una funzione generatrice di seconda specie $F = F(q, P)$, ci esprimiamo p in termini di q e P , i.e.

$$P^2(1-qp) = q^2(1+qp) \implies P^2 - q^2 = pq(q^2 + P^2) \implies p = \frac{P^2 - q^2}{q(q^2 + P^2)},$$

imponendo che $p = \partial F / \partial q$, si ha

$$F(q, P) = \int \frac{P^2 - q^2}{q(q^2 + P^2)} dq = \int \frac{1}{q} - \frac{2q}{q^2 + P^2} dq = \log q - \log(q^2 + P^2) + g_1(P).$$

Imponendo ora $Q = \partial F / \partial P$, e ragionando come prima, si ha

$$F(q, P) = \int \frac{1}{P} - \frac{2P}{q^2 + P^2} dP = \log P - \log(q^2 + P^2) + g_2(q),$$

il che implica che

$$F(q, P) = \log P + \log q - \log(q^2 + P^2).$$

(v) Nelle nuove variabili l'hamiltoniana diventa

$$K(Q, P) = P^2.$$

(vi) Risolviamo le equazioni di Hamilton

$$\begin{cases} \dot{Q} = K_p = 2P \\ \dot{P} = -K_q = 0 \end{cases}$$

il che implica

$$\begin{cases} Q(t) = 2P(0)t + Q(0) \\ P(t) = P(0) \end{cases}.$$

I dati iniziali $(q(0), p(0)) = (1, 0)$, in termini delle nuove variabili diventano $(Q(0), P(0)) = (0, 1)$ utilizzando l'espressione della trasformazione. Utilizzando ora la trasformazione inversa trovata precedentemente si ha che

$$q(t) = \sqrt{\frac{1+2t}{1-2t}}, \quad p(t) = -2t\sqrt{\frac{1-2t}{1+2t}}.$$

Esercizio 3.

Imponiamo

$$1 = \{Q, P\} = -\frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial q} = \frac{q^2}{2} f'(q),$$

otteniamo quindi che la trasformazione ha la forma

$$Q = \frac{1}{2}q^2p \quad P = \frac{2}{q}.$$

Esercizio 4.

Esprimendo Q e P come funzioni di q e p otteniamo

$$\begin{cases} Q = \alpha q^6 p^{4/3} \\ P = 3q^\mu p^{-1/3} \end{cases},$$

imponendo che $\{Q, P\} = 1$ otteniamo $\mu = -5$ e $\alpha = 1/14$. Per ottenere una funzione generatrice di seconda specie $F(q, P)$ esprimiamo p e Q in termini di q e P :

$$p = 27q^{-15}P^{-3}, \quad Q = \frac{81}{14}P^{-4}q^{-14},$$

integrando otteniamo così

$$F(q, P) = -\frac{27}{14}q^{-14}P^{-3}.$$