FM210 Meccanica Analitica
Soluzioni Tutorato 11

Docente: Guido Gentile, Esercitatrice: Livia Corsi
Tutori: Francesco Artibani, Simone Corriano

06/06/2025

Esercizio 1.
Usiamo le parentesi di Poisson per imporre la canonicità della trasformazione

$$1 = \{Q, P\} = -\frac{\beta}{\alpha} e^{-\beta q}\, \alpha\, e^{\beta q} \,,$$

il che implica $\beta = -1$ *e* $\alpha \neq 0$. *Come al solito scriviamo* p *e* Q *in termini di* q *e* P*:*

$$\begin{cases} p = \frac{P}{\alpha} e^q \\ Q = \frac{1}{\alpha} e^q \end{cases} \,,$$

deve risultare quindi

$$\frac{\partial F}{\partial q} = \frac{P}{\alpha} e^q \implies F(q, P) = \frac{P}{\alpha} e^q + g_1(P) \,,$$

inoltre

$$\frac{\partial F}{\partial P} = \frac{1}{\alpha} e^q \implies F(q, P) = \frac{P}{\alpha} e^q + g_2(q) \,,$$

quindi in conclusione

$$F(q, P) = \frac{P}{\alpha} e^q \,.$$

Si osserva immediatamente che dalla espressione di Q *non è possibile scegliere come variabili indipendenti le* (q, Q), *quindi non esiste una funzione generatrice di prima specie* $F(q, Q)$ *per la trasformazione.*

Esercizio 2.
Si ha

$$p = \frac{\partial F}{\partial q} = \frac{Q}{q} \qquad P = -\frac{\partial F}{\partial Q} = -\log q \,.$$

Da cui si ricava l'espressione della trasformazione di coordinate

$$\begin{cases} Q = pq \\ P = -\log q \end{cases}$$

oppure

$$\begin{cases} p = Qe^{P} \\ q = e^{-P} \end{cases} .$$

(i) L'hamiltoniana nelle nuove variabili sarà

$$K(Q,P) = Q^3 - 2P\,.$$

(ii) Le equazioni di Hamilton sono

$$\begin{cases} \dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P} = -2 \\ \dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q} = -3Q^2 \end{cases} ,$$

che implica

$$\begin{cases} Q(t) = -2t + Q(0) \\ P(t) = -4t^3 + 6Q(0)t^2 - 3Q(0)t + P(0) \end{cases} ,$$

con i dati iniziali del problema si ha $(Q(0), P(0)) = (0, -\log q_0)$, *il che implica usando la trasformazione inversa che*

$$q(t) = q_0 e^{4t^3}\,, \quad p(t) = -\frac{2t}{q_0} e^{-4t^3}\,.$$

Esercizio 3.
(i) Il dominio della trasformazione è banalmente $\mathcal{D} = \mathbb{R}^4$.

(ii) Per $F = F(q_1, q_2, P_1, P_2)$, *utilizzando che*

$$\frac{\partial F}{\partial q_2} = p_2 = P_2\,,$$

si ha integrando che

$$F = P_2 q_2 + g_1(q_1, P_1, P_2)\,.$$

Derivando F *rispetto a* P_2 *si ha*

$$\frac{\partial F}{\partial P_2} = q_2 + \frac{\partial g_1}{\partial P_2} = q_2 - \frac{q_1^3}{3}\,,$$

dunque

$$g_1(q_1, P_1, P_2) = -\frac{q_1^3 P_2}{3} + g_2(q_1, P_1)\,.$$

Dunque

$$F = P_2 q_2 - \frac{q_1^3 P_2}{3} + g_2(q_1, P_1)\,,$$

che derivata rispetto a P_1 *da*

$$\frac{\partial F}{\partial P_1} = \frac{\partial g_2}{\partial P_1} = q_1 + \frac{q_1^3}{3}\,,$$

che integrando da

$$g_2(q_1, P_1) = P_1 \left(q_1 + \frac{q_1^3}{3} \right) + g_3(q_1) \,.$$

Infine derivando

$$F = P_2 q_2 - \frac{q_1^3 P_2}{3} + P_1 \left(q_1 + \frac{q_1^3}{3} \right) + g_3(q_1) \,.$$

rispetto a q_1, si ha

$$\frac{\partial F}{\partial q_1} = -q_1^2 P_2 + P_1(1 + q_1^2) + g_3' = p_1 \,,$$

inoltre

$$p_1 = P_1(1 + q_1^2) - q_1^2 P_2 \,,$$

che implica $g_3' = 0$. A meno di costanti la generatrice è quindi

$$F(q_1, q_2, P_1, P_2) = P_2 q_2 - \frac{q_1^3 P_2}{3} + P_1 \left(q_1 + \frac{q_1^3}{3} \right) \,.$$

(iii) Studiamo la matrice

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial q_1 \partial P_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial q_1 \partial P_2} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial q_2 \partial P_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial q_2 \partial P_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + q_1^2 & -q_1^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

il cui determinante è

$$\det \mathcal{D} = 1 + q_1^2 > 0$$

e quindi $\mathcal{D}$ è non singolare su tutto $\mathbb{R}^4$.

(iv) L'hamiltoniana nelle nuove variabili è

$$K(Q_1, Q_2, P_1, P_2) = P_1^2 + P_2^2 + Q_2^2 \,.$$

(v) Le equazioni di Hamilton sono

$$\begin{cases} \dot{Q}_1 = 2P_1 \\ \dot{Q}_2 = 2P_2 \\ \dot{P}_1 = 0 \\ \dot{P}_2 = -2Q_2 \end{cases} ,$$

quindi

$$\begin{cases} P_1(t) = P_1(0) \\ Q_1(t) = 2P_1(0)t + Q_1(0) \end{cases} .$$

Per risolvere invece

$$\begin{cases} \dot{Q}_2 = 2P_2 \\ \dot{P}_2 = -2Q_2 \end{cases}$$

deriviamo entrambe le equazioni rispetto al tempo ed otteniamo

$$\begin{cases} \ddot{Q}_2 = 2\dot{P}_2 = -4Q_2 \\ \ddot{P}_2 = -2\dot{Q}_2 = -4P_2 \end{cases} ,$$

che sono oscillatori armonici, ricordando che la soluzione di

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega^2 x = 0 \\ x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{cases}$$

è

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t) \, .$$

Si ha

$$\begin{cases} Q_2(t) = Q(0)\cos(2t) + P_2(0)\sin(2t) \\ P_2(t) = P(0)\cos(2t) - Q_2(0)\sin(2t) \end{cases} .$$

Esercizio 4.
(*i*) *Il dominio della trasformazione è*

$$\mathcal{D} = \{p_1 q_1 > 0, \, q_1, q_2 \neq 0\} \, .$$

(*ii*) *Iniziamo da*

$$\frac{\partial F}{\partial P_2} = Q_2 = q_2^2 \, ,$$

integrando otteniamo

$$F = q_2^2 P_2 + g_1(q_1, q_2, P_1) \, .$$

Derivando F in q_1 si ha

$$\frac{\partial F}{\partial q_1} = \frac{\partial g_1}{\partial q_1} = p_1 = 2q_1 e^{P_1} \, ,$$

da cui integrando si trova

$$g_1 = q_1^2 e^{P_1} + g_2(q_2, P_1) \, .$$

Derivando ora

$$F = q_2^2 P_2 + q_1^2 e^{P_1} + g_2(q_2, P_1)$$

rispetto a q_2, si trova

$$\frac{\partial F}{\partial q_2} = 2q_2 P_2 + \frac{\partial g_2}{\partial q_2} = p_2 = 2q_2 \left(P_2 + \frac{p_1}{2q_1} \right) \, .$$

Ora, da

$$2q_2 \left(P_2 + \frac{p_1}{2q_1} \right) = 2q_2 P_2 + \frac{p_1 q_2}{q_1} \, ,$$

poiché

$$p_1 = 2q_1 e^{P_1},$$

si ha

$$2q_2 P_2 + \frac{p_1 q_2}{q_1} = 2q_2 P_2 + \frac{2q_1 q_2 e^{P_1}}{q_1} = 2q_2 P_2 + 2q_2 e^{P_1} \, ,$$

che per quando trovato prima, implica

$$\frac{\partial g_2}{\partial q_2} = 2q_2 e^{P_1} \, ,$$

ossia

$$F = q_2^2 P_2 + q_1^2 e^{P_1} + q_2^2 e^{P_1} + g_3(P_1)\,.$$

In conclusione derivando F *rispetto a* P_1 *si ottiene che* $g_3'(P_1) = 0$, *e quindi che a meno di costanti la generatrice è*

$$F = q_2^2 P_2 + q_1^2 e^{P_1} + q_2^2 e^{P_1}\,.$$

(iii) *In questo caso si ha*

$$|\mathcal{D}| = \left| \begin{pmatrix} 2q_1 e^{P_1} & 0 \\ 2q_2 e^{P_1} & 2q_2 \end{pmatrix} \right| = 4q_1 q_2 e^{P_1} \neq 0\,,$$

poiché $q_1, q_2 \neq 0$.

(iv) *L'hamiltoniana nelle nuove variabili è*

$$K(Q_1, Q_2, P_1, P_2) = 2P_2^2 + 2e^{2P_1}\,.$$

(v) *Le equazioni di Hamilton nelle nuove variabili sono quindi*

$$\begin{cases} \dot{Q}_1 = e^{P_1} \\ \dot{Q}_2 = 4P_2 \\ \dot{P}_1 = 0 \\ \dot{P}_2 = 0 \end{cases}\,,$$

perciò

$$\begin{cases} Q_1(t) = 4e^{2P_1(0)}t + Q_1(0) \\ Q_2(t) = 4P_2(0)t + Q_2(0) \\ P_1(t) = P_1(0) \\ P_2(t) = P_2(0) \end{cases}\,,$$

dove i nuovi dati iniziali possono essere ricavati in termini dei dati iniziali nelle vecchie variabili e valgono

$$(Q_1(0), Q_2(0), P_1(0), P_2(0)) = (1, 1, -\log 2, 0)\,.$$

Si ha quindi che

$$\begin{cases} Q_1(t) = t + 1 \\ Q_2(t) = 1 \\ P_1(t) = -\log 2 \\ P_2(t) = 0 \end{cases}\,.$$

Dobbiamo ora tornare nelle variabili originarie. Utilizzando che

$$q_2^2(t) = Q_2(t) = 1\,, \quad e \quad q_2(0) = 1\,,$$

si ha $q_2(t) = 1$. *Inoltre*

$$Q_1 = \frac{p_1}{2q_1}(q_1^2 + q_2^2) = e^{P_1}(q_1^2 + q_2^2)\,,$$

essendo $q_2(t) = 1$*, si ha*

$$q_1^2 = Q_1 e^{-P_1} - 1 = 2(t+1) - 1 = 2t + 1\,,$$

nuovamente essendo $q_1(0) = 1$*, si ha* $q_1(t) = \sqrt{2t+1}$. *La soluzione dell'equazione del moto sarà quindi*

$$\begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2t+1} \\ 1 \end{pmatrix}\,.$$

Esercizio 5.

Il momento coniugato alla variabile q *è*

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \dot{q} + q \implies \dot{q} = p - q\,,$$

e quindi

$$H(q,p) = p\dot{q} - \mathcal{L} = \frac{1}{2}p^2 - pq - \frac{5}{2}q^2\,.$$

Le equazioni di Hamilton sono

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = p - q \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = p + 5q \end{cases}\,,$$

derivando la prima equazione rispetto al tempo si ha

$$\ddot{q} = \dot{p} - \dot{q} = 6q$$

la cui soluzione è

$$q(t) = Ae^{t\sqrt{6}} + Be^{-t\sqrt{6}}\,,$$

dove A, B *sono costanti arbitrarie dipendenti dai dati iniziali. Ricordando che* $p = q + \dot{q}$*, si ha*

$$p(t) = A(1+\sqrt{6})e^{t\sqrt{6}} + B(1-\sqrt{6})e^{-t\sqrt{6}}\,.$$