FM210 Meccanica Analitica
Soluzioni Tutorato 2

Docente: Guido Gentile, Esercitatrice: Livia Corsi
Tutori: Simone Corriano, Laura Fagotto

14/03/2025

Esercizio 1.
1) $V_1(x) = x^2 - x^3$*:*
(i) *Possiamo scrivere le equazioni del moto del sistema dinamico associate:*

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -V'(x) = 3x^2 - 2x \end{cases}$$

oppure quella del sistema meccanico conservativo:

$$\ddot{x} = -V'(x) = 3x^2 - 2x\,.$$

Inoltre verificare la conservazione dell'energia significa mostrare che

$$\frac{d}{dt}E(x(t), \dot{x}(t)) = 0$$

utilizzando le equazioni del moto.

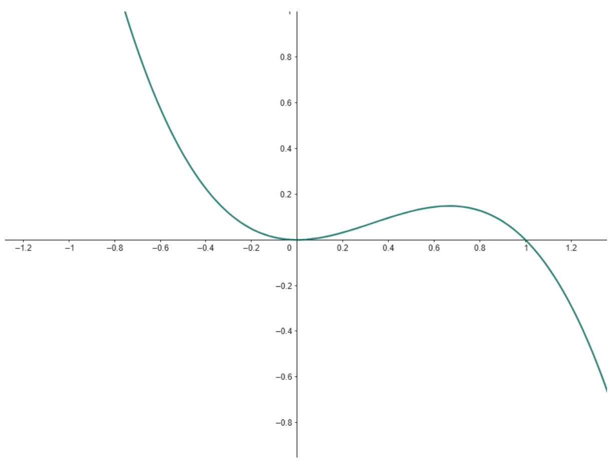
(ii) *Abbiamo*

$$V'(x) = 2x - 3x^2 = 0 \iff x = 0 \quad \vee \quad x = \frac{2}{3}$$

inoltre

$$V''(0) > 0 \quad e \quad V''(2/3) < 0$$

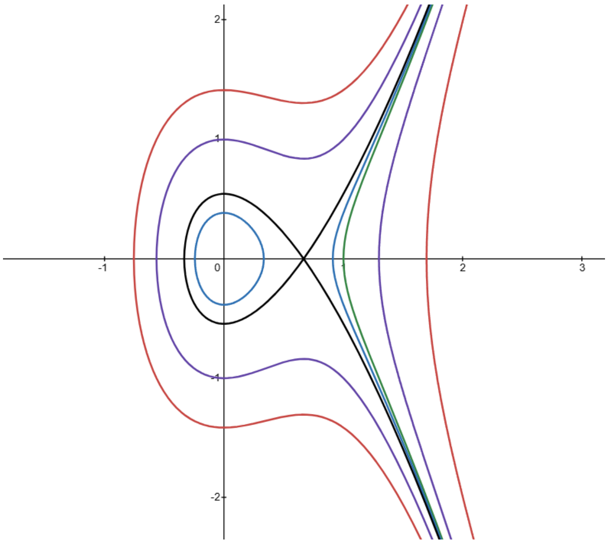
quindi



(iii) *I punti di equilibrio del sistema sono della forma* $(x_0, 0)$ *dove* $V'(x_0) = 0$. *Saranno dunque:*

- $x_0 = 0$ *minimo per* $V \overset{(L-D)}{\Longrightarrow} (0,0)$ *punto di equilibrio stabile;*
- $x_0 = 2/3$ *massimo per* $V \implies (2/3, 0)$ *punto di equilibrio instabile.*

(iv) *Essendo il punto di equilibrio instabile non degenere si ha*



Dove da qui e in avanti le frecce nel piano delle fasi sono verso destra nel semipiano superiore, e verso sinistra nel semipiano inferiore.

2) $V_2(x) = x + \log(1 + x^2)$*:*
Abbiamo che

$$V'(x) = 1 + \frac{2x}{1+x^2} = 0 \iff x = -1$$

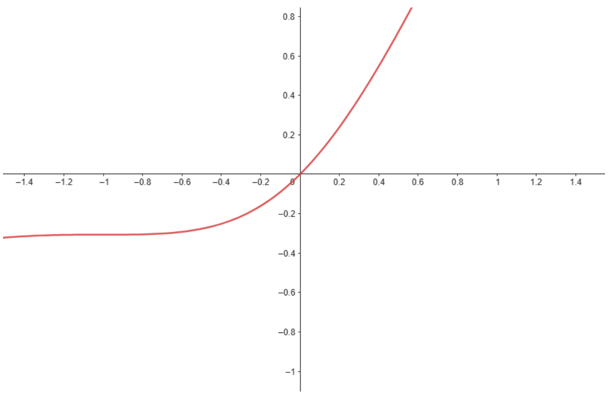
Inoltre poiché

$$\lim_{x\to\pm\infty} V(x) = \pm\infty$$

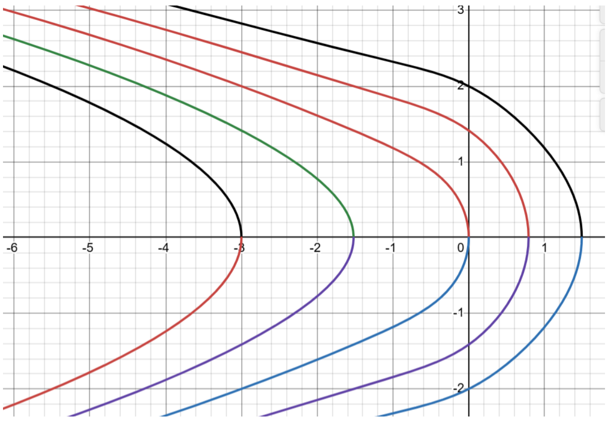
ed esiste un unico punto critico

$$\implies x_0 = -1 \quad \textit{è un punto di flesso}$$

e quindi $x_0 = -1$ *è una configurazione di equilibrio instabile. In particolare*



Si ha quindi



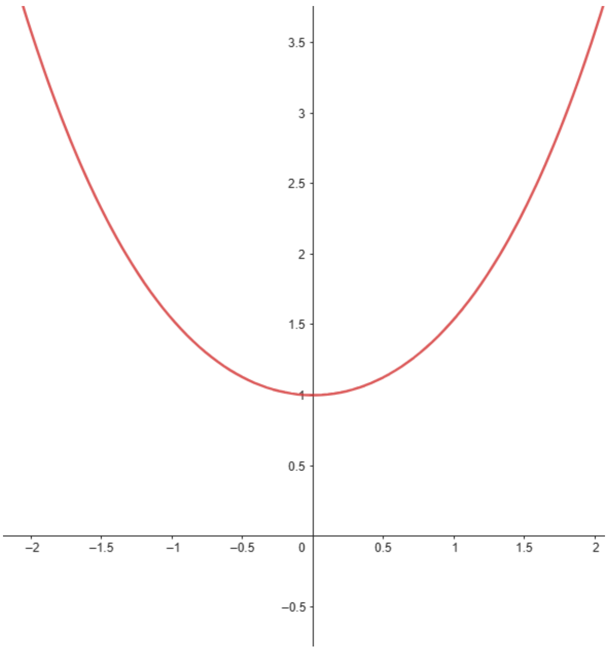
3) $V_3(x) = x^2 + \cos x$*:*
Si ha che

$$V'(x) = 2x - \sin x = 0 \iff x = 0$$

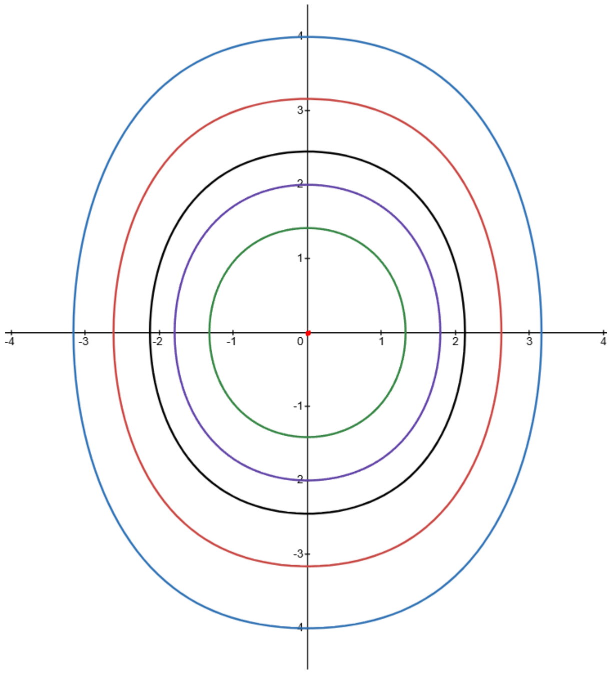
inoltre la funzione è coerciva essendo

$$\lim_{x \to \pm\infty} = +\infty$$

quindi $x_0 = 0$ *è un minimo per* V*, e quindi per il teorema di Lagrange-Dirichlet corrisponde a una configurazione di equilibrio stabile. Inoltre il grafico risulta essere*



e quindi



Esercizio 2.

Avendo $m = 1$, *si ha*

$$\ddot{x} = x - x^3 = -V'(x)$$

Dovendo porre $V(0) = 0$, *si ha*

$$V(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}$$

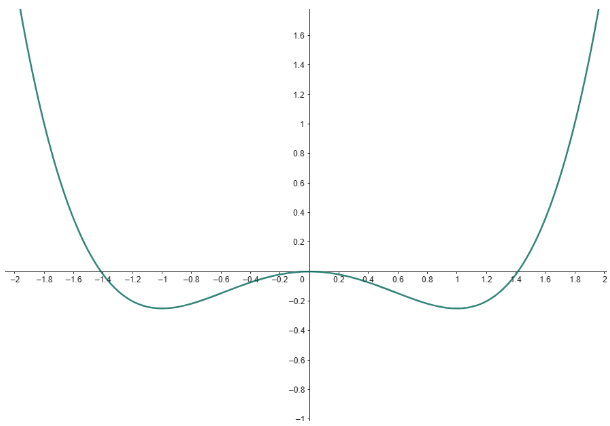
(i) *Una grandezza conservata del moto è l'energia totale ossia*

$$E(x(t), \dot{x}(t)) = \frac{\dot{x}^2}{2} + V(x)$$

infatti calcolando esplicitamente ed utilizzando le eq. del moto si ha

$$\frac{d}{dt}E(x, \dot{x}) = 0$$

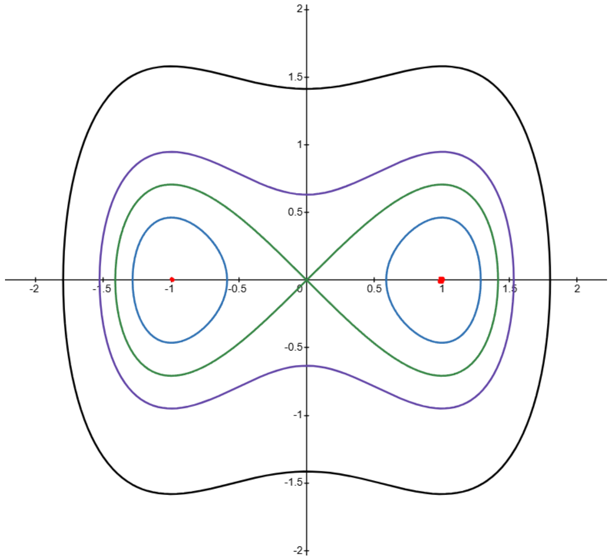
(ii) *Dopo aver tracciato il grafico del potenziale* V:



dove

- $x_0 = 0$ *è un punto di equilibrio instabile non degenere;*
- *e* $x_{1,2} = \pm 1$ *sono punti di equilibrio stabili non degeneri.*

E quindi si ha



(iii) Per i moti periodici prendiamo i valori dell'energia E tali che

$$-\frac{1}{4} < E < 0$$

e prendiamo le posizioni iniziali tali che

$$x_E^- \leq x \leq x_E^+ \text{ oppure } y_E^- \leq x \leq y_E^+$$

con x_E^-, x_E^+ *i valori di* x *negativi tali che* $V(x) = E$ *e* y_E^-, y_E^+ *i valori di* x *positivi tali che* $V(x) = E$. *Fissato E, quindi, i dati iniziali per i moti periodici saranno*

$$A = \left\{(x, \dot{x}) : x_E^- \leq x \leq x_E^+ \text{ oppure } y_E^- \leq x \leq y_E^+, \dot{x} = \pm\sqrt{2(E - V(x))}\right\}$$

(iv) Scegliamo come punto di minimo non degenere $x = 1$, *infatti* $V''(1) = 2$, *si ha quindi che quindi la frequenza nell'approssimazione nelle piccole oscillazioni attorno al punto di eq. è*

$$\omega = \sqrt{\frac{V''(1)}{m}} = \sqrt{2}$$

Esercizio 3.
(i) Si ha che

$$\nabla V(x, y) = \begin{pmatrix} 4x^3 + 4x \\ 12y^3 + 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff (x, y) = (0, 0)$$

(ii) Dimostriamo da subito che

$$W(x, y) := V(x, y) - V(0, 0) = V(x, y)$$

è una funzione di Ljapunov per $(0,0)$*:*
Si ha che

$$W(0,0) = V(0,0) - V(0,0) = 0 \quad e \quad W(x,y) > 0 \, \forall x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

E che

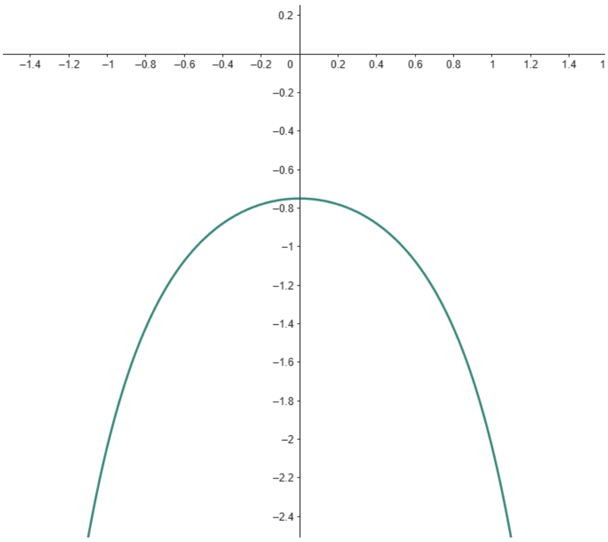
$$\dot{W}(x,y) = \langle \nabla W, (\dot{x}, \dot{y}) \rangle = -\langle \nabla V, \nabla V \rangle = -\left\| \nabla V \right\|^2 \leq 0$$

e per quanto visto al punto (i)

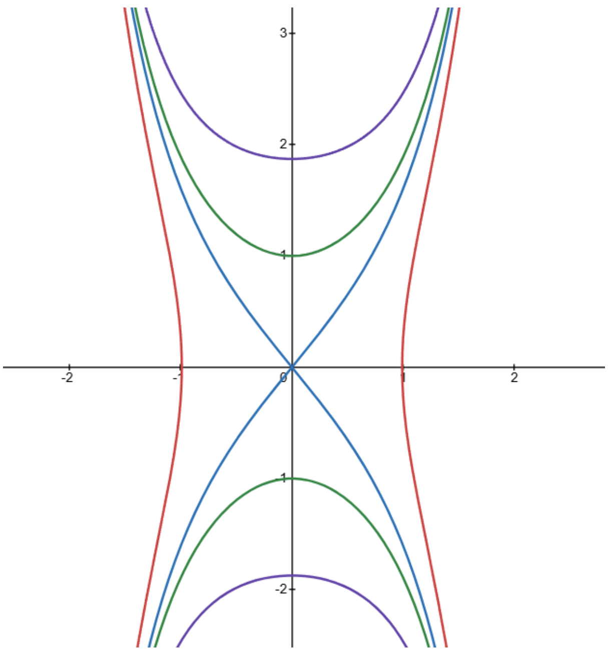
$$\forall x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \dot{W}(x,y) = -\left\| \nabla V \right\|^2 < 0$$

Quindi per il Teorema di Ljapunov si ha che $(0,0)$ *è un punto di equilibrio stabile, ed il bacino di attrazione risulta essere* $\mathbb{R}^2$ *(basta applicare il Teorema su* $B_\delta(0,0)$ *per ogni* $\delta > 0$*, essendo* B_δ *per costruzione contenuta all'interno del bacino di attrazione).*

Esercizio 4.
Sia $V(x) = -\frac{3}{4}e^{x^2}$*: Si ha che*



e quindi



(iii) Non esistono moti periodici, ci sono solo moti aperti e moti asintotici.
(iv) Il moto è definito globalmente poiché

$$\inf_{\mathbb{R}} V(x) = -\infty$$

ed è quindi possibile scegliere qualsiasi valore di energia E.
Inoltre scegliendo una qualunque $E > 0$ si ha che

$$\lim_{x \to +\infty} y(x) = \sqrt{2(E - V(x))} = +\infty$$

ed inoltre

$$T \sim \int_{x_0}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}} = \int_{x_0}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{E + \frac{3}{4}e^{x^2}}} \sim \int_{x_0}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{e^{x^2}}} < \infty$$

e quindi il tempo per arrivare all'infinito è finito.

Esercizio 5.
Per $\alpha \in \mathbb{R}$, $V(x) = \frac{2}{\pi} \arctan\left(\alpha \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)$
Guardare la soluzione dell'anno 22/23, tutorato 7 esercizio 2.

Esercizio 6.
Deriviamo in tempo $\mathcal{W}(x, y)$ e verifichiamo che faccia zero.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathcal{W}(x, y) &= -D\frac{\dot{x}}{x} + C\dot{x} + B\dot{y} - \frac{A}{y}\dot{y} \\ &= -\frac{D(A - By)x}{x} + C(A - By)x + B(Cx - D)y - \frac{A(Cx - D)y}{y} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Esercizio 7.
Sia $\varphi(x, t)$ il flusso del sistema dinamico planare descritto in coordinate polari da

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho - \rho^2 \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases}$$

Partire da un dato iniziale sulla circonferenza unitaria significa scegliere $\rho(0) = 1$, ma allora possiamo osservare che $\rho(t) \equiv 1$ è soluzione. Ossia S^1 è $\varphi-$invariante.
Ora se scegliamo $\rho(0) < 1$ possiamo risolvere l'ODE per separazione di variabili, ottenendo per soluzione

$$\rho(t) = \frac{\rho(0)}{\rho(0) + e^{-t}(1 - \rho(0))} \in [0, 1)\,, \forall t \geq 0$$

ossia la palla B_1 è positivamente $\varphi-$invariante.