

FM210 Meccanica Analitica

Soluzioni Tutorato 3

Docente: Guido Gentile, Esercitatrice: Livia Corsi
Tutori: **Simone Corriano, Laura Fagotto**

8 aprile 2025

Soluzione esercizio 1 Scriviamo le equazioni del sistema dinamico come segue

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\frac{dV}{dx} = 4x^3 - 10x \end{cases}$$

(3.2) **Simmetrie.** Osserviamo che $V(-x) = V(x)$ quindi il potenziale è simmetrico rispetto all'asse verticale.
Andamento all'infinito.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} V(x) = -\infty$$

Punti critici. $\frac{dV}{dx} = 0$ per $x = 0$ e $x = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}$. Inoltre $\frac{dV}{dx} > 0$ per $x < -\sqrt{5/2}$ e per $0 < x < \sqrt{5/2}$, quindi $x = 0$ è un punto di minimo mentre $x = \pm\sqrt{5/2}$ sono punti di massimo del potenziale.

Grafico del potenziale.

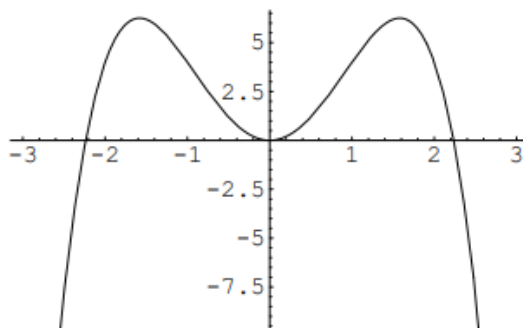


Figura 5: Grafico del potenziale $V(x)$ per $\alpha = 0$. Si noti che il valore di α indica semplicemente la posizione del potenziale rispetto all'asse x .

(3.3) **Punti d'equilibrio e stabilità.** Poiché si ha equilibrio per i punti $(x_0, 0)$ con x_0 punto critico di $V(x)$, per quanto visto al punto precedente, i punti d'equilibrio del sistema dinamico associato saranno

$$P_0 = (0, 0) \quad P_1 = \left(\sqrt{\frac{5}{2}}, 0\right), \quad P_2 = \left(-\sqrt{\frac{5}{2}}, 0\right)$$

Inoltre, dal teorema di Dirichlet sappiamo che i punti stabili sono tutti e soli i punti della forma $(x_0, 0)$ con x_0 punto di minimo del potenziale $V(x)$. Perciò avremo che P_0 è stabile mentre P_1 e P_2 sono instabili. Notiamo inoltre che $V(\sqrt{5/2}) = V(-\sqrt{5/2})$ e che $V''(x) \neq 0$, il che ci sarà utile nell'analisi del piano delle fasi.

(3.4) **Piano delle fasi.** Da $E = y^2/2 + V(x)$ otteniamo $y = \pm\sqrt{2(E - V(x))}$. Perciò nel piano delle fasi avremo curve simmetriche rispetto all'asse x . Inoltre osserviamo che $\inf_{x \in \mathbb{R}} V(x) = -\infty$ quindi il moto nel piano delle fasi è possibile per ogni valore dell'energia. In particolare avremo

- Per $E < V(0)$ due traiettorie aperte.
- Per $E = V(0)$ due traiettorie aperte e il punto d'equilibrio stabile P_0 .
- Per $V(0) < E < V(\sqrt{5/2})$ una traiettoria periodica intorno a P_0 e due traiettorie aperte.
- Per $E = V(\sqrt{5/2})$ due traiettorie eterocline non-cuspidi, quattro traiettorie aperte e i punti instabili P_1 e P_2 .
- Per $E > V(\sqrt{5/2})$ due traiettorie aperte, una tutta contenuta nel semipiano $y > 0$ e l'altra, simmetrica alla prima rispetto all'asse x .

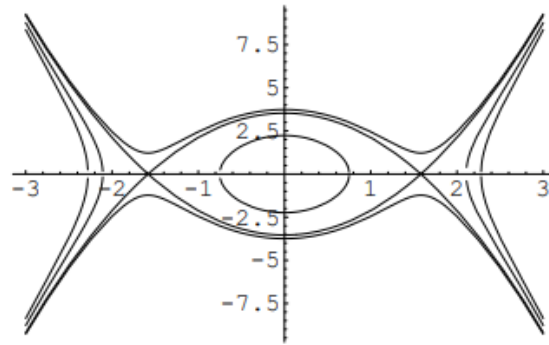


Figura 6: Grafico del piano delle fasi. Osserviamo che il valore di α è irrilevante nel piano delle fasi.

Versi di percorrenza. Da $y = \dot{x}$, sappiamo che il verso di percorrenza, nella direzione x sarà positivo nel semipiano in cui $y > 0$.

(3.5) **Traiettorie periodiche.** Per quanto visto al punto precedente abbiamo traiettorie periodiche per

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -\sqrt{5/2} < x < \sqrt{5/2}, V(0) < \frac{y^2}{2} + V(x) < V(\sqrt{5/2})\}$$

(3.6) **Esistenza di una traiettoria periodica.** Per $\alpha = 4$ abbiamo

$$V(x) = -(x^4 - 5x^2 + 4) = (x^2 - 1)(4 - x^2)$$

quindi $V(0) = -4$ e $V(\sqrt{5/2}) = 21/4$ perciò $-4 < E < 21/4$ e dunque, per quanto visto al punto precedente, esiste una traiettoria periodica a tale livello di energia.

(3.7) **Periodo come integrale definito.** Imponendo $V(x) = 0$ troviamo i punti $x = \pm 1$ e $x = \pm 2$. Affinché sia soddisfatta la condizione di esistenza della traiettoria periodica, deve valere $-\sqrt{5/2} < x < \sqrt{5/2}$, quindi i punti sulla traiettoria periodica sono $x_{\pm} = \pm 1$. Il periodo di tale traiettoria sarà quindi

$$T = \sqrt{2} \int_{-1}^1 \frac{dx}{(x^2 - 1)(x^2 - 4)}$$

Stima del periodo. Notiamo che $E - V(x) = -V(x) = (1 - x^2)(4 - x^2) = (x + 1)(1 - x)(4 - x^2)$ che è quindi della forma $(x - x_-)(x_+ - x)\phi(x)$ con $\phi(x) = 4 - x^2$ e inoltre $3 \leq \phi(x) \leq 4 \forall x \in [-1, 1]$ perciò una stima del periodo è data da

$$\frac{\pi}{\sqrt{2}} \leq T \leq \sqrt{\frac{2}{3}}\pi$$

2. $V'(x) = \alpha x - \beta x^5 = x(\alpha - \beta x^4)$.

Analizziamo cosa accade se una tra α o β è nulla. Se $\alpha = 0$ allora $V'(x) = -\beta x^5$ e quindi l'unico punto stazionario è $x = 0$ che è un massimo del potenziale se $\beta > 0$ e minimo se $\beta < 0$. Se $\beta = 0$ allora $V'(x) = \alpha x$ e quindi l'unico punto stazionario è $x = 0$ che è un massimo del potenziale se $\alpha < 0$ e minimo se $\alpha > 0$.

Supponiamo quindi che nessuno dei due parametri sia nullo.

$x = 0$ è uno zero della derivata del potenziale. Per gli altri zeri dobbiamo dividere 2 casi: Se $\alpha\beta < 0$ allora non ce ne sono altri (e quindi l'unico punto stazionario del potenziale è $x = 0$), mentre se $\alpha\beta > 0$ allora $x_{\pm} = \pm \sqrt[4]{\frac{\alpha}{\beta}}$ sono altri due zeri della funzione. Vediamo quindi che tipo di punti stazionari sono:

$V''(x) = \alpha - 5\beta x^4$. $V''(0) = \alpha$ e $V''(x_{\pm}) = -4\alpha$. Suddividiamo quindi in ulteriori due casi e otteniamo:

- Se $\alpha, \beta > 0$ allora $x = 0$ è un minimo e $x_{\pm}$ massimi
- Se $\alpha, \beta < 0$ allora $x = 0$ è un massimo e $x_{\pm}$ minimi.

Quindi mettendo tutto assieme:

- Se $\alpha = 0$ e $\beta > 0$, $(0, 0)$ è un punto di equilibrio instabile.
- Se $\alpha = 0$ e $\beta < 0$, $(0, 0)$ è un punto di equilibrio stabile.
- Se $\beta = 0$ e $\alpha < 0$, $(0, 0)$ è un punto di equilibrio instabile.
- Se $\beta = 0$ e $\alpha > 0$, $(0, 0)$ è un punto di equilibrio stabile.
- Se $\alpha > 0$ e $\beta < 0$ allora $(0, 0)$ è stabile.
- Se $\alpha < 0$ e $\beta > 0$ allora $(0, 0)$ è instabile.
- Se $\alpha, \beta > 0$ allora $(0, 0)$ è stabile e $(x_{\pm}, 0)$ sono instabili.
- Se $\alpha, \beta < 0$ allora $(0, 0)$ è instabile e $(x_{\pm}, 0)$ sono stabili.

Caso I

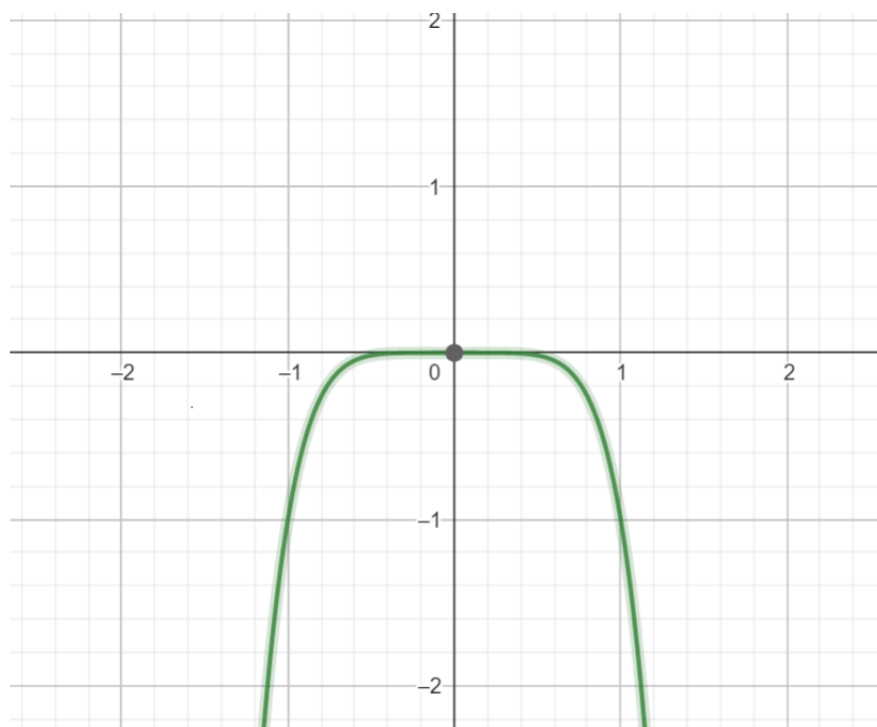


Figura 1: Potenziale caso I.

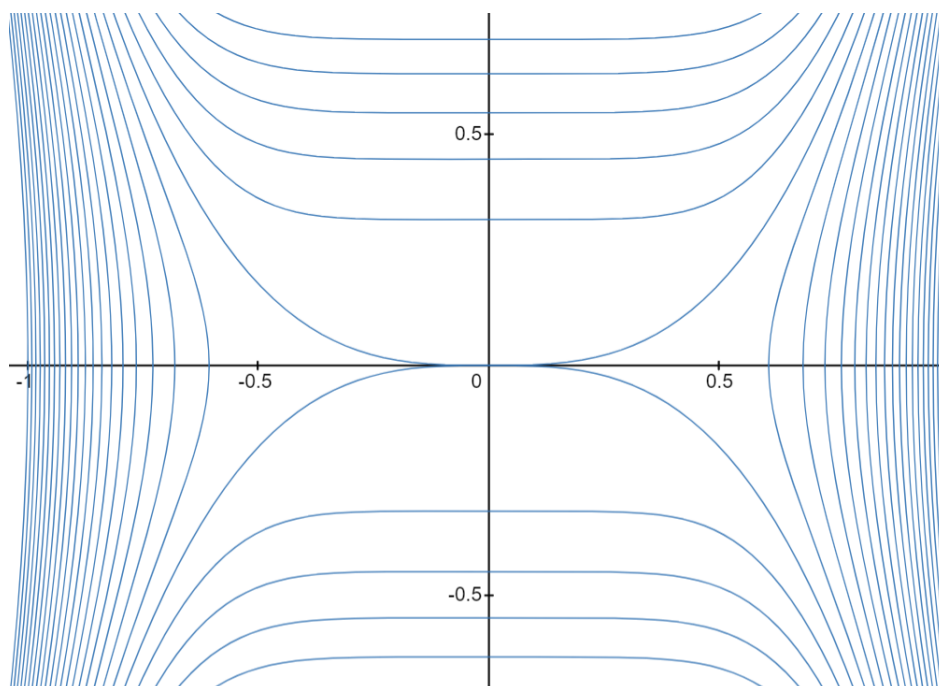


Figura 2: Piano delle fasi caso I.

Caso II

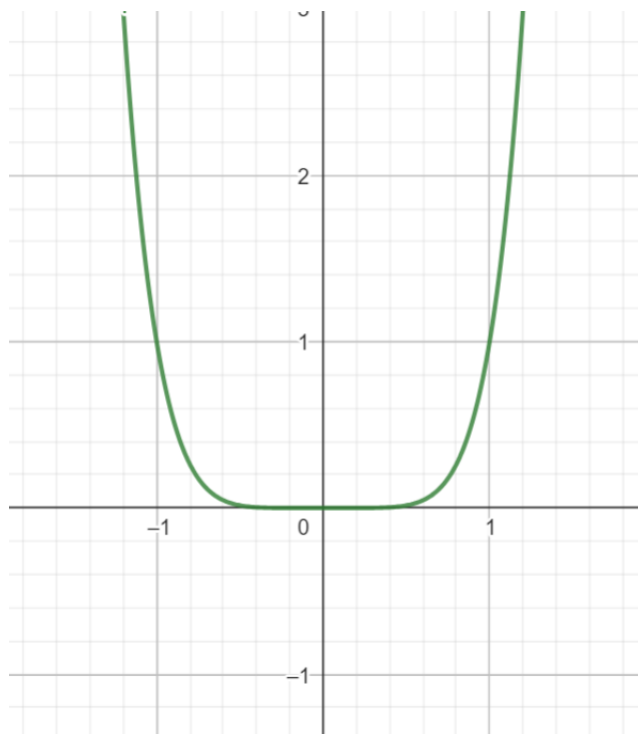


Figura 3: Potenziale caso II.

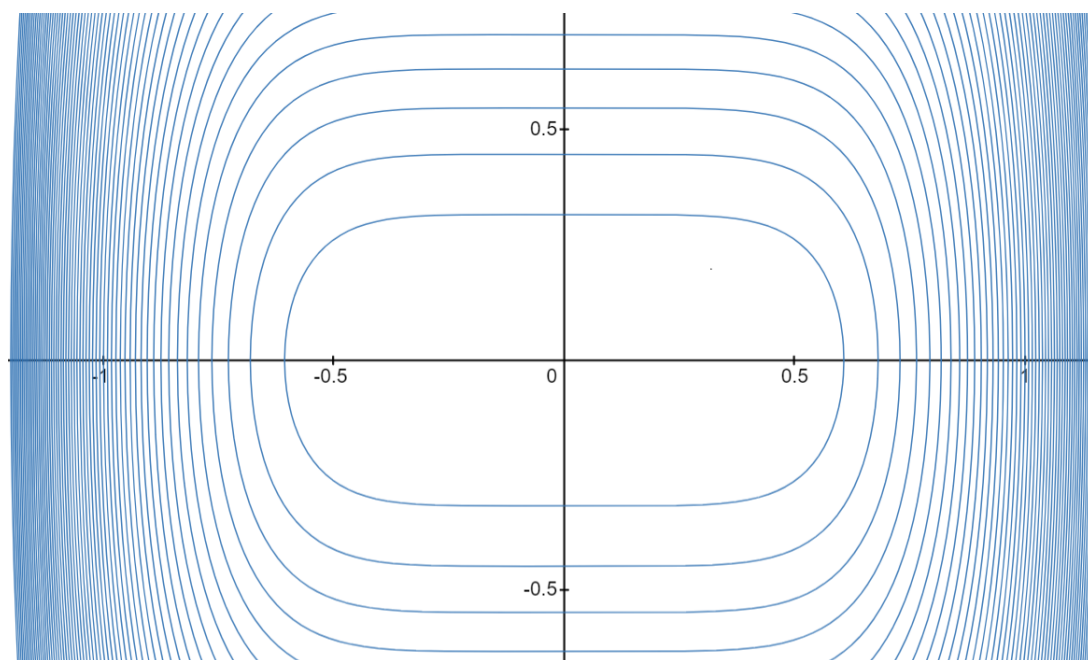


Figura 4: Piano delle fasi caso II.

Caso III e V

Qualitativamente come il caso I.

Caso IV e VI

Qualitativamente come il caso II

Caso VII

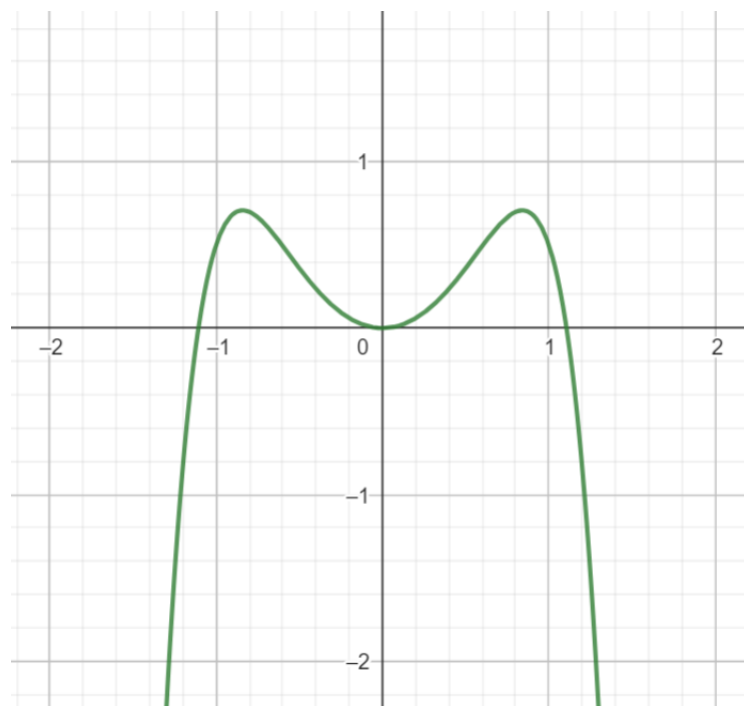


Figura 5: Potenziale caso VII.

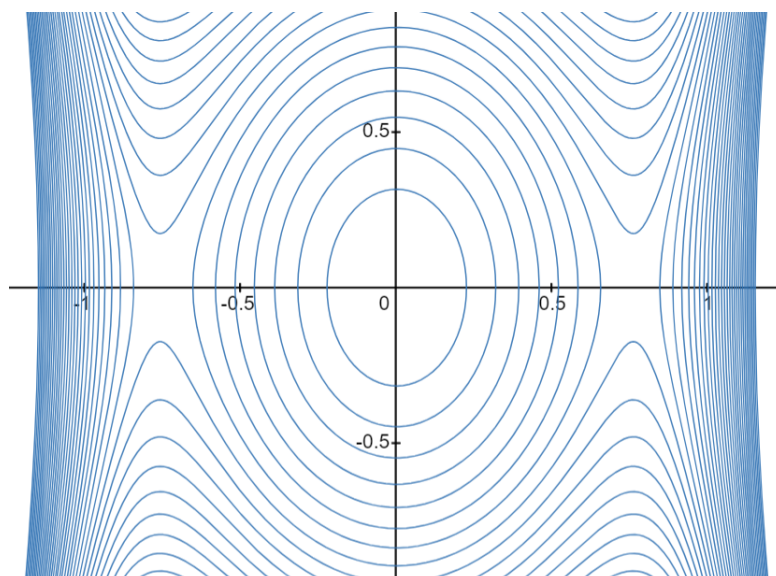


Figura 6: Piano delle fasi caso VII.

Caso VIII

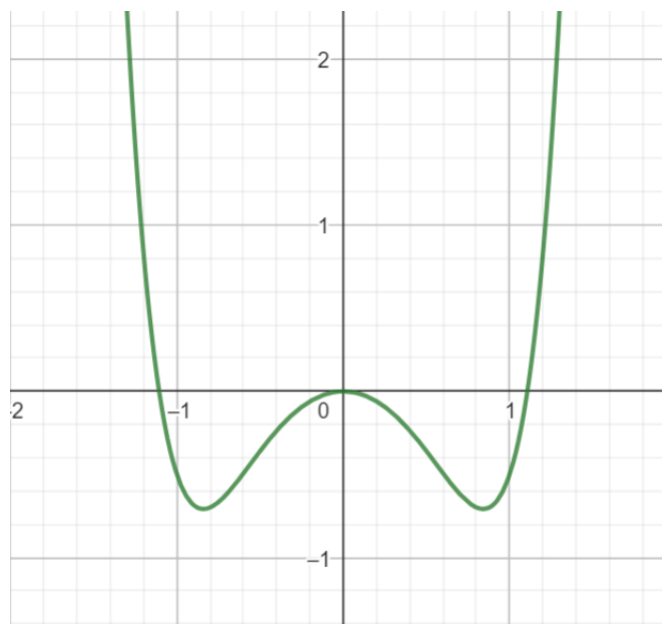


Figura 7: Potenziale caso VIII.

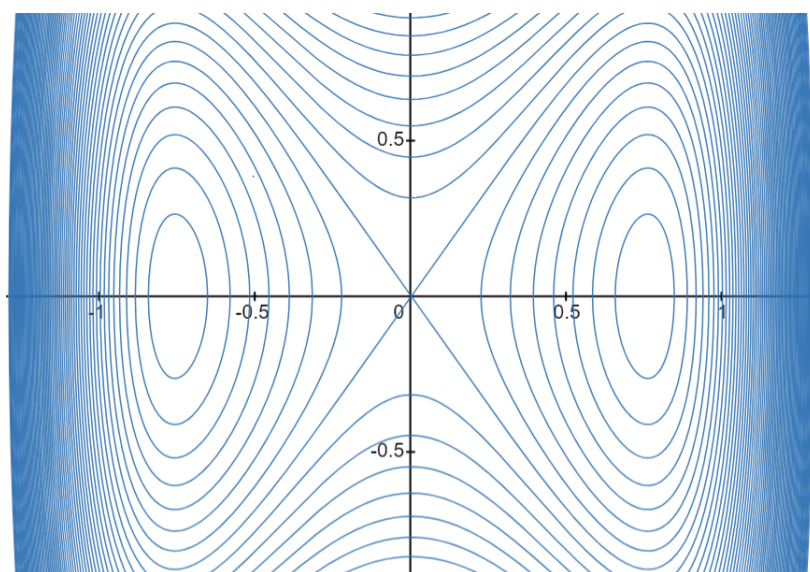


Figura 8: Piano delle fasi caso VIII.

4. La traiettoria con condizioni iniziali $(x(0), y(0)) = (0, 1)$ è periodica nei casi II, IV, V, VII (con l'aggiunta della condizione $\alpha > \beta$), VIII.

5. • Caso II: $\alpha = 0$ e $\beta < 0$. $V(x) = \frac{|\beta|}{6}x^6$. $E(1, 0) = -\frac{|\beta|}{6}$ e $E(1, 0) = -\frac{|\beta|}{6} = \frac{|\beta|}{6}x^6$ in $x = \pm 1$.

$$T = \sqrt{2} \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{\frac{|\beta|}{6}(1-x^6)}}$$

• Caso IV: $\alpha > 0$ e $\beta = 0$. $V(x) = \frac{\alpha}{2}x^2$. $E(1, 0) = -\frac{\alpha}{2}$ e $E(1, 0) = -\frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2}x^2$ in $x = \pm 1$.

$$T = \sqrt{2} \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{\frac{\alpha}{2}(1-x^2)}} = \frac{2}{\sqrt{\alpha}} \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2}{\sqrt{\alpha}} [\arcsin x]_{-1}^1 = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}}$$

• Caso V: $\alpha > 0$ e $\beta < 0$.

$$T = \sqrt{2} \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{\frac{\alpha}{2} + \frac{|\beta|}{6} - \frac{\alpha}{2}x^2 - \frac{|\beta|}{6}x^6}}$$

• Caso VII: $\alpha > \beta > 0$.

$$T = \sqrt{2} \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{6} - \frac{\alpha}{2}x^2 + \frac{\beta}{6}x^6}}$$

• Caso VIII: $\alpha > 0$ e $\beta < 0$.

$$T = \sqrt{2} \int_{\sqrt[3]{\frac{|\beta|}{3\alpha}}}^1 \frac{dx}{\sqrt{\frac{\alpha}{2} + \frac{|\beta|}{6} - \frac{\alpha}{2}x^2 - \frac{|\beta|}{6}x^6}}$$

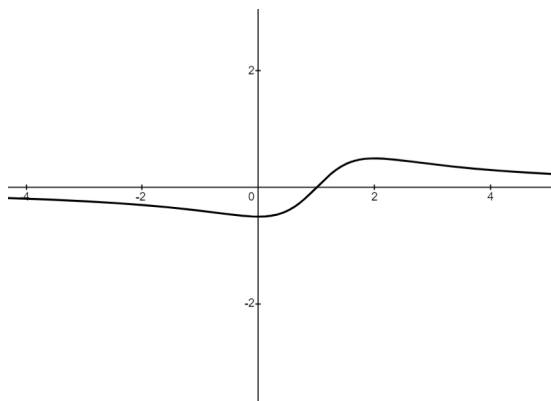
Soluzione esercizio 4 Si consideri il sistema meccanico unidimensionale conservativo descritto dalla seguente equazione:

$$\ddot{x} = \frac{ax^2 - 2x - 2a^2 + 2}{(x^2 - 2x + 2a)^2} \quad \text{con } a > 0$$

Inoltre, si scelga l'energia potenziale in modo che $V(0) = -\frac{1}{2a}$

1. Si consideri esplicitamente il caso $a = 1$

(a) Il grafico dell'energia potenziale $V(x) = \frac{x-1}{x^2-2x+2}$ è il seguente:



- (b) Si determinino i punti di equilibrio del sistema dinamico associato e se ne discuta la stabilità;
La derivata dell'energia potenziale si annulla nei punti:

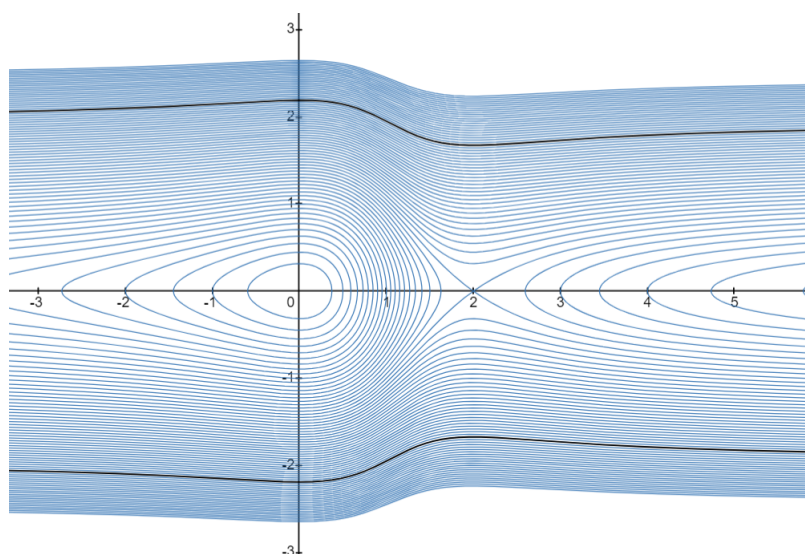
$$x_{1,2} = \frac{1}{a} \pm \frac{1}{a} \sqrt{1 - 2a + 2a^3} \quad a > 0$$

Quindi per $a = 1$ i punti stazionari di $V(x)$ sono:

$$x_1 = 0 \text{ e } x_2 = 1$$

Ora $V''(0) > 0$ mentre $V''(1) < 0$ quindi posso concludere che il punto $(0,0)$ è stabile, mentre il punto $(1,0)$ è instabile.

- (c) La rappresentazione sul piano piano delle fasi $(x, \dot{x})$ è la seguente:



Da cui segue che:

- Per $E = -\frac{1}{2}$ e $x(0) = 0$ il moto è fisso nel punto di equilibrio stabile;
- Per $\frac{1}{2} < E < 0$ e $x(0) \in [0, 1]$ il moto è chiuso e periodico;
- Per $E = 0$ il moto è aperto;
- Per $0 < E < \frac{1}{2}$ abbiamo due moti aperti;
- Per $E = \frac{1}{2}$ e $x(0) = 2$ abbiamo moti aperti asintotici al punto di equilibrio instabile;
- Per $E > \frac{1}{2}$ abbiamo moti aperti

Soluzione esercizio 5 (esercizio sui periodi, repetita iuvant) Si consideri il generico sistema meccanico unidimensionale newtoniano:

$$m\ddot{x} = -V'(x)$$

1. Sul libro [G1] Introduzione ai sistemi dinamici - Volume 1. Equazioni differenziali ordinarie, analisi qualitativa e alcune applicazioni
2. Sul libro [G1] Introduzione ai sistemi dinamici - Volume 1. Equazioni differenziali ordinarie, analisi qualitativa e alcune applicazioni
3. Dato che il periodo è:

$$T = 2 \int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}}$$

Allora:

$$T = 2 \int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}} = 2 \int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}((x - x_-)(x_+ - x)\phi(x))}}$$

E quindi verificando che:

$$\int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{(x - x_-)(x_+ - x)}} = \pi$$

Si arriva facilmente alla tesi.

In generale se esistono due costanti $C_1, C_2 > 0$ tali che $C_1 \leq \phi(x) \leq C_2$ per ogni $x \in [x_-, x_+]$, allora utilizzando ragionamenti analoghi si arriva a dimostrare che una valida stima è:

$$\pi \sqrt{\frac{2m}{C_2}} \leq T \leq \pi \sqrt{\frac{2m}{C_1}}$$

4. La formula è la seguente:

$$L = 2 \int_{x_-}^{x_+} \sqrt{1 + (\dot{y}(x))^2} dx$$

dove $y(x) = \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}$

Soluzione esercizio 6 (BONUS) Si consideri il seguente sistema dinamico planare:

$$\begin{cases} \dot{x} = \partial_y W(x, y) \\ \dot{y} = -\partial_x W(x, y) \end{cases} \quad \text{con } W(x, y) = x^2 + 3y^2 + 2xy + x$$

1. $\frac{d}{dt}W(x(t), y(t)) = \dot{x}\partial_x W(x, y) + \dot{y}\partial_y W(x, y) = 0$, quindi $W(x, y)$ è una costante del moto per il sistema
2. I punti di equilibrio si trovano risolvendo il seguente sistema:

$$\begin{cases} 0 = 6y + 2x \\ 0 = -(2x + 2y + 1) \end{cases}$$

L'unico punto di equilibrio è $(x_0, y_0) = (-\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$ e grazie al teorema di Ljapunov è possibile concludere che è stabile.

