FM210 Meccanica Analitica
Soluzioni Tutorato 4

Docente: Guido Gentile, Esercitatrice: Livia Corsi
Tutori: Simone Corriano, Laura Fagotto

28/03/2025

Esercizio 1. *Per scrivere le equazioni del moto bisogna prima scrivere* V_{eff} *che sarà*

$$V_{eff}(\rho) = V(\rho) + \frac{L^2}{2\rho^2}$$

e l'equazione del moto sarà

$$\ddot{\rho} = -V'_{eff}(\rho).$$

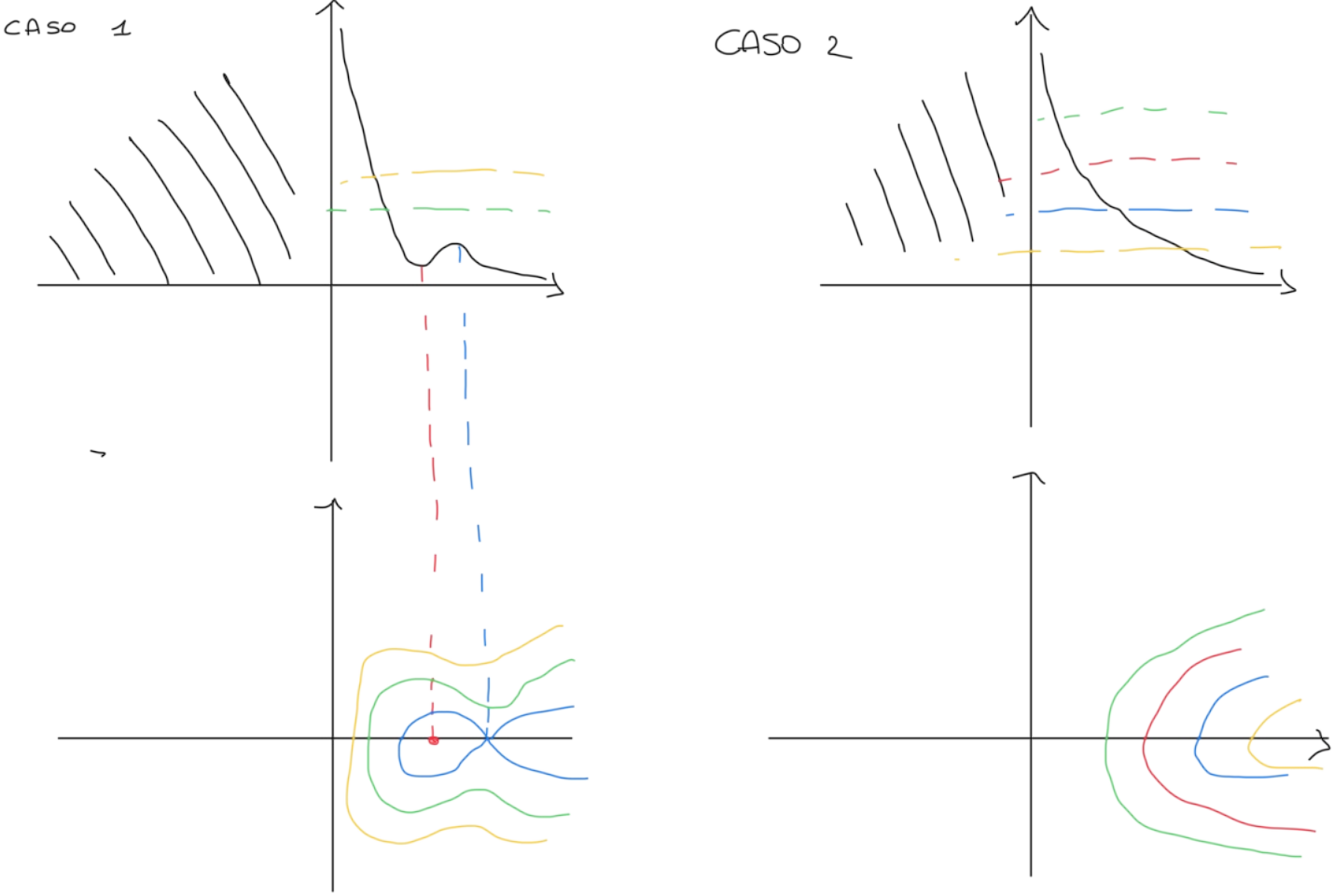
Il grafico di V_{eff} *dipenderà dalla costante* L*. Questo perché, nonostante i limiti per* $\rho \to 0$ *e per* $\rho \to +\infty$ *non dipendano da* L*, i punti di massimo, minimo e flesso invece sono strettamente legati a* L*.*

Calcolando infatti la derivata prima

$$\begin{aligned} V'_{eff}(\rho) &= \frac{d}{d\rho}\left(\frac{\log^2\rho}{\rho^2} + \frac{L^2}{2\rho^2}\right) \\ &= \frac{\frac{4\log\rho}{\rho}\rho^2 - (\log^2\rho + L^2)4\rho}{4\rho^4} \\ &= \frac{\log\rho - \log^2\rho - L^2}{\rho^3} \\ &\geq 0 \qquad \iff \qquad \log\rho - \log^2\rho - L^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Chiamando $\log\rho = x$*, abbiamo che* $x^2 - x - L^2 \leq 0$*. Ora,* $\Delta = 1 - L^2$*, quindi*

- *Se* $\Delta \geq 0$*, si avrà* $\bar{\rho} = e^{\frac{1-\sqrt{1-L^2}}{2}}$ *sarà un punto di minimo (punto stabile) e* $\tilde{\rho} = e^{\frac{1+\sqrt{1-L^2}}{2}}$ *sarà un punto di massimo (punto instabile).*
- *Se* $\Delta < 0$*, non ci sono soluzioni reali, quindi la funzione sarà decrescente per* $\rho > 0$*.*



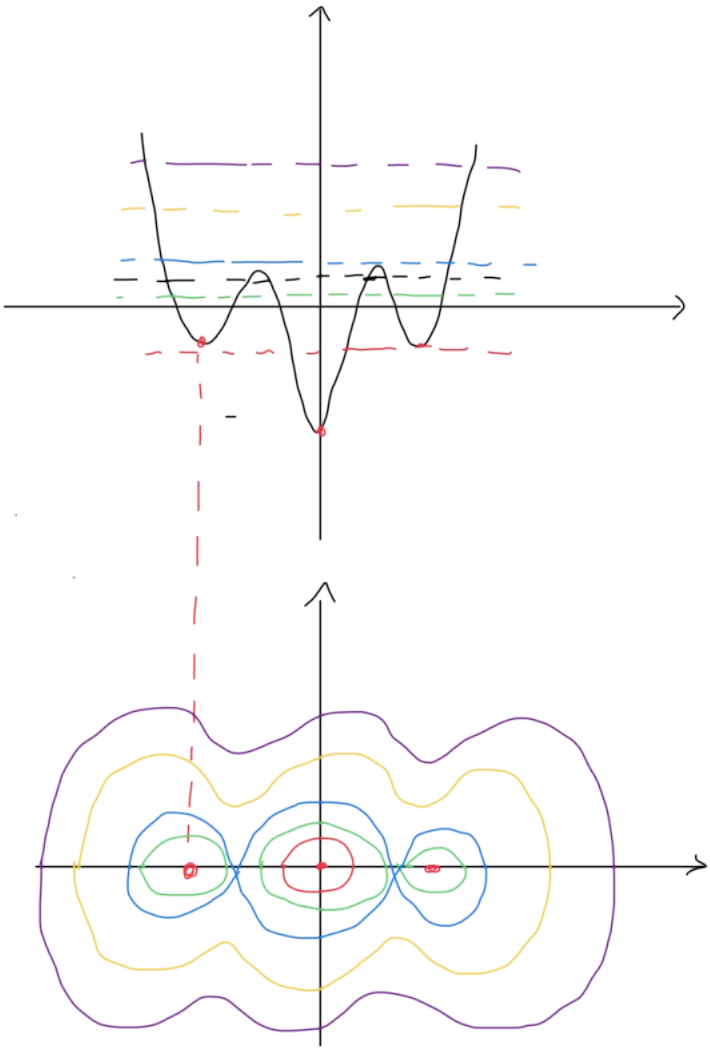
Se siamo nel primo caso, ci sono dei moti periodici a valori di energia E tali che $0 < E < V_{eff}(\tilde{\rho})$ con dati iniziali ρ tali che $\rho < \tilde{\rho}$. Allo stesso valore di energia ma con ρ più grande del massimo, abbiamo moti aperti. Avremo un moto asintotico per $E = V_{eff}(\tilde{\rho})$ e moti aperti per $E > V_{eff}(\tilde{\rho})$.

Per L costantemente uguale a zero, siamo nel primo caso.

Esercizio 2. *I punti di equilibrio di questo potenziale sono*

- $x = 1$ *(punto di minimo, quindi stabile);*
- $x = -1$ *(punto di massimo, quindi instabile);*
- $x = \sqrt{2}$*(punto di massimo, quindi instabile);*
- $x = -\sqrt{2}$ *(punto di minimo, quindi stabile);*
- $x = \sqrt{3}$*(punto di minimo, quindi stabile);*
- $x = -\sqrt{3}$ *(punto di massimo, quindi instabile).*

Dopo aver fatto i limiti per $x \to \pm\infty$, siamo pronti per disegnare il potenziale e il piano delle fasi.



$(x(0), \dot{x}(0)) = (1,0)$ è periodica

perché $E = \frac{1}{2}\cdot 0 + V(1)$

$= 0 + 0 = 0$

$\Rightarrow$ la soluzione è periodica

$(x(0), \dot{x}(0)) = \left(\sqrt{2-\frac{1}{3}}, 0\right)$

$E = \frac{1}{2}\cdot 0 + V\left(\sqrt{2-\frac{1}{3}}\right)$

$= 0 + \left(2-\frac{1}{3}-1\right)\left(2-\frac{1}{3}-2\right)\left(2-\frac{1}{3}-3\right)$

$= \frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)$

$= \frac{8}{27}$

(corrisponde all'atto nero)

$\Rightarrow$ è periodica!

Esercizio 3. *Abbiamo che $V_{eff}(\rho) = V(\rho) + \frac{L^2}{2\rho^2}$; quindi l'equazione del moto diventa:*

$$\ddot{\rho} = -V'_{eff}(\rho) = \rho^3 - 2 + \frac{L^2}{\rho^4}.$$

Vogliamo studiare i punti di stabilità, se ce ne sono, quindi studiamo la derivata prima e, ponendo $V'_{eff}(\rho) \geq 0$ si ha che

$$\rho^6 - 2\rho^3 + L^2 \geq 0.$$

In base al valore di L, distnguiamo tre casi:

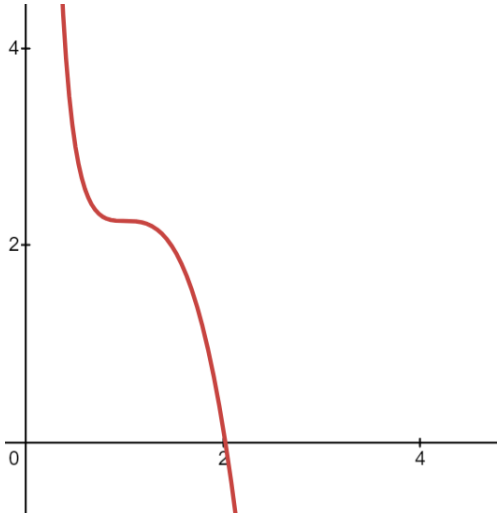
1. $|L| > 1$*: in questo caso* $V'_{eff}(\rho) < 0$ *per ogni* ρ *positivo, quindi* $V_{eff}(\rho)$ *è strettamente crescente e non ha punti di stabilità;*

2. $|L| = 1$*: in questo caso c'è un punto di flesso (punto instabile) in* $\rho = 1$*;*

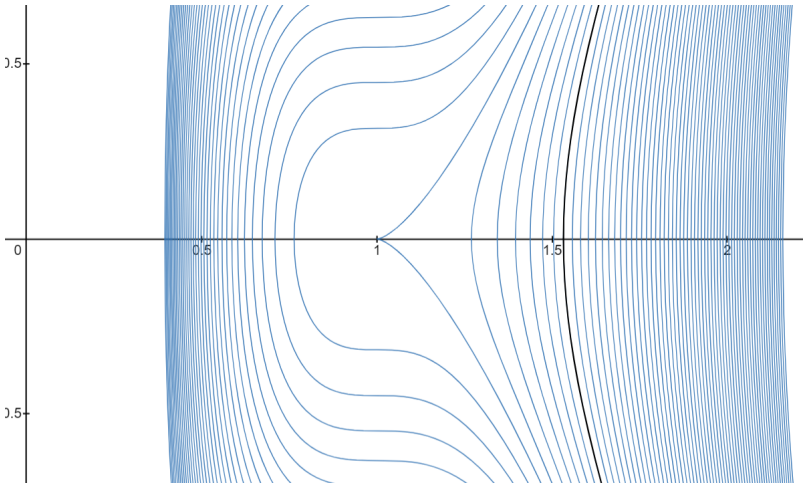
3. $|L| < 1$*: in questo caso ci sono due punti* $\rho_- = \sqrt[3]{1 - \sqrt{1 - L^2}}$ *(punto di massimo, quindi instabile) e* $\rho_+ = \sqrt[3]{1 + \sqrt{1 - L^2}}$ *(punto di minimo, quindi stabile).*

Riportiamo le varie richieste dell'esercizio tramite grafici:

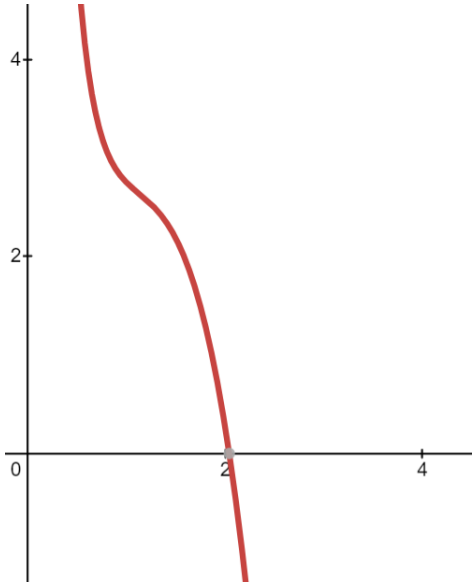
CASO 1: Grafico



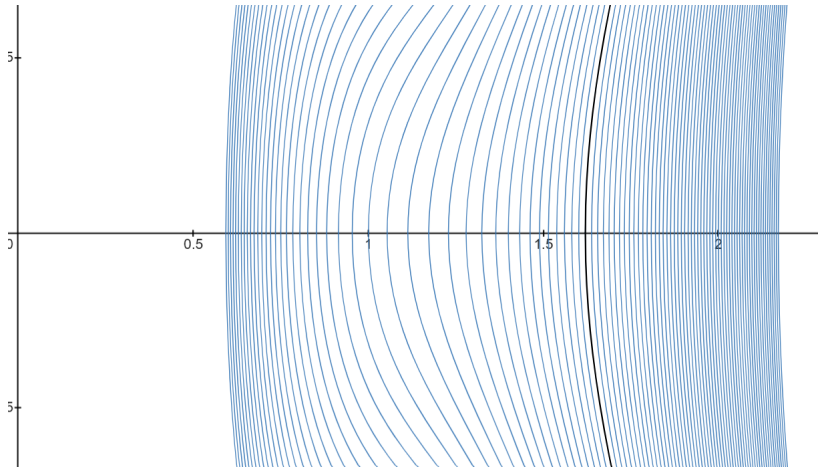
CASO 1: Piano delle fasi



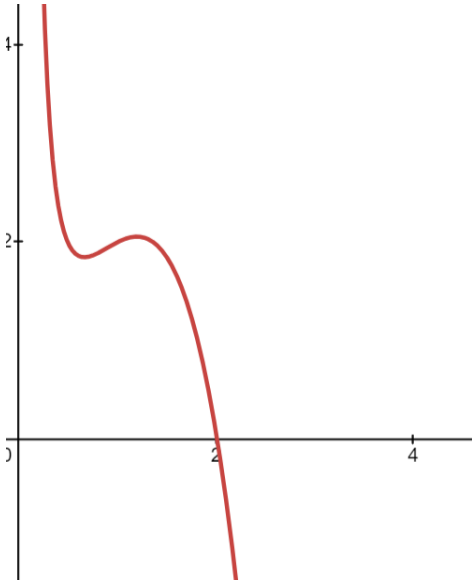
CASO 2 : Grafico



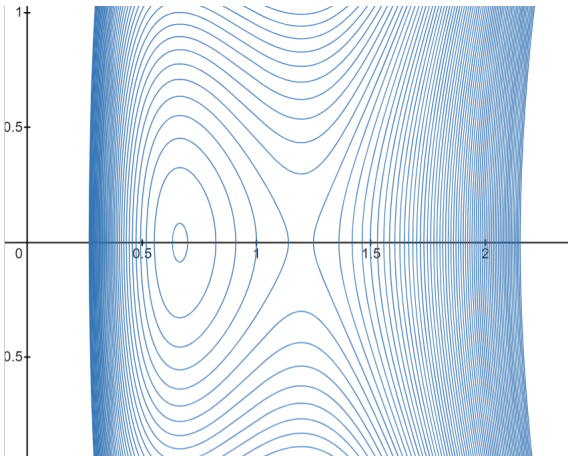
CASO 2: Piano delle fasi



CASO 3 : Grafico



CASO 3: Piano delle fasi



Esercizio 4. *Primo esonero, anno 2021/2022 https://www.mat.uniroma3.it/users/gentile/2021-2022/FM210/index.html*