FM210 Meccanica Analitica
Soluzioni Tutorato 5

Docente: Guido Gentile, Esercitatrice: Livia Corsi
Tutori: Simone Corriano, Laura Fagotto

04/04/2025

Esercizio 1.
Sia

$$V_{\mathit{eff}}(\rho) = 2\log\rho - \frac{1}{2}\log(1+2\rho^2+2\rho^4) + \frac{\beta}{2\rho^2}\,, \quad \beta := \frac{L^2}{\mu} > 0.$$

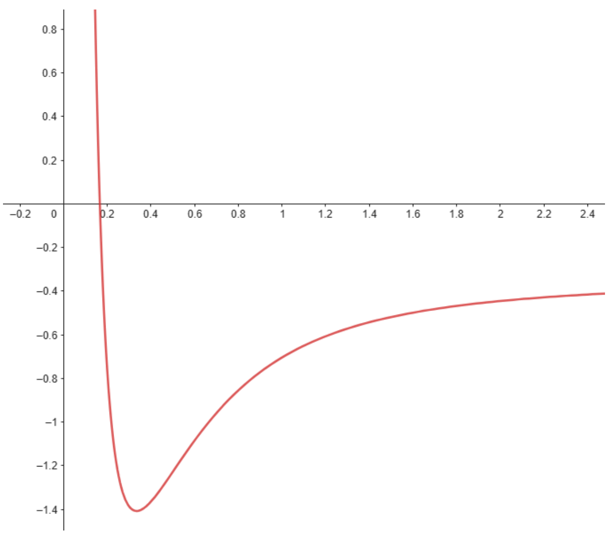
Si ha che

$$\lim_{\rho\to+\infty} V_{\mathit{eff}}(\rho) = -\log\sqrt{2}$$

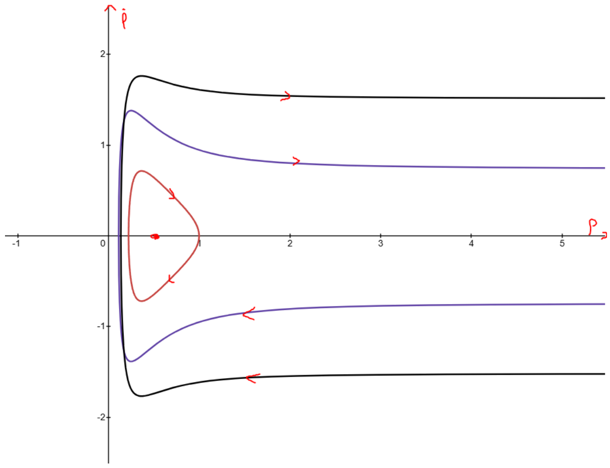
e inoltre, se $\beta \in (0,1)$

$$\frac{d}{d\rho}V_{\mathit{eff}}(\rho) = 0 \iff \rho^2 = \frac{-1+\sqrt{1+4\gamma}}{2}\,, \quad \gamma := \frac{\beta}{2(1-\beta)}$$

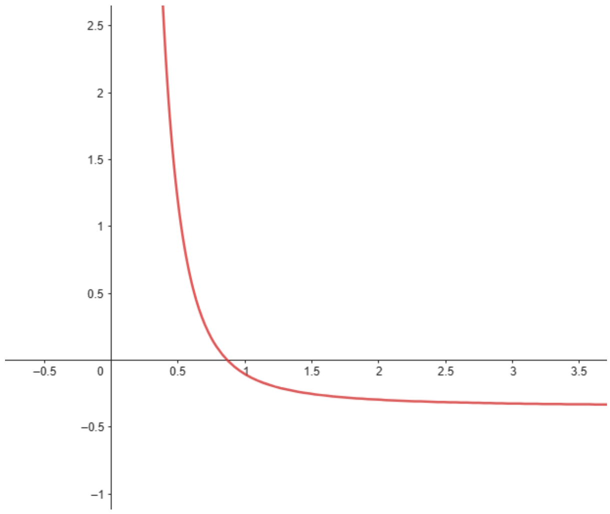
Studiando il segno della derivata prima si ha che essa è negativa prima di $\rho_0 := \sqrt{\frac{-1+\sqrt{1+4\gamma}}{2}}$*, e positiva dopo* ρ_0*, e quindi si ha che* ρ_0 *è un minimo, cioè* $(\rho_0, 0)$ *è un punto di equilibrio stabile. Mentre se* $\beta > 1$ *non si hanno punti critici.*
Quindi se $\beta \in (0,1)$ *si ha*



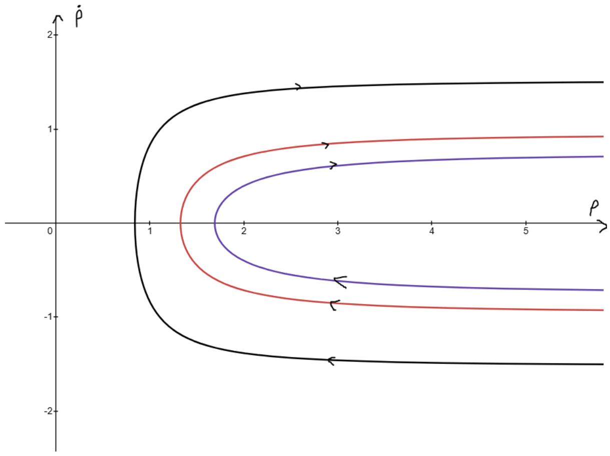
e



e quindi i moti periodici corrispondono ad $E \in (V_{eff}(\rho_0), -\log\sqrt{2})$.
Se invece $\beta > 1$ *si ha*



e



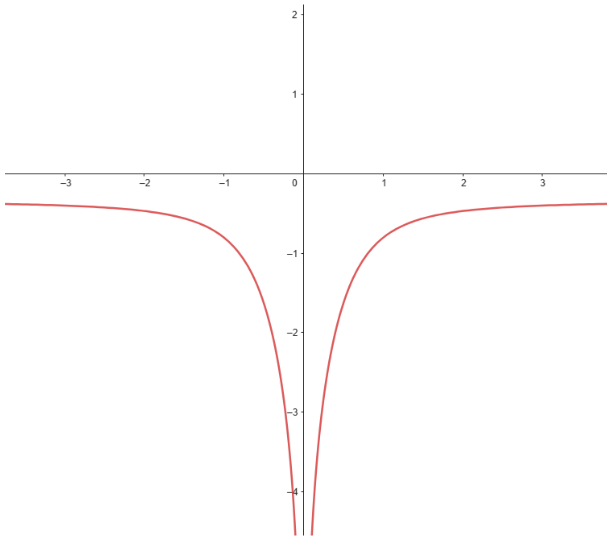
e non si hanno quindi moti periodici.
Per $L = 0$, *ossia se* $\beta = 0$, *il moto si svolge lungo una retta, dobbiamo dunque considerare*

$$V(x) = 2\log|x| - \frac{1}{2}\log(1 + 2x^2 + 2x^4)$$

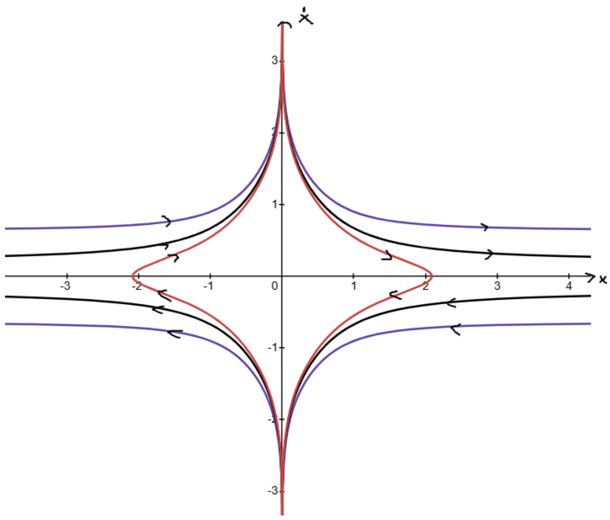
per $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. *Essendo pari, e non definita in zero, studiamo il caso* $x > 0$ *e poi riflettiamo rispetto all'asse* y. *Si ha che:*

$$V'(x > 0) = \frac{2(x^2+1)}{x(2x^4+2x^2+1)} > 0$$

e



e



Esercizio 2.
Il potenziale efficace è dato da:

$$V_{\mathit{eff}}(\rho) = \log \rho - \frac{\alpha}{4\rho^2} + \frac{L^2}{2\rho^2} = \log \rho + \frac{\beta}{2\rho^2}\,, \quad \beta := L^2 - \frac{\alpha}{2}.$$

Sappiamo che i punti in cui si annulla il campo vettoriale sono tutti e soli i punti della forma $(\rho_0, 0)$ *con* ρ_0 *punto critico del potenziale efficace.*
Si ha che, l'equazione $d/d\rho(V_{\mathit{eff}}(\rho)) = 0$ *ha soluzione, se e solo se* $\beta > 0$. *In particolare si avrà che:*

- *$\beta > 0$: un solo punto di equilibrio stabile $P_0 = (\sqrt{\beta}, 0)$.*
- *$\beta \leq 0$: nessun punto di equilibrio.*

Il grafico dell'energia potenziale efficace:

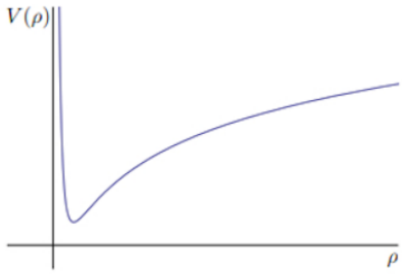


Grafico qualitativo del potenziale efficace per $\beta > 0$

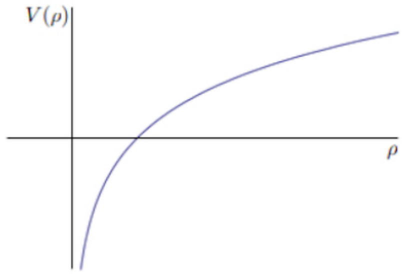
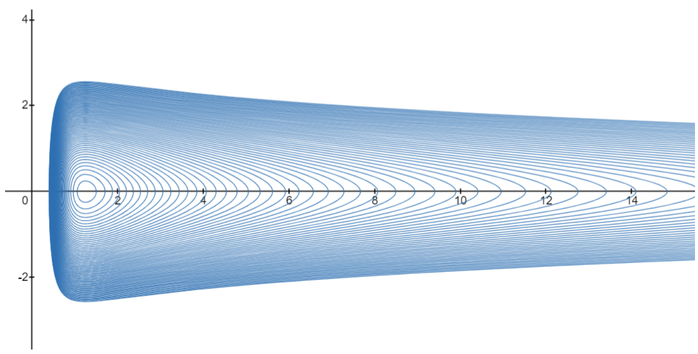


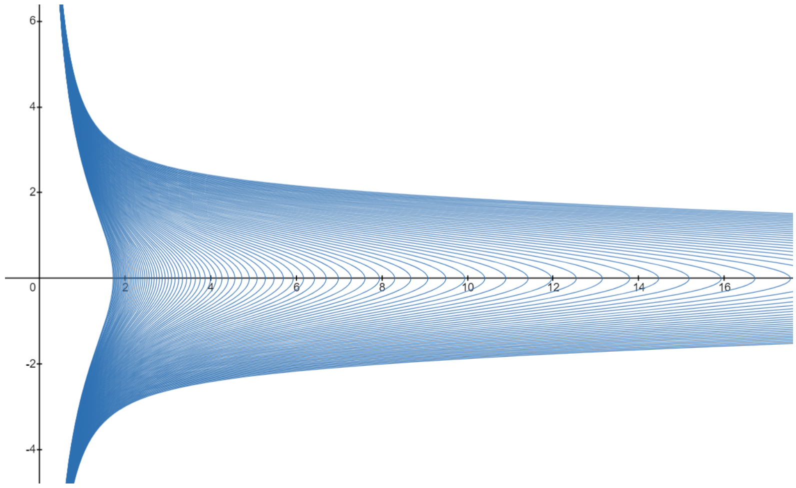
Grafico qualitativo del potenziale efficace per $\beta \leq 0$

Rappresentazione delle curve di livello sul piano $(\rho, \dot{\rho})$:

- *$\beta > 0$:*



- *$\beta \leq 0$:*



Le traiettorie periodiche sono presenti solo per $\beta > 0$ e corrispondono a livelli di energia $E > V_{\text{eff}}(\sqrt{\beta})$.
Infine, chiamando T_0 il periodo della variabile radiale ρ, e

$$\Delta\theta = \int_0^{T_0} \frac{L}{\mu\rho^2(s)}\, ds\,,$$

si ha che il moto complessivo del sistema è periodico se $\Delta\theta$ è un multiplo razionale di 2π, i.e. se

$$\frac{\Delta\theta}{2\pi} \in \mathbb{Q}\,.$$

Esercizio 3.
Il potenziale è

$$V(x) = -\gamma\left(\frac{x^2}{\ell^2} + \frac{x}{\ell}\right) e^{-x/\ell}\,.$$

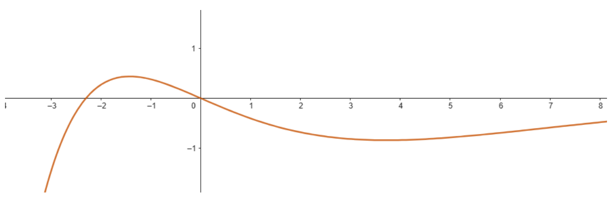
Si ha che

$$V'(x) = \frac{\gamma}{\ell}\left(\frac{x^2}{l^2} - \frac{x}{\ell} - 1\right) e^{-x/\ell} = 0 \iff x_\pm = \frac{\ell}{2}(1 \pm \sqrt{5})\,.$$

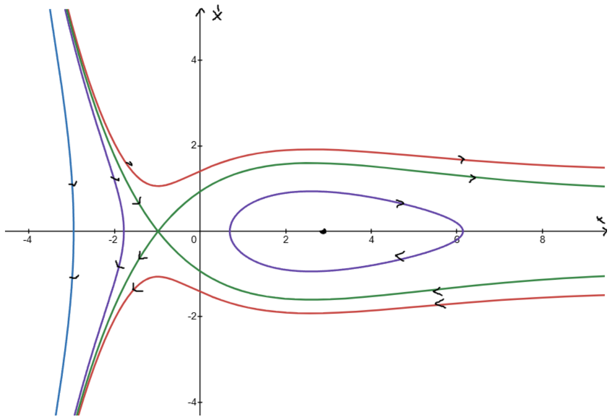
Studiando il segno della derivata osserviamo che è positiva per $x < x_-$ e per $x > x_+$, ed è negativa per $x_- < x < x_+$. Quindi

- x_+ *minimo* $\implies$ $(x_+, 0)$ *eq. stabile;*
- x_- *massimo* $\implies$ $(x_-, 0)$ *eq. instabile.*

Ed il grafico di $V(x)$ è



e quindi



L'unico punto di equilibrio stabile non degenere è x_+, e quindi la frequenza delle piccole oscillazioni attorno ad x_+ sarà

$$\omega = \sqrt{\frac{V''(x_+)}{m}} = \sqrt{\frac{\gamma}{m\ell^2}}\, 5^{1/4} e^{-\frac{1+\sqrt{5}}{4}} \,.$$

Infine si ha che, chiamando $E_1 := V(x_+)$ e $E_2(x_-)$, al variare del livello dell'energia E si ha:

- *Se $E_1 < E < 0$ e $x(0) > 0$, il moto è periodico di periodo*

  $$T = 2\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}}$$

  dove $x_{1,2}$ solo le due radici positive di $E = V(x)$, tali che $0 < x_1 < x_+ < x_2$.

- *Siano $x_\pm$ due soluzioni di $E_1/2 - V(x_\pm) = 0$, e sia*

  $$T := 2\int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(\frac{E_1}{2} - V(x)\right)}} \,.$$

  Possiamo scrivere

  $$E_1/2 - V(x_\pm) = (x - x_-)(x_+ - x)\Phi(x) \,.$$

  Inoltre, $V \in C^2$, quindi $\Phi \in C^2$, e perciò esistono C_1 e C_2 t.c.

  $$C_1 \le \Phi(x) \le C_2 \,, \quad \forall x \in [x_-, x_+] \,.$$

  Il che implica che

  $$\sqrt{\frac{2m\pi^2}{C_2}} \le T \le \sqrt{\frac{2m\pi^2}{C_1}} \,.$$

- *Se $0 \le E < E_2$ e $x(0) > x_-$, il moto è aperto, $x(t)$ tende a $+\infty$ sia nel passato che nel futuro; e il tempo di fuga all'infinito da un punto della traiettoria $x' > x_-$ è*

  $$T_{+\infty} = \int_{x'}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}} = \infty$$

poiché $V(x)$ si comporta asintoticamente come

$$V(x) \sim -\gamma \frac{x^2}{\ell^2} e^{-x/\ell}$$

cosicché, se $E > 0$:

$$T_{+\infty} \sim \int^{+\infty} \sqrt{\frac{m}{2E}}\, dx = \infty$$

e se $E = 0$:

$$T_{+\infty} \sim \int^{+\infty} \sqrt{\frac{m\ell^2}{2\gamma}} \frac{e^{x/2\ell}}{x}\, dx$$

che neanch'essa è integrale a $+\infty$.

- *Se $E < E_2$ e $x(0) < x_-$, il moto è aperto e $x(t)$ tende a $-\infty$ sia nel passato che nel futuro. Il tempo di fuga all'infinito da un punto della traiettoria $x'' < x_-$ è*

$$T_{-\infty} = \int_{-\infty}^{x''} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}}$$

si ha che $V(x) \sim -\gamma \frac{x^2}{\ell^2} e^{-x/\ell}$ e quindi

$$T_{-\infty} \sim \int_{-\infty} \sqrt{\frac{m\ell^2}{2\gamma}} \frac{e^{x/2\ell}}{x}\, dx < \infty$$

poiché integrabile a $-\infty$.

Esercizio 4.

(i)

$$\mathbf{y} \wedge \mathbf{z} = \begin{pmatrix} y_2 z_3 - z_2 y_3 \\ y_3 z_1 - z_3 y_1 \\ y_1 z_2 - z_1 y_2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x} \wedge (\mathbf{y} \wedge \mathbf{z}) = \begin{pmatrix} x_2(y_1 z_2 - z_1 y_2) - x_3(y_3 z_1 - z_3 y_1) \\ x_3(y_2 z_3 - z_2 y_3) - x_1(y_1 z_2 - z_1 y_2) \\ x_1(y_3 z_1 - z_3 y_1) - x_2(y_2 z_3 - z_2 y_3) \end{pmatrix}$$

Sommando e sottraendo nella prima componente $x_1 z_1 y_1$, nella seconda componente $x_2 z_2 y_2$ e nella terza $x_3 z_3 y_3$ otteniamo:

$$\begin{pmatrix} (x_1 z_1 + x_2 z_2 + x_3 z_3) y_1 - (x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3) z_1 \\ (x_1 z_1 + x_2 z_2 + x_3 z_3) y_2 - (x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3) z_2 \\ (x_1 z_1 + x_2 z_2 + x_3 z_3) y_3 - (x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3) z_3 \end{pmatrix} = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{z})\mathbf{y} - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})\mathbf{z}$$

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \wedge \mathbf{z} = \mathbf{x} \cdot \begin{pmatrix} y_2 z_3 - z_2 y_3 \\ y_3 z_1 - z_3 y_1 \\ y_1 z_2 - z_1 y_2 \end{pmatrix} = x_1 y_2 z_3 - x_1 z_2 y_3 + x_2 y_3 z_1 - x_2 z_3 y_1 + x_3 y_1 z_2 - x_3 z_1 y_2$$

Riordinando i termini:

$$y_1 x_3 z_2 - y_1 x_2 z_3 + y_2 x_1 z_3 - y_2 x_3 z_1 + y_3 x_2 z_1 - y_3 x_1 z_2 = \mathbf{y} \cdot \mathbf{z} \wedge \mathbf{x}$$

(ii) In modo analogo si ottiene la seconda identità.
(iii) Infine si ha che:

$$\begin{aligned}
\ddot{\mathbf{r}} \wedge \mathbf{L} &= \ddot{\mathbf{r}} \wedge (\mu\ddot{\mathbf{r}} \wedge \dot{\mathbf{r}}) = (\ddot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}})\mu\mathbf{r} - (\ddot{\mathbf{r}} \cdot \mu\mathbf{r})\dot{\mathbf{r}} = \\
&= (\mu\ddot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}})\mathbf{r} - (\mu\ddot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r})\dot{\mathbf{r}} = (\frac{F(|\mathbf{r}|\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \cdot \dot{\mathbf{r}})\mathbf{r} - (\frac{F(|\mathbf{r}|\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \cdot \mathbf{r})\dot{\mathbf{r}} = \\
&= \frac{F(|\mathbf{r}|\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}[(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}})\mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})\dot{\mathbf{r}}] = \frac{F(\rho)}{\rho}(\rho\dot{\rho}\mathbf{r} - \rho^2\dot{\mathbf{r}}) = F(\rho)(\dot{\rho}\mathbf{r} - \rho\dot{\mathbf{r}})
\end{aligned}$$