FM210 Meccanica Analitica
Soluzioni Tutorato 6

Docente: Guido Gentile, Esercitatrice: Livia Corsi
Tutori: Simone Corriano, Laura Fagotto

11/04/2025

Esercizio 1.
Nel sistema κ il punto O' ha coordinate

$$r(t) = (t, y(t), 0) = (t, t^3 - 6t^2 + 9t, 0)\,.$$

Inoltre, l'angolo $\theta(t)$ che l'asse ξ forma con l'asse x è tale che

$$\tan\theta(t) = \dot{y}(t)\,.$$

Perciò la matrice di rotazione attorno all'asse z è della forma

$$B(t) = \begin{pmatrix} \cos\theta(t) & -\sin\theta(t) & 0 \\ \sin\theta(t) & \cos\theta(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\,, \quad \theta(t) = \arctan(3t^2 - 12t + 9)\,.$$

La trasformazione rigida $D : K \to \kappa$ è quindi data dalla composizione della rotazione B con la traslazione C, definita da $Cx = x + r$.
Utilizzando la notazione

$$q = (x, y, z)\,, \quad Q = (\xi, \eta, \zeta)\,,$$

si ha quindi

$$Q(t) = \begin{pmatrix} a\sin bt \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ed inoltre

$$q(t) = BQ(t) + r(t) = \begin{pmatrix} a\sin bt\cos\theta(t) + t \\ a\sin bt\sin\theta(t) + y(t) \\ 0 \end{pmatrix}\,.$$

La velocità assoluta è data da

$$v = \dot{q} = \begin{pmatrix} ab\cos bt\cos\theta(t) - a\dot{\theta}(t)\sin bt\sin\theta(t) + 1 \\ ab\cos bt\sin\theta(t) + a\dot{\theta}(t)\sin bt\cos\theta(t) + 3t^2 - 12t + 9 \\ 0) \end{pmatrix}\,,$$

dove

$$\dot{\theta}(t) = \frac{6t - 12}{1 + (3t^2 - 12t + 9)^2}\,.$$

La velocità relativa è data da

$$v' = B\dot{Q}\,,$$

dove

$$\dot{Q} = (ab\cos bt,\ 0,\ 0).$$

Si ha quindi

$$v' = \begin{pmatrix} ab\cos bt\cos\theta(t) \\ ab\cos bt\sin\theta(t) \\ 0)\,. \end{pmatrix}$$

La componente traslatoria della velocità di trascinamento è data da

$$v_0 = \dot{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3t^2 - 12t + 9 \\ 0 \end{pmatrix}\,.$$

La componente rotatoria della velocità di trascinamento è data da

$$v_T = \omega \wedge (q - r)\,,$$

dove

$$\omega = (0, 0, \dot{\theta}(t))\,.$$

Quindi, tenuto conto che

$$q - r = (a\sin bt\cos t, a\sin bt\sin t, 0)\,,$$

si ha

$$v_T = \begin{pmatrix} -a\dot{\theta}(t)\sin bt\sin\theta(t) \\ a\dot{\theta}(t)\sin bt\cos\theta(t) \\ 0 \end{pmatrix}\,.$$

Ricordiamo che, un modo per verificare la correttezza dei conti, o per calcolare una componente della velocità mancante, è utilizzare l'identità

$$v = v' + v_0 + v_T\,.$$

La forza di Coriolis F_2 è data da

$$F_2 = -2\Omega \wedge \dot{Q}\,,$$

dove $\Omega = B^T\omega = (0, 0, \dot{\theta}(t))$. Quindi

$$F_2 = (0, -2ab\dot{\theta}(t)\cos bt, 0)\,.$$

La forza centrifuga F_3 è data da

$$F_3 = -\Omega \wedge (\Omega \wedge Q)\,.$$

Poiché

$$\Omega \wedge Q = (0, a\dot{\theta}(t)\sin bt, 0)\,,$$

si ha quindi

$$F_3 = (a\dot{\theta}^2(t)\sin bt, 0, 0)\,.$$

Esercizio 2.

Con le stesse notazioni dell'esercizio precedente si ha

$$r(t) = (\cos\omega t m \sin\omega t, 0)$$

inoltre

$$B(t) = B^{(3)}(\omega t) = \begin{pmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t & 0 \\ \sin\omega t & \cos\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La trasformazione sarà quindi $q = BQ + r$*. Nel sistema mobile risulta quindi*

$$Q(t) = (a\cos\omega' t, a\sin\omega' t, 0),$$

e perciò

$$q(t) = \begin{pmatrix} a\cos(t(\omega+\omega')) + \cos\omega t \\ a\sin(t(\omega+\omega')) + \sin\omega t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Le velocità e le varie componenti saranno:

$$v = \begin{pmatrix} -a(\omega+\omega')\sin(t(\omega+\omega')) - \omega\sin\omega t \\ a(\omega+\omega')\cos(t(\omega+\omega')) + \omega\cos\omega t \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$v' = \begin{pmatrix} -a\omega'\sin(t(\omega+\omega')) \\ a\omega'\cos(t(\omega+\omega')) \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$v_0 = \begin{pmatrix} -\omega\sin\omega t \\ \omega\cos\omega t \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$v_T = \begin{pmatrix} -a\omega\sin(t(\omega+\omega')) \\ a\omega\cos(t(\omega+\omega')) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Per $t = 0$ *si ha*

$$q(0) = (1+a, 0, 0)$$

quindi il moto è periodico se esiste $T > 0$ *tale che*

$$q(T) = (1+a, 0, 0).$$

Data l'espressione di $q(t)$*, si deve avere che*

$$\begin{cases} a\cos(T(\omega+\omega')) + \cos\omega T = 1 + a \\ a\sin(T(\omega+\omega')) + \sin\omega T = 0 \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} (\omega+\omega')T = 2\pi M \\ \omega T = 2\pi N \end{cases}$$

per qualche $M, N \in \mathbb{N}$. Questo è possibile se e solo se $(\omega + \omega')/\omega = M/N$, i.e. se e solo se

$$\frac{\omega + \omega'}{\omega} = 1 + \frac{\omega'}{\omega} \in \mathbb{Q}$$

e quindi la condizione sulle frequenze ω, ω' è che il loro rapporto ω/ω' sia un numero razionale.

Esercizio 3.
Utilizzando le notazioni precedenti si ha:

$$r(t) = (t, t^2, 0)$$

e

$$B(t) = \begin{pmatrix} \cos\theta(t) & -\sin\theta(t) & 0 \\ \sin\theta(t) & \cos\theta(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \theta(t) = \arctan(2t)\,.$$

Nel sistema di riferimento mobile si ha

$$Q(t) = (0, \eta(t), 0)\,,$$

e quindi nel sistema fisso

$$q(t) = BQ(t) + r(t) = \begin{pmatrix} -\sin\theta(t)\eta(t) + t \\ \cos\theta(t)\eta(t) + t^2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Le velocità e le varie componenti sono

$$v = \begin{pmatrix} -\dot\theta(t)\cos\theta(t)\eta(t) - \sin\theta(t)\dot\eta(t) + 1 \\ -\dot\theta(t)\sin\theta(t)\eta(t) + \cos\theta(t)\dot\eta(t) + 2t \\ 0 \end{pmatrix},$$

dove

$$\dot\theta(t) = \frac{2}{1 + 4t^2}\,.$$

Inoltre

$$v' = \begin{pmatrix} -\sin\theta(t)\dot\eta(t) \\ \cos\theta(t)\dot\eta(t) \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$v_T = \begin{pmatrix} -\dot\theta(t)\cos\theta(t)\eta(t) \\ -\dot\theta(t)\sin\theta(t)\eta(t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Poiché il punto P si trovi in ogni istante sull'asse y nel sistema κ si deve avere che $x(t) = 0$, ossia

$$-\sin\theta(t)\eta(t) + t = 0$$

utilizzando le formule richiamate, si ha

$$\sin\theta(t) = \frac{2t}{\sqrt{1+4t^2}}$$

e quindi si deve avere

$$\eta(t) = \frac{t}{\sin\theta(t)} = \frac{1}{2}\sqrt{1+4t^2}\,.$$

Inoltre in corrispondenza di tale moto, per quanto visto prima, si ha

$$y(t) = \cos\theta(t)\eta(t) + t^2 = \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}\left(\frac{1}{2}\sqrt{1+4t^2}\right) + t^2 = \frac{1}{2} + t^2\,.$$

Esercizio 4.
Ancora una volta, con le notazioni degli esercizi precedenti, si ha

$$r(t) = (ut, ut + \sin ut, 0)\,,$$

e, l'angolo $\theta(t)$ che l'asse ξ forma con l'asse x è tale che

$$\tan\theta(t) = \frac{dy}{dx}(x_{O'}(t)) = 1 + \cos ut$$

perciò

$$B(t) = \begin{pmatrix} \cos\theta(t) & -\sin\theta(t) & 0 \\ \sin\theta(t) & \cos\theta(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\,, \quad \theta(t) = \arctan(1+\cos ut)\,.$$

Per ipotesi si ha che

$$Q(t) = (vt, 0, 0)\,,$$

e quindi nel sistema fisso si ha

$$q(t) = BQ(t) + r(t) = \begin{pmatrix} vt\cos\theta(t) + ut \\ vt\sin\theta(t) + ut + \sin ut \\ 0 \end{pmatrix}\,.$$

Per dimostrare che il moto avviene nella regione $x \geq 0$, $y \geq 0$, imponiamo

$$\begin{cases} vt\cos\theta(t) + ut \geq 0 \\ vt\sin\theta(t) + ut + \sin ut \geq 0 \end{cases}$$

che è verificato se $t > 1/u$ (non è detto sia il tempo minimo).
Inoltre le velocità e le varie componenti sono:

$$v = \begin{pmatrix} v\cos\theta(t) - vt\dot\theta(t)\sin\theta(t) + u \\ v\sin\theta(t) + vt\dot\theta(t)\cos\theta(t) + u + u\cos ut \\ 0 \end{pmatrix}\,,$$

dove

$$\dot\theta(t) = \frac{-u\sin ut}{1 + (1+\cos ut)^2}\,.$$

Inoltre

$$v' = \begin{pmatrix} v\cos\theta(t) \\ v\sin\theta(t) \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

$$v_0 = \begin{pmatrix} u \\ u + u\cos ut \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

$$v_T = v - v' - v_0 \, .$$

Infine la forza centrifuga risulta essere

$$F_3 = -\Omega \wedge (\Omega \wedge Q) = (\dot{\theta}^2(t) vt, 0, 0) \, ,$$

mentre la forza di Coriolis

$$F_2 = -2\Omega \wedge \dot{Q} = (0, -2v\dot{\theta}(t), 0) \, ,$$

e la forza inerziale di rotazione

$$F_1 = -\dot{\Omega} \wedge Q = (0, vt\ddot{\theta}(t), 0) \, .$$