FM210 Meccanica Analitica
Soluzioni Tutorato 7

Docente: Guido Gentile, Esercitatrice: Livia Corsi
Tutori: Francesco Artibani, Simone Corriano

09/05/2025

Esercizio 1.
Usiamo come coordinate lagrangiane le ascisse x_1 ed x_2 dei punti P_1 e P_2, rispettivamente, così che

$$P_1 = (x_1, 1)\,, \quad P_2 = (x_2, x_2^2)\,.$$

(*i*) *A patto di rimuovere i termini costanti, la lagrangiana sarà*

$$\mathcal{L} = T - V\,, \quad T = \frac{1}{2}(\dot{x}_1^2 + (1+4x_2^2)\,\dot{x}_2^2\,)\,, \quad V = gx_2^2 + \frac{1}{2}k(x_1^2 + x_2^4 - x_2^2 - 2x_1x_2\,)\,.$$

(*ii*) *Le equazioni di Eulero-Lagrange*

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_1} = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_2} = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} \end{cases}$$

diventeranno quindi

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = k(x_1 - x_2) \\ \ddot{x}_2(1+4x_2^2) + \cancel{4x_2\dot{x}_2^2} = \cancel{4x_2\dot{x}_2^2} - 2gx_2 + k(2x_2^3 - x_2 - x_1) \end{cases}.$$

(*iii*) *Troviamo le configurazioni di equilibrio imponendo $\nabla V = 0$: chiamando $\alpha := g/k$ si avrà che:*

- *se $\alpha \geq 1$, si ha una sola configurazione di equilibrio $(x_1, x_2) = (0,0)$ che è stabile;*
- *se $\alpha < 1$, si hanno $(x_1, x_2) = (0,0)$ instabile e $(x_1, x_2) = \pm(\sqrt{1-\alpha}, \sqrt{1-\alpha})$ entrambe stabili.*

Esercizio 2.
Un punto materiale P di massa m è vincolato a muoversi sotto l'effetto della forza peso (sia g l'accelerazione di gravità) su una superficie sferica liscia di equazione

$$x^2 + y^2 + (z-1)^2 = \ell^2, \qquad \ell > 0.$$

Parametrizzando la superficie di vincolo usando le coordinate sferiche

$$\boldsymbol{q} = \ell \begin{pmatrix} \sin\theta\,\cos\phi \\ \sin\theta\,\sin\phi \\ 1-\cos\theta \end{pmatrix},$$

si completino le seguenti richieste:

(i) *Si scriva la lagrangiana $\mathcal{L}$ del sistema.*

(ii) *Si identifichi una variabile ciclica, se possibile, e si sfrutti ciò per trovare 2 costanti del moto.*

(iii) *Si ricavino le equazioni di Eulero-Lagrange.*

(iv) *Nel caso in cui esista una variabile ciclica, si utilizzi il metodo di Routh per ridurre il numero di gradi di libertà del sistema e si trovi la nuova lagrangiana ridotta.*

Soluzione.

(i) Per trovare la lagrangiana $\mathcal{L}$ del sistema, dobbiamo prima ricavare l'energia cinetica T e l'energia potenziale V.

Calcolo Energia Cinetica

Sappiamo che $\mathrm{T} = \frac{1}{2}\,m\,\dot{\mathbf{q}}^2$. Iniziamo a ricavare $\dot{\mathbf{q}}$.

$$\dot{\mathbf{q}} = \ell \begin{pmatrix} \dot\theta\,\cos\theta\,\cos\phi\, -\, \dot\phi\,\sin\theta\,\sin\phi \\ \dot\theta\,\cos\theta\,\sin\phi\, +\, \dot\phi\,\sin\theta\,\cos\phi \\ \dot\theta\sin\theta \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo ora il modulo quadro della velocità,

$$\begin{aligned} |\dot{\mathbf{q}}|^2 &= \ell^2\left(\dot q_x^2 + \dot q_y^2 + \dot q_z^2\right) = ... \\ &= \ell^2\left(\dot\theta^2 + \dot\phi^2\,\sin^2\theta\right), \end{aligned}$$

da cui segue che

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2}\,m\,\ell^2\left(\dot\theta^2 + \dot\phi^2\,\sin^2\theta\right). \tag{1}$$

Calcolo Energia Potenziale

L'unica forza agente sul punto materiale in esame è la forza peso dovuta all'attrazione gravitazionale. L'espressione per il potenziale gravitazionale è data da $\mathrm{V} = mgh$, dove g rappresenta l'accelerazione di gravità, ed h la quota rispetto all'altezza in cui il potenziale gravitazionale ha valore nullo. Considerando quest'ultimo come il piano $z = 0$, h sarà proprio la coordinata q_z della posizione del punto, per cui

$$\mathrm{V} = mg\ell\,(1-\cos\theta) \tag{2}$$

Espressione della Lagrangiana

Dopo aver trovato le espressioni di energia cinetica in equazione (1), ed energia potenziale in equazione (2), possiamo ricavare l'espressione della lagrangiana del sistema. Ricordando che $\mathcal{L} = \mathrm{T} - \mathrm{V}$, otteniamo che

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\dot{\theta}, \dot{\phi}, \theta, \phi) = \frac{1}{2}\, m\, \ell^2 \left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \, \sin^2\theta\right) - mg\,\ell\,(1 - \cos\theta) \tag{3}$$

(ii) Guardando attentamente la lagrangiana nell'equazione (3), possiamo subito notare che essa non dipende esplicitamente dalla variabile ϕ. ϕ è quindi una **variabile ciclica**, e di conseguenza si ha $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0$.
Da questo, sfruttando le equazioni di Eulero-Lagrange (E-L), possiamo ricavare che

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0,$$

da cui segue che

$$\mathrm{A} := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = m\,\ell^2 \dot{\phi} \sin^2\theta \tag{4}$$

è una costante del moto. Inoltre, nel sistema, varrà la conservazione dell'energia, per cui sarà una costante del moto anche

$$\mathrm{E} = \mathrm{T} + \mathrm{V} = \frac{1}{2}\, m\, \ell^2 \left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \, \sin^2\theta\right) + mg\,\ell\,(1 - \cos\theta)\,. \tag{5}$$

Usando le equazioni di E-L che calcoleremo nel prossimo punto è possibile dimostrare facilmente che $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{E} = 0$

(iii) Ricaviamo le equazioni di E-L, ricordando che dobbiamo risolvere

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}\right) = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} \end{cases}$$

prima calcoliamo singolarmente le derivate parziali della lagrangiana:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \mathrm{A} = m\,\ell^2 \dot{\phi} \sin^2\theta, \\ &\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0, \\ &\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = m\,\ell^2 \dot{\theta}, \\ &\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = m\,\ell^2 \dot{\phi}^2 \sin\theta\, \cos\theta - mg\,\ell \sin\theta, \end{aligned}$$

ora deriviamo nel tempo $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}$ e $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}$

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\phi}\right) &= m\,\ell^2\ddot\phi\sin^2\theta\,+\,2m\,\ell^2\dot\theta\,\dot\phi\sin\theta\,\cos\theta,\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\theta}\right) &= m\,\ell^2\ddot\theta.
\end{aligned}
$$

Otteniamo quindi che le equazioni del moto sono

$$
\begin{cases}
m\,\ell^2\ddot\phi\sin^2\theta\,+\,2m\,\ell^2\dot\theta\,\dot\phi\sin\theta\,\cos\theta = 0\\
m\,\ell^2\ddot\theta = m\,\ell^2\dot\phi^2\sin\theta\,\cos\theta - mg\,\ell\sin\theta
\end{cases}
\tag{6}
$$

(iv) Come abbiamo visto nei punti precedenti, ϕ è una variabile ciclica e A è la costante del moto legata ad essa. È banale verificare che anche la seconda condizione del teorema di Routh, ovvero che

$$
\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial^2\dot\phi} = m\,\ell^2\sin^2\theta \neq 0,
$$

quindi, seguendo il metodo di Routh, possiamo riscrivere la lagrangiana ridotta, dipendente solo da θ e $\dot\theta$ come

$$
\mathcal{L}_R(\dot\theta,\theta) = \left(\mathcal{L}(\dot\theta,\dot\phi,\theta) - \mathrm{A}\cdot\dot\phi\right)\Big|_{\dot\phi = f(\dot\theta,\theta)}.
$$

Ricaviamo $f(\dot\theta,\theta)$ dalla 4, e otteniamo che

$$
\dot\phi = f(\dot\theta,\theta) \coloneqq \frac{\mathrm{A}}{m\,\ell^2\,\sin^2\theta}.
\tag{7}
$$

Quindi la lagrangiana ridotta sarà

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_R(\dot\theta,\theta) &= \left(\frac{1}{2}m\,\ell^2\left(\dot\theta^2+\dot\phi^2\,\sin^2\theta\right) - mg\,\ell\,(1-\cos\theta) - \dot\phi\mathrm{A}\right)\Bigg|_{\dot\phi=\frac{\mathrm{A}}{m\,\ell^2\,\sin^2\theta}}\\
&= \frac{1}{2}m\,\ell^2\dot\theta^2 + \frac{\mathrm{A}}{2m\,\ell^2\,\sin^2\theta} - mg\,\left(1-\cos\theta\right)
\end{aligned}
$$

Esercizio 3.
Con le coordinate lagrangiane suggerite dal testo si ha

$$
P_1 = (\sin\theta_1, 1-\cos\theta_1)\,,\quad P_2 = (\sin\theta_2, 1-\cos\theta_2)\,,
$$

$$
P_3 = (x_1, 0)\,,\quad P_4 = (x_2, 0)\,,\quad P_5 = (0, y)\,.
$$

(*i*) *Trascurando i termini costanti la lagrangiana sarà*

$$
\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot\theta_1^2+\dot\theta_2^2+\dot x_1^2+\dot x_2^2+\dot y^2) -
$$

$$
-mg(y-\cos\theta_1-\cos\theta_2) - k(x_1^2+x_2^2+y^2-x_1\sin\theta_1-\cos\theta_1-x_2\sin\theta_2-\cos\theta_2)\,.
$$

E quindi le equazioni di Eulero-Lagrange saranno

$$\begin{cases} m\ddot{\theta}_1 = -mg\sin\theta_1 + kx_1\cos\theta_1 - k\sin\theta_1 \\ m\ddot{\theta}_2 = -mg\sin\theta_2 + kx_2\cos\theta_2 - k\sin\theta_2 \\ m\ddot{x}_1 = -2kx_1 + k\sin\theta_1 \\ m\ddot{x}_2 = -2kx_2 + k\sin\theta_2 \\ m\ddot{y} = -2ky - mg \end{cases}$$

(ii) Come prima per trovare i punti di equilibrio imponiamo $\nabla V = 0$, così facendo, chiamando $y_0 = (mg)/(2k)$, con la notazione $(\theta_1, \theta_2, x_1, x_2, y)$ si avranno 4 configurazioni di equilibrio: $(0,0,0,0,y_0)$, $(0,\pi,0,0,y_0)$, $(\pi,0,0,0,y_0)$, $(\pi,\pi,0,0,y_0)$.
Per studiare la stabilità dei punti trovati osserviamo che la lagrangiana si disaccoppia in 3 lagrangiane $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3$ nel seguente modo:

$$\begin{cases} \mathcal{L}_1(\theta_1, x_1, \dot{\theta}_1, \dot{x}_1) = \frac{1}{2}m(\dot{\theta}_1^2 + \dot{x}_1^2) + mg\cos\theta_1 - k(x_1^2 - x_1\sin\theta_1 - \cos\theta_1) \\ \mathcal{L}_2(\theta_2, x_2, \dot{\theta}_2, \dot{x}_2) = \frac{1}{2}m(\dot{\theta}_2^2 + \dot{x}_2^2) + mg\cos\theta_2 - k(x_2^2 - x_2\sin\theta_2 - \cos\theta_2) \\ \mathcal{L}_2(y, \dot{y}) = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 - mgy - ky^2 \end{cases} .$$

Quindi è sufficiente studiare i 3 sistemi disaccoppiati. Otteniamo così che l'unica configurazione di equilibrio stabile è $(0,0,0,0,y_0)$, e le altre 3 sono instabili.
(iii) Per calcolare le reazioni vincolari che agiscono sul punto $P_3 = (x_3, y_3)$ nella configurazione data dal testo, consideriamo:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_3 = f_x + R_x \\ m\ddot{y}_3 = f_y + R_y \end{cases}$$

dove, tenendo conto del vincolo, si ha $P_3 = (x_3, y_3) = (x_1, 0)$. Scriviamo quindi il potenziale non vincolato, che chiameremo U, che assumerà la forma

$$U = \frac{1}{2}k((1-x_3)^2 + (1-y_3)^2 + x_3^2 + (y_3 - y_0)^2) + mgy_3 + (\textit{termini indipendenti da } x_3,\ y_3\,)$$

Scrivendo $f = (f_x, f_y) = -\nabla U$, si avrà

$$f_x = k((1-x_3) - x_3)\,, \quad f_y = k((1-y_3) - (y_3 - y_0)) - mg\,.$$

Calcolando in $(x_3, y_3) = (1, 0)$ e usando quanto detto in precedenza si ottiene

$$\begin{pmatrix} R_x \\ R_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3mg}{2} - k \end{pmatrix} .$$

(iv) Nella nuova configurazione dobbiamo aggiungere alla lagrangiana il potenziale dato dalla forza centrifuga

$$-\frac{1}{2}m\omega^2(x_1^2 + x_2^2)$$

ottenendo

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{y}^2) - (mgy + k(x_1^2 + x_2^2 + y^2 - x_1 + x_2) - \frac{1}{2}m\omega^2(x_1^2 + x_2^2))\,.$$

Disaccoppiando la lagrangiana come prima nel modo ovvio, si ottiene una solo configurazione di equilibrio

$$(x_1, x_2, y) = \left(\frac{k}{\alpha}, -\frac{k}{\alpha}, y_0\right)$$

purché $\alpha := 2k - m\omega^2 \neq 0$.
(v) Studiando la derivata seconda dei 3 potenziali si ottiene quindi che

- *se* $\alpha > 0$, *i.e.* $2k > m\omega^2$, *la configurazione di equilibrio è stabile;*
- *se* $\alpha < 0$, *la configurazione di equilibrio è instabile.*

Per $\alpha = 0$ *dobbiamo studiare separatamente. Il potenziale in questo caso diventa*

$$V = kx_1 - kx_2 - mgy - ky^2$$

Così che $\nabla V \neq 0$ *e quindi il sistema non ammette punti di equilibrio.*
(vi) Il procedimento è il medesimo del punto (iii) ricordando però che in questo caso la forza ha anche un contributo $m\omega^2 x_3$ *alla componente lungo* x *e la posizione del punto* P_5 *non è fissata.*
Possiamo inoltre notare che per il Principio di d'Alambert la reazione vincolare deve essere ortogonale al vincolo e la componente della forza nella direzione verticale non è modificata dalla forza centrifuga, il che ci evita il calcolo di R_x.