

FM210 Meccanica Analitica

Soluzioni Tutorato 8

Docente: Guido Gentile, Esercitatrice: Livia Corsi
Tutori: Francesco Artibani, Simone Corriano

16/05/2025

Esercizio 1.

Un sistema meccanico è costituito da un disco omogeneo di raggio $r = 1$ e massa $M = 3$ e da un punto materiale P di massa $m = 2$, vincolati a muoversi nel piano (x, y) nel modo seguente:

- il disco rotola senza strisciare all'interno di una circonferenza che ha centro O nell'origine e raggio $R = 3$, mentre il punto P si muove lungo la circonferenza stessa;
- una molla di lunghezza a riposo trascurabile e costante elastica $k > 0$ collega il punto P al centro di massa C del disco;
- sul sistema agisce inoltre la forza peso (si indichi con g l'accelerazione di gravità).

Si completino le seguenti richieste:

- Si scrivano la lagrangiana $\mathcal{L}$ del sistema e le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange, utilizzando come coordinate lagrangiane gli angoli che i segmenti OC e OP formano con l'asse y discendente.
- Si determinino le configurazioni di equilibrio e se ne discuta la stabilità.
- Si calcoli la forza vincolare che agisce sul punto P .

Con le coordinate lagrangiane suggerite nel testo, ed usando come convenzione di considerare gli angoli in senso antiorario si ha che

$$P = (3 \sin \theta_1, -3 \cos \theta_1), \quad C = (2 \sin \theta_2, -2 \cos \theta_2).$$

(i) La lagrangiana sarà quindi

$$\mathcal{L} = T - V,$$

con

$$T = \frac{1}{2}m(9\dot{\theta}_1^2) + \frac{1}{2}M(4\dot{\theta}_2^2) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}Mr^2\right)\left(\frac{R-r}{r}\right)^2\dot{\theta}_2^2,$$
$$V = -g(3m \cos \theta_1 + 2M \cos \theta_2) - 6k \cos(\theta_1 - \theta_2).$$

Quindi

$$\mathcal{L} = 9(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) + 6g(\cos \theta_1 + \cos \theta_2) + 6k \cos(\theta_1 - \theta_2).$$

Le equazioni di Eulero-Lagrange saranno quindi

$$\begin{cases} 3\ddot{\theta}_1 = -g \sin \theta_1 - k \sin(\theta_1 - \theta_2) \\ 3\ddot{\theta}_2 = -g \sin \theta_2 + k \sin(\theta_1 - \theta_2) \end{cases}.$$

(ii) Per ottenere le configurazioni di equilibrio dobbiamo imporre

$$\nabla V = \begin{pmatrix} \emptyset g \sin \theta_1 + \emptyset k \sin(\theta_1 - \theta_2) \\ \emptyset g \sin \theta_2 - \emptyset k \sin(\theta_1 - \theta_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

quindi $\sin \theta_1 = \sin(-\theta_2)$ che implica $\theta_1 = 2\pi - \theta_2$ o $\theta_2 = \pi - \theta_1$. Abbiamo quindi come configurazioni di equilibrio (θ_1, θ_2) con

$$(\theta_1, \theta_2) = (0, 0), (0, \pi), (\pi, 0), (\pi, \pi), (\alpha, 2\pi - \alpha), (2\pi - \alpha, \alpha),$$

definendo l'angolo $\alpha = \arccos\left(-\frac{g}{2k}\right)$ t.c. $\sin \alpha > 0$. Le due ultime soluzioni esistono finché $g/(2k) \leq 1$. Studiando l'hessiana:

$$\mathcal{H} = 6 \begin{pmatrix} g \cos \theta_1 + k \cos(\theta_1 - \theta_2) & -k \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ -k \cos(\theta_1 - \theta_2) & g \cos \theta_2 + k \cos(\theta_1 - \theta_2) \end{pmatrix}$$

sostituendo le possibili soluzioni, si ottiene quindi

- $(0, 0)$ è stabile,
- $(\pi, 0), (0, \pi)$ sono instabili,
- se $g \geq 2k$, (π, π) è stabile
- le configurazioni $(\alpha, 2\pi - \alpha)$ e $(2\pi - \alpha, \alpha)$ sono stabili.

(iii) La reazione vincolare su P può essere calcolata considerando le proiezioni radiali (cioè perpendicolari al vincolo) delle forze agenti sul punto:

- La forza peso $\mathbf{F} = mg\hat{y}$, proiettata lungo la direzione radiale è $F_P \hat{r} = mg \cos \theta_1$.
- La forza elastica $\mathbf{F} = k\mathbf{x}$ lungo la direzione radiale sarà $F_{el} \hat{r} = k|x| \cos \beta$, chiamando β l'angolo $O\hat{P}C$, e x l'allungamento della molla trovato al punto (i) $x = \sqrt{13 - 12 \cos(\theta_1 - \theta_2)}$. Utilizzando il teorema del coseno, $\cos \beta = \frac{R^2 + x^2 - (R-r)^2}{2Rx} = \frac{5+x^2}{6x}$. Quindi otteniamo $F_{el} \hat{r} = k|x| \frac{5+x^2}{6|x|} = \frac{k(5+x^2)}{6}$.

sommando i due contributi, in verso opposto, otteniamo

$$F_v = F \hat{r} = -2g \cos \theta_1 + k(3 - 2 \cos(\theta_1 - \theta_2))$$

Esercizio 2.

In un piano orizzontale (che identificheremo con (x, y)), si muove un disco rigido e omogeneo, di raggio R e massa M . Chiamando P_1 e P_2 due punti diametralmente opposti sul bordo del disco si ha che:

- il punto P_1 del disco è vincolato a scorrere sull'asse y ;
- il punto P_2 del disco è collegato tramite una molla ideale (con costante elastica $k > 0$) ad un punto P_3 fissato sull'asse x (diciamo $P_3 = (a, 0)$);
- il disco è libero di ruotare attorno ad un asse perpendicolare al piano e passante per P_1 .

Scegliendo come coordinate lagrangiane l'ordinata y di P_1 e l'angolo θ che il segmento $\overline{P_1 P_2}$ forma con il verso positivo dell'asse y , si completino le seguenti richieste:

- Si scrivano la lagrangiana $\mathcal{L}$ del sistema e le relative equazioni di Eulero-Lagrange.
- Si determinino le configurazioni di equilibrio e se ne discuta la stabilità al variare del parametro $a/R \in \mathbb{R}$.

[Il momento d'inerzia del disco rispetto al suo centro di massa è $I = \frac{1}{2}MR^2$.]

Energia cinetica e potenziale

Le coordinate del sistema sono:

$$\begin{aligned}x_G &= R \sin \theta, & y_G &= y + R \cos \theta \\x_{P_2} &= 2R \sin \theta, & y_{P_2} &= y + 2R \cos \theta\end{aligned}$$

Con G centro di massa del disco.

L'energia cinetica è:

$$T = \frac{1}{2}M(\dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2) + \frac{1}{2}I_G\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}M\left(\dot{y}^2 + \frac{3}{2}R^2\dot{\theta}^2 - 2R\sin\theta\dot{y}\dot{\theta}\right)$$

L'energia potenziale è:

$$U = \frac{1}{2}K[(x_{P_2} - x_{P_3})^2 + (y_{P_2} - y_{P_3})^2] = \frac{1}{2}K(y^2 + 4Ry\cos\theta - 4Ra\sin\theta + 4R^2 + a^2)$$

La lagrangiana è $L = T - U$.

Equazioni del moto

Le equazioni di Eulero-Lagrange sono:

$$\begin{aligned}M\left(\ddot{y} - R\sin\theta\ddot{\theta} - R\cos\theta\dot{\theta}^2\right) &= -K(y + 2R\cos\theta) \\M\left(\frac{3}{2}R^2\ddot{\theta} - R\sin\theta\ddot{y}\right) &= 2KR(y\sin\theta + a\cos\theta)\end{aligned}$$

Posizioni di equilibrio

Le derivate dell'energia potenziale:

$$\begin{aligned}\partial_y U &= K(y + 2R\cos\theta) \\ \partial_\theta U &= -2KR(y\sin\theta + a\cos\theta)\end{aligned}$$

Le posizioni di equilibrio si ottengono annullando le derivate:

$$y = -2R \cos \theta, \quad (2R \sin \theta - a) \cos \theta = 0$$

Si hanno quattro posizioni di equilibrio:

1. $\theta_1 = \frac{\pi}{2}, y_1 = 0$
2. $\theta_2 = -\frac{\pi}{2}, y_2 = 0$
3. $\sin \theta_{3,4} = \frac{a}{2R}, \cos \theta_3 > 0, y_3 = -\sqrt{4R^2 - a^2}$
4. $\cos \theta_4 < 0, y_4 = \sqrt{4R^2 - a^2}$

Le posizioni 3 e 4 esistono solo se $-2 < \frac{a}{R} < 2$.

Stabilità

Le derivate seconde:

$$\begin{aligned}\partial_{yy}^2 U &= K \\ \partial_{\theta\theta}^2 U &= 2KR(a \sin \theta - y \cos \theta) \\ \partial_{y\theta}^2 U &= \partial_{\theta y}^2 U = -2KR \sin \theta\end{aligned}$$

Analisi di stabilità:

- Per (y_1, θ_1) : Hessiano $2K^2R(a - 2R)$. Stabile se $\frac{a}{R} > 2$
- Per (y_2, θ_2) : Hessiano $-2K^2R(a + 2R)$. Stabile se $\frac{a}{R} < -2$
- Per (y_3, θ_3) e (y_4, θ_4) : Hessiano $4K^2R^2 \cos^2 \theta > 0$. Sempre stabili quando esistono ($-2 < \frac{a}{R} < 2$)

Esercizio 3.

In un piano orizzontale sono presenti due punti materiali P_1 e P_2 , entrambi di massa m , vincolati a muoversi nel seguente modo:

- il punto P_2 è vincolato a muoversi lungo una sbarra lineare omogenea S di massa M e lunghezza 4ℓ il cui centro O è fisso;
- il punto P_1 è collegato ai punti O e P_2 , rispettivamente, tramite due sbarre rettilinee S_1 ed S_2 , entrambe di lunghezza ℓ e massa trascurabile;
- il punto P_2 è collegato ad O tramite una molla ideale di costante elastica $k > 0$;
- all'istante iniziale il punto P_2 non coincide con O .

Scegliendo come variabili lagrangiane l'angolo φ che la sbarra S forma con l'asse x di un sistema cartesiano Oxy , e l'angolo θ che la sbarra S_1 forma rispetto alla sbarra S , si completino le seguenti richieste:

- (i) Si scrivano la lagrangiana $\mathcal{L}$ del sistema e le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.
- (ii) Si deduca che la variabile φ è ciclica e si applichi il metodo di Routh per ridurre i gradi di libertà del sistema.
- (iii) Nel caso $m = \ell = k = 1$ e $M = 0$, si determinino le configurazioni di equilibrio del sistema ad un grado di libertà ottenuto al punto precedente, e se ne discuta la stabilità nei casi in cui sia sufficiente un'analisi del secondo ordine.

Utilizzando le coordinate lagrangiane consigliate nel testo si ha che

$$P_1 = (\ell \cos(\varphi - \theta), \ell \sin(\varphi - \theta)), \quad P_2 = (2\ell \cos \theta \cos \varphi, 2\ell \cos \theta \sin \varphi).$$

- (i) Una volta raccolti i termini la lagrangiana sarà

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\ell^2 \left((1 + 4 \cos^2 \theta) \dot{\varphi}^2 + (1 + 4 \sin^2 \theta) \dot{\theta}^2 - 2\dot{\varphi}\dot{\theta} + \frac{M}{3m} \dot{\varphi}^2 \right) - 2k\ell^2 \cos^2 \theta.$$

che non dipende da φ .

- (ii) La variabile φ è quindi ciclica. Definendo

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}},$$

si trova

$$p = \left(m\ell^2(1 + \cos^2 \theta) + \frac{1}{3}M\ell^2 \right) \dot{\varphi} - m\ell^2 \dot{\theta}.$$

La lagrangiana ridotta è data quindi da

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_R = \mathcal{L} - p\dot{\varphi} = & \frac{1}{2}m\ell^2(1 + 4 \sin^2 \theta) \dot{\theta}^2 - \frac{m^2 \ell^4 \dot{\theta}^2}{2(m\ell^2(1 + 4 \cos^2 \theta) + M\ell^2/3)} \\ & - \frac{pm\ell^2 \dot{\theta}}{m\ell^2(1 + 4 \cos^2 \theta) + M\ell^2/3} - 2k\ell^2 \cos^2 \theta - \frac{p^2}{2(m\ell^2(1 + 4 \cos^2 \theta) + M\ell^2/3)^2}. \end{aligned}$$

- (iii) Poiché p è una costante del modo la funzione $\mathcal{L}_R$ dipende da $(\theta, \dot{\theta})$ e, in maniera parametrica, da p : per il Teorema di Routh descrive la lagrangiana di un sistema ad un grado di libertà, con energia potenziale

$$V(\theta) = 2k\ell^2 \cos^2 \theta + \frac{p^2}{2(m\ell^2(1 + 4 \cos^2 \theta) + M\ell^2/3)^2},$$

che per i valori richiesti dal testo assume la forma

$$V(\theta) = 2 \cos^2 \theta + \frac{p^2}{2(1 + 4 \cos^2 \theta)}, \quad \theta \in (-\pi, \pi].$$

Vista la forma di V basta studiare i punti critici nell'intervallo $\theta \in [0, \pi/2]$. Posto $x = \cos \theta$ e $V(\theta) = U(x)$, si ha che

$$\partial_\theta V = \partial_x U \partial_\theta x,$$

$$\partial_\theta^2 V = \partial_x^2 U (\partial_\theta x)^2 + \partial_x U \partial_\theta^2 x,$$

si ha quindi

$$U(x) = \frac{p^2}{2(1+4x^2)} + 2x^2,$$

$$\partial_x U = \frac{4x}{(1+4x^2)^2} ((1+4x^2)^2 - p^2),$$

$$\partial_x^2 U = 4 \left(1 + \frac{p^2}{(1+4x^2)^2} \frac{12x^2 - 1}{1+4x^2} \right),$$

e

$$\partial_\theta x = -\sin \theta, \quad \partial_\theta^2 x = -\cos \theta.$$

Otteniamo così

$$\partial_\theta V = 0 \quad \text{se} \quad \begin{cases} \sin \theta = 0 \rightarrow \theta = 0 \rightarrow x = 1, \\ \cos \theta = 0 \rightarrow \theta = \pi/2 \rightarrow x = 0, \\ p = \pm(1+4\cos^2 \theta) = \pm(1+4x^2), \end{cases}$$

dove l'ultima condizione può essere soddisfatta se e solo se $|p| \in [1, 5]$, in tal caso si ha una soluzione $\theta_0 \in [0, \pi/2]$, a cui corrisponde un valore $x_0 = \cos \theta_0$, $0 \leq x_0 \leq 1$. Si ha quindi

$$\partial_\theta^2 V(0) = -\frac{4}{25}(25 - p^2) \begin{cases} > 0, & \text{se } |p| > 5, \\ < 0, & \text{se } |p| < 5, \end{cases}$$

$$\partial_\theta^2 V(\pi/2) = 4(1 - p^2) \begin{cases} > 0, & \text{se } |p| < 1, \\ < 0, & \text{se } |p| > 1, \end{cases}$$

$$\partial_\theta^2 V(\theta_0) = 64x_0^2 \left(\frac{1 - x_0^2}{1 + 4x_0^2} \right) \begin{cases} > 0, & \text{se } 1 < |p| < 5, \\ \text{non esiste}, & \text{se } |p| \notin [1, 5]. \end{cases}$$

Quindi

- $\theta = 0$ è stabile se $|p| > 5$, instabile se $|p| < 5$,
- $\theta = \pi/2$ è stabile se $|p| < 1$, instabile se $|p| > 1$,
- $\theta = \theta_0$ esiste ed è stabile se $|p| \in (1, 5)$, non esiste se $|p| \in [1, 5]$.

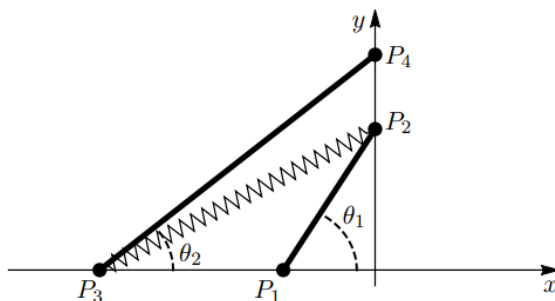
Segue che nell'intervallo $(-\pi, \pi]$ si ha:

- se $|p| < 1$, allora esistono 4 punti d'equilibrio: $\theta = 0, \pi$ instabili e $\theta = \pm\pi/2$ stabili,
- se $|p| > 5$, allora esistono 4 punti d'equilibrio: $\theta = 0, \pi$ stabili e $\theta = \pm\pi/2$ instabili,
- se $|p| \in (1, 5)$, allora esistono 8 punti d'equilibrio: $\theta = 0, \pi, \pm\pi/2$ instabili e $\theta = \pm\theta_0, \pi \pm \theta_0$ stabili,
- se $|p| = 1$ o $|p| = 5$ non si può concludere nulla attraverso un'analisi del secondo ordine.

Esercizio 4.

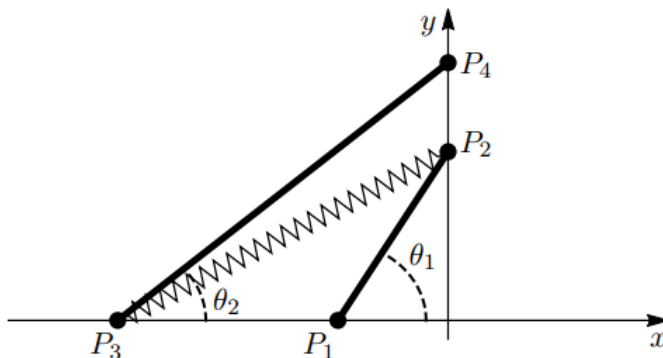
Un sistema meccanico è costituito da 4 punti materiali P_1 , P_2 , P_3 e P_4 , tutti di massa m , che si muovono nel piano verticale (x, y) (sia g l'accelerazione di gravità diretta verso l'asse y discendente), in modo tale che:

- P_1 e P_3 scorrono lungo l'asse x , mentre P_2 e P_4 scorrono lungo l'asse y ;
- un'asta inestensibile di massa trascurabile e lunghezza $\ell_1 = 1$ collega P_1 a P_2 ;
- un'asta inestensibile di massa trascurabile e lunghezza $\ell_2 = 2$ collega P_3 a P_4 ;
- una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo trascurabile collega P_3 a P_2 .



- Si scriva la lagrangiana del sistema.
(Come coordinate lagrangiane si possono utilizzare gli angoli θ_1 e θ_2 che le due aste formano con l'asse x , come illustrato in figura).
- Si scrivano le equazioni di Eulero-Lagrange.
- Si determinino le configurazioni di equilibrio e se ne discuta la stabilità nel caso in cui sia sufficiente l'analisi al secondo ordine.
- * Si discuta la stabilità delle configurazioni nel caso in cui l'analisi al secondo ordine sia inconcludente.

Con la scelta degli angoli come in figura



si ha che le coordinate dei punti sono

$$\begin{aligned} P_1 &= (-\ell_1 \cos \theta_1, 0), & P_2 &= (0, \ell_1 \sin \theta_1), \\ P_3 &= (-\ell_2 \cos \theta_2, 0), & P_4 &= (0, \ell_2 \sin \theta_2). \end{aligned}$$

(i) Scriviamo da subito la lagrangiana nel seguente modo

$$\mathcal{L}(\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) = T - V = \mathcal{L}_1(\theta_1, \dot{\theta}_1) + \mathcal{L}_2(\theta_2, \dot{\theta}_2),$$

con

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 &= T_1 - V_1 = \frac{1}{2} m \ell_1^2 \dot{\theta}_1^2 - \frac{1}{2} k \ell_1^2 \sin^2 \theta_1 - mg \ell_1 \sin \theta_1, \\ \mathcal{L}_2 &= T_2 - V_2 = \frac{1}{2} m \ell_2^2 \dot{\theta}_2^2 - \frac{1}{2} k \ell_2^2 \cos^2 \theta_2 - mg \ell_2 \sin \theta_2, \end{aligned}$$

con l'ovvio significato dei simboli.

(ii) Le equazioni di Eulero-Lagrange diventeranno quindi

$$\begin{cases} m \ell_1^2 \ddot{\theta}_1 = -(k \ell_1^2 \sin \theta_1 \cos \theta_1 + mg \ell_1 \cos \theta_1) = -V'_1 \\ m \ell_2^2 \ddot{\theta}_2 = -(-k \ell_2^2 \sin \theta_2 \cos \theta_2 + mg \ell_2 \cos \theta_2) = -V'_2 \end{cases}$$

(iii) Imponendo $V'_i = 0$, e chiamando $\alpha := \arcsin(-mg/(k\ell_1))$ e $\beta = \arcsin(mg/(k\ell_2))$, otteniamo le configurazioni di equilibrio (θ_1, θ_2) , dove

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \alpha, \pi - \alpha, \\ \theta_2 &= \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \beta, \pi - \beta, \end{aligned}$$

fin quando che

$$\frac{mg}{k\ell_i} \leq 1.$$

Poiché il sistema è disaccoppiato e $\frac{\partial V_1}{\partial \theta_2} = \frac{\partial V_2}{\partial \theta_1} = 0$, la stabilità si determina tramite il segno delle derivate seconde $V''_i(\theta_i)$.

Per θ_1 :

$$V''_1 = -mg \ell_1 \sin \theta_1 + k \ell_1^2 \cos^2 \theta_1 - k \ell_1^2 \sin^2 \theta_1$$

- $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$:

$$V''_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = -k \ell_1^2 - mg \ell_1 < 0 \quad (\text{Instabile})$$

- $\theta_1 = \frac{3\pi}{2}$:

$$V''_1\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -k \ell_1^2 + mg \ell_1 \quad \begin{cases} < 0 & \text{se } k \ell_1 > mg & (\text{Instabile}) \\ > 0 & \text{se } k \ell_1 < mg & (\text{Stabile}) \end{cases}$$

- $\theta_1 = \alpha, \pi - \alpha$:

$$V''_1(\alpha) = k \ell_1^2 \left(1 - \left(\frac{mg}{k \ell_1}\right)^2\right) > 0 \quad (\text{Stabile se } \alpha \text{ esiste})$$

Per θ_2 :

$$V_2'' = -mg\ell_2 \sin \theta_2 - k\ell_2^2 \cos^2 \theta_2 + k\ell_2^2 \sin^2 \theta_2$$

- $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$:

$$V_2'' = k\ell_2^2 - mg\ell_2$$
$$\Rightarrow \begin{cases} > 0 & \text{se } k\ell_2 > mg & (\text{Stabile}) \\ < 0 & \text{se } k\ell_2 < mg & (\text{Instabile}) \end{cases}$$

- $\theta_2 = \frac{3\pi}{2}$:

$$V_2'' = k\ell_2^2 + mg\ell_2 > 0 \quad (\text{Sempre stabile})$$

- $\theta_2 = \beta, \pi - \beta$, con $\beta = \arcsin\left(\frac{mg}{k\ell_2}\right)$:

$$V_2'' = \frac{m^2 g^2}{k} - k\ell_2^2 \Rightarrow (\text{Stabile se } \beta \text{ esiste})$$

Discutiamo ora le soluzioni nei casi in cui $V_i'' = 0$.

Per θ_1 :

- $\theta_1 = \frac{3\pi}{2}$:

$V_1'' = 0$ se $k\ell_1 = mg$, in questo caso

$$V_1' = mg\ell_1 \cos \theta_1 (1 + \sin \theta_1)$$

quando $\theta_1 \rightarrow \frac{3\pi}{2} - \epsilon$, $\cos \theta_1 \sim -\epsilon$ e $\sin \theta_1 \sim -1 + \epsilon$, e la derivata avrà segno positivo,
quando $\theta_1 \rightarrow \frac{3\pi}{2} + \epsilon$, $\cos \theta_1 \sim \epsilon$ e $\sin \theta_1 \sim -1 + \epsilon$ e la derivata avrà segno negativo,
ne segue che il punto è un massimo.

Per θ_1 :

- $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$:

$V_2'' = 0$ se $k\ell_2 = mg$, in questo caso

$$V_2' = mg\ell_2 \cos \theta_2 (1 - \sin \theta_2)$$

quando $\theta_2 \rightarrow \frac{\pi}{2} - \epsilon$, $\cos \theta_2 \sim \epsilon$ e $\sin \theta_2 \sim 1 - \epsilon$, e la derivata avrà segno positivo,
quando $\theta_2 \rightarrow \frac{\pi}{2} + \epsilon$, $\cos \theta_2 \sim -\epsilon$ e $\sin \theta_2 \sim 1 - \epsilon$ e la derivata avrà segno negativo,
ne segue che il punto è un massimo.