FM210 Meccanica Analitica
Tutorato 1

Docente: Guido Gentile, Esercitatrice: Livia Corsi
Tutori: Simone Corriano, Laura Fagotto

28/02/2025

Esercizio 1. *Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari*

$$\dot{x} = Ax, \qquad x \in \mathbb{R}^2, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix};$$

con dato iniziale $x(0) = (0, 1)$. *Se ne determini la soluzione.*

Esercizio 2. *Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari*

$$\dot{x} = Ax, \qquad x \in \mathbb{R}^3, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

con dato iniziale $x(0) = (-1, 0, 1)$. *Se ne determini la soluzione.*

Esercizio 3. *Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari*

$$\dot{x} = Ax, \qquad x \in \mathbb{R}^3, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

con dato iniziale $x(0) = (0, 1, 1)$. *Se ne determini la soluzione.*

Esercizio 4. *Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari*

$$\begin{cases} \dot{x} = 4y \\ \dot{y} = -x \end{cases};$$

con dato iniziale $(x(0), y(0)) = (1, 1)$. *Se ne determini la soluzione.*

Esercizio 5. *Si consideri il sistema di equazioni lineari*

$$\dot{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

con dato iniziale $(x(0), y(0), z(0)) = (-1, 1, -2)$. *Se ne determini la soluzione.*

Esercizio 6. *Dimostrare le seguenti proprietà:*

(i) *Siano* $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ *tali che* $[A, B] := AB - BA = 0$. *Allora* $e^A e^B = e^B e^A = e^{A+B}$. *Dimostrare con un esempio che l'ipotesi è minimale.*

(ii) *Sia* $A \in M_n(\mathbb{C})$ *una matrice diagonalizzabile, ovvero esiste una matrice* P *invertibile tale che* $A = PDP^{-1}$. *Allora* $e^A = Pe^D P^{-1}$*;*

(iii) *Sia* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *una matrice diagonalizzabile. Dimostrare che* $\det(\exp(A)) = \exp(tr(A))$.

Ricorda!: *Data una matrice* A *della dorma*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

la traccia della matrice A *sarà*

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Esercizio 7. *Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari*

$$\dot{x} = Ax, \qquad x \in \mathbb{R}^2, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \alpha \in \mathbb{R},$$

con condizioni iniziali generiche $x(0) = x_0$. *Trovare la soluzioni al variare di* α.

Esercizio 8. *Si consideri la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. *Dimostrare per induzione che*

$$A^n = 2^{n-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. *Si calcoli* e^A.

3. *Si trovino, se esistono, le soluzioni dell'equazione*

$$F_A(x) := e^A - xA = \mathbb{1}.$$

4. *Sia* $B = \lambda A, \lambda \in \mathbb{R}$. *Si determini, se esiste,* λ *tale che l'equazione* $F_B(x) = \mathbb{1}$ *abbia soluzione* $x = 1$.

5. *Si consideri, più in generale, la matrice* $n \times n$ *di elementi* $A_{ij} = 1$ *e si determini la matrice* e^A.