

FM210 Meccanica Analitica

Tutorato 10

Docente: Guido Gentile, Esercitatrice: Livia Corsi

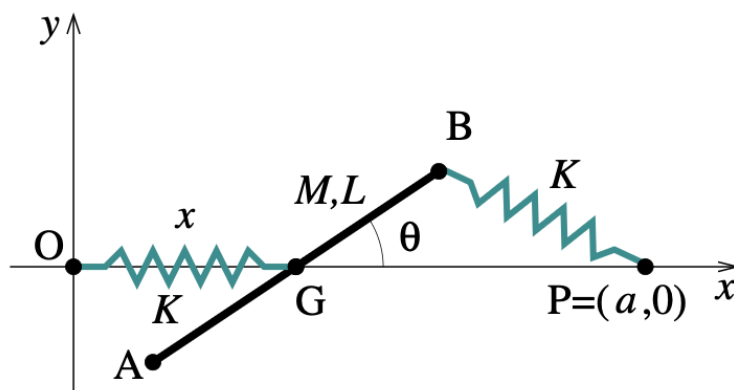
Tutori: Francesco Artibani, Simone Corriano

30/05/2025

Esercizio 1.

In un piano orizzontale è fissato un sistema di assi cartesiani Oxy . In tale piano si muove un'asta rigida e omogenea AB , di massa M e lunghezza L . Il centro di massa G dell'asta è vincolato a scorrere senza attrito lungo una guida coincidente con l'asse x (si veda la figura). G è collegato con una molla di costante elastica $K > 0$ all'origine $O = (0, 0)$, mentre l'estremo B dell'asta è collegato con una molla a P , dove P è il punto di coordinate $(a, 0)$, con $a \in \mathbb{R}$. Si adottino come coordinate lagrangiane l'ascissa x di G e l'angolo θ che l'asta AB forma con l'asse x (si veda la figura).

- Si scrivano la funzione di Lagrange e le equazioni del moto.
- Si ricavi l'espressione dei momenti coniugati p_x e p_θ
- Si scriva l'hamiltoniana del sistema e le corrispondenti equazioni di Hamilton.



Esercizio 2.

Si consideri la seguente trasformazione di coordinate:

$$\begin{cases} Q = -p\sqrt{\frac{1-qp}{1+qp}}, \\ P = q\sqrt{\frac{1+qp}{1-qp}}. \end{cases}$$

1. Si calcolino le derivate parziali di Q e P rispetto a q e p , e si dimostri che la trasformazione è canonica verificando che si conservano le parentesi di Poisson fondamentali.
2. Si dimostri che $qp = -QP$ e si utilizzi tale risultato per ricavare q in termini di Q e P a partire dall'espressione di P in termini di q e p .
3. Esplicitando anche p in funzione di Q e P , si calcoli la trasformazione inversa della trasformazione data.
4. Si trovi una funzione generatrice di seconda specie $F(q, P)$.
5. Si consideri il sistema hamiltoniano descritto dall'hamiltoniana

$$H(q, p) = q^2(1 + qp)(1 - qp)^{-1}.$$

Si calcoli l'hamiltoniana nelle variabili (Q, P) .

6. Si usi il risultato del punto precedente per determinare esplicitamente la soluzione $(q(t), p(t))$ con dati iniziali $(q(0), p(0)) = (1, 0)$.

Esercizio 3.

Si consideri la trasformazione di coordinate

$$Q = \frac{1}{2}q^2p, \quad P = f(q).$$

Si determini per quale $f(q)$ la trasformazione è canonica.

Esercizio 4.

Si consideri la trasformazione

$$\begin{cases} q = \left(\frac{Q}{\alpha}\right)^{\frac{1}{6}} p^{-\frac{2}{9}}, \\ P = 3p^{-\frac{2\mu+3}{9}} \left(\frac{Q}{\alpha}\right)^{\frac{\mu}{6}}. \end{cases}$$

Si dica per quali valori dei parametri reali α e μ la trasformazione è canonica. In corrispondenza di tali valori, determinare la funzione generatrice $F(q, P)$ della trasformazione canonica.