FM210 Meccanica Analitica
Tutorato 11

Docente: Guido Gentile, Esercitatrice: Livia Corsi
Tutori: Francesco Artibani, Simone Corriano

06/06/2025

Esercizio 1.
Dopo aver determinato i valori di α e β per cui la seguente trasformazione è canonica,

$$\begin{cases} P = \alpha p e^{\beta q} \\ Q = \frac{1}{\alpha} e^{-\beta q} \end{cases},$$

si determini una funzione generatrice di seconda specie. La trasformazione ammette una funzione generatrice di prima specie?

Esercizio 2.
Si consideri la trasformazione di coordinate generata da

$$F(q, Q) = Q \log q \,.$$

Data l'hamiltoniana

$$H(q, p) = (qp)^3 + 2 \log q \,,$$

si completino le seguenti richieste:

(i) Si scriva H nelle nuove coordinate (Q, P).
(ii) Si scrivano e si risolvano le equazioni di Hamilton nel nuovo sistema di coordinate, per ricavare le soluzioni del moto

$$(q(t), p(t))$$

nelle variabili originarie, associate alle condizioni iniziali:

$$(q(0), p(0)) = (q_0, 0) \,, \quad q_0 > 0 \,.$$

Esercizio 3 (II Esonero 2022/2023).
Si consideri la seguente trasformazione di coordinate

$$\begin{cases} Q_1 = q_1 + \frac{q_1^3}{3} \\ Q_2 = q_2 - \frac{q_1^3}{3} \\ P_1 = \frac{p_1 + q_1^2 p_2}{1 + q_1^2} \\ P_2 = p_2 \end{cases}.$$

(i) Si determini il dominio $\mathcal{D}$ della trasformazione.
(ii) Si trovi una funzione generatrice di seconda specie $F(q_1, q_2, P_1, P_2)$.
(iii) Si verifichi che la funzione generatrice F trovata al punto precedente soddisfa la condizione che la matrice 2×2 di elementi

$$\frac{\partial^2 F}{\partial q_i \partial P_j}$$

è non-singolare nel dominio $\mathcal{D}$.
(iv) Data l'hamiltoniana

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{p_1^2}{(1+q_1^2)^2} + \left(1 + \frac{q_1^4}{(1+q_1^2)^2}\right) p_2^2 + \frac{2q_1^2 p_1 p_2}{(1+q_1^2)^2} + \left(q_2 - \frac{q_1^3}{3}\right)^2 ,$$

si determini l'hamiltoniana $\mathcal{K}(Q_1, Q_2, P_1, P_2)$ nelle nuove variabili.
(v) Si consideri il sistema descritto dall'hamiltoniana data e si determini la soluzione delle equazioni del moto nelle nuove variabili (Q_1, Q_2, P_1, P_2) al variare dei dati iniziali

$$(Q_1(0), Q_2(0), P_1(0), P_2(0)) .$$

Esercizio 4 (II Esonero 2021/2022).
Si consideri la trasformazione di coordinate

$$Q_1 = \frac{p_1}{2q_1}(q_1^2 + q_2^2) , \quad Q_2 = q_2^2 , \quad P_1 = \log \frac{p_1}{2q_1} , \quad P_2 = \frac{p_2}{2q_2} - \frac{p_1}{2q_1} .$$

(i) Si determini il dominio $\mathcal{D}$ della trasformazione.
(ii) Si trovi una funzione generatrice di seconda specie $F(q_1, q_2, P_1, P_2)$.
(iii) Si verifichi che la funzione generatrice F trovata al punto precedente soddisfa la condizione che la matrice 2×2 di elementi

$$\frac{\partial^2 F}{\partial q_i \partial P_j}$$

è non-singolare nel dominio $\mathcal{D}$.
(iv) Data l'hamiltoniana

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{q_1 p_2 - q_2 p_1}{q_1 q_2}\right)^2 + \frac{p_1^2}{2q_1^2} ,$$

si determini l'hamiltoniana nelle variabili (Q_1, Q_2, P_1, P_2).
(v) Si determini la soluzione delle equazioni del moto del sistema con hamiltoniana $H(q_1, q_2, p_1, p_2)$ in corrispondenza dei dati iniziali:

$$(q_1(0), q_2(0), p_1(0), p_2(0)) = (1, 1, 1, 1) .$$

Esercizio 5.
Data la lagrangiana

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^2 + q\dot{q} + 3q^2 ,$$

si scriva la corrispondente hamiltoniana e si risolvino le equazioni di Hamilton associate.