FM210 Meccanica Analitica

Tutorato 2

Docente: Guido Gentile, Esercitatrice: Livia Corsi
Tutori: Simone Corriano, Laura Fagotto

14/03/2025

Esercizio 1.

Per $x \in \mathbb{R}$, si considerino i seguenti potenziali:

1. $V_1(x) = x^2 - x^3$;
2. $V_2(x) = x + \log(1 + x^2)$;
3. $V_3(x) = x^2 + \cos x$.

Svolgere le seguenti richieste:

(i) Si scrivano esplicitamente le equazioni del moto, e si verifichi la conservazione dell'energia meccanica

$$E_i(x, \dot{x}) = \frac{\dot{x}^2}{2} + V_i(x);$$

(ii) Si disegnino i grafici dei potenziali;

(iii) Si determinino i punti di equilibrio e se ne discuta la stabilità;

(iv) Si disegnino le curve di livello nel piano delle fasi.

Esercizio 2.

Si consideri il seguente sistema meccanico unidimensionale, con $m = 1$, descritto da

$$\ddot{x} = x - x^3.$$

Si scelga $V(x)$ tale che $V(0) = 0$, e si completino le seguenti richieste:

(i) Si determini una grandezza conservata del moto;

(ii) Si disegnino le curve di livello corrispondenti nel piano delle fasi;

(iii) Si identifichino i dati iniziali, qualora esistano, corrispondenti a: moti periodici, moti aperti, e a moti limitati asintotici;

(iv) In un punto di equilibrio stabile non degenero, se esiste, si determini la frequenza ω delle piccole oscillazioni.

Esercizio 3.

Si consideri il sistema gradiente

$$(\dot{x}, \dot{y}) = -\nabla V(x, y) \quad \text{con} \quad V(x, y) = x^4 + 3y^4 + 2x^2 + y^2, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

(i) Si dimostri che l'origine è l'unico punto di equilibrio;

(ii) Si dimostri che tale punto è asintoticamente stabile.

(Intuitivamente quale sarà il bacino di attrazione?)

Esercizio 4.

Si consideri il moto di un punto materiale di massa $m = 1$ sottoposto ad una forza di energia potenziale

$$V(x) = -\frac{3}{4}e^{x^2}.$$

Si completino le seguenti richieste:

- (i) Si scrivano le equazioni del sistema dinamico che descrivono il moto;
- (ii) Dopo aver tracciato il grafico di $V(x)$ si studi qualitativamente il moto nel piano delle fasi;
- (iii) Si determinino se possibile dati iniziali corrispondenti a moti periodici;
- (iv) Se esistono moti illimitati, dire se il tempo per arrivare all'infinito è finito o meno, e inoltre dire se il moto esiste globalmente.

Esercizio 5.

Si consideri l'equazione del moto per un punto materiale, di massa $m = 1$, su $\mathbb{R}$

$$\ddot{x} = -V'(x), \quad V(x) = \frac{2}{\pi} \arctan\left(\alpha \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right).$$

Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$:

- (i) Si tracci qualitativamente il grafico del potenziale;
- (ii) Si determinino i punti di equilibrio e se ne discuta la stabilità;
- (iii) Per $\alpha = 1$ si scelga, se possibile, un dato iniziale che corrisponde ad un moto periodico, e in tal caso se ne scriva il periodo come integrale definito;
- (iv) Per $\alpha = -1$, si consideri l'orbita corrispondente a $x(0) = -1$ ed $E = 0$. Dire se esiste un tempo finito T tale per cui l'orbita attraversa l'asse y .

Esercizio 6 (Equazioni di Lotka-Volterra).

Si consideri il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = (A - By)x \\ \dot{y} = (Cx - D)y \end{cases} \quad \text{con } A, B, C, D \text{ costanti positive.}$$

Dimostrare che $\mathcal{W}(x, y) = -D \log x + Cx + By - A \log y$ è una costante del moto.

Esercizio 7.

Sia $\varphi(x, t)$ il flusso del sistema dinamico planare descritto in coordinate polari da

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho - \rho^2 \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases}$$

Si dimostri che S^1 è un insieme φ -invariante, ossia che partendo da un dato iniziale sulla circonferenza unitaria, il moto continua a svolgersi su di essa per ogni tempo.

Si dimostri inoltre che per dati iniziali $\rho(0) < 1$, la palla $\{\rho < 1\}$ è un insieme positivamente φ -invariante.