

FM210 Meccanica Analitica

Tutorato 3

Docente: Guido Gentile, Esercitatrice: Livia Corsi
Tutori: Simone Corriano, Laura Fagotto

21/03/2024

Esercizio 1. Si consideri il sistema dinamico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa $m = 1$, soggetto a un'energia potenziale

$$V(x) = -x^4 + 5x^2 - \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Si discutano, al variare di α , i seguenti punti.

1. Scrivere le equazioni del sistema dinamico associato.
2. Studiare il grafico dell'energia potenziale.
3. Determinare i punti di equilibrio e discuterne la stabilità.
4. Analizzare qualitativamente il piano delle fasi (x, \dot{x}) .
5. Determinare l'insieme dei dati iniziali che danno origine a traiettorie periodiche e verificare in particolare che esiste una traiettoria periodica per $\alpha = 4$ con energia $E = 0$.
6. Scrivere il periodo T come integrale definito e darne una stima.

Esercizio 2. Sia dato un sistema dinamico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa $m = 1$ sottoposto alla forza

$$F(x) = -\alpha x + \beta x^5, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Si rispondano alle seguenti domande al variare di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

1. Scrivere le equazioni del sistema dinamico associato.
2. Studiare il grafico dell'energia potenziale.
3. Determinare i punti di equilibrio e discuterne la stabilità.
4. Analizzare qualitativamente il piano delle fasi (x, \dot{x}) .
5. Determinare per quali α, β si hanno traiettorie periodiche con dato iniziale $(x, \dot{x}) = (0, 1)$.
6. Scrivere per tali valori il periodo come integrale definito e calcolarlo esplicitamente per $\beta = 0$.

Esercizio 3. Si consideri il sistema meccanico unidimensionale conservativo descritto dalla seguente equazione:

$$\ddot{x} = \frac{ax^2 - 2x - 2a^2 + 2}{(x^2 - 2x + 2a)^2} \quad \text{con } a > 0$$

Inoltre, si scelga l'energia potenziale in modo che $V(0) = -\frac{1}{2a}$

1. Si consideri esplicitamente il caso $a = 1$

- (a) Si studi il grafico dell'energia potenziale $V(x)$;
- (b) Si determinino i punti di equilibrio del sistema dinamico associato e se ne discuta la stabilità;
- (c) Si discuta qualitativamente il moto del sistema nel piano delle fasi (x, \dot{x}) .
- (d) Dove avviene un moto periodico, se ne imposti la formula integrale del periodo e se ne dia una stima.

2. Si tracci un diagramma delle biforcazioni (sulle ascisse porre la variabile $a > 0$ e sulle ordinate le configurazioni di equilibrio, indicando con colori differenti la stabilità o l'instabilità di tali punti).

Esercizio 4. (esercizio sui periodi, ripetita iuvant) Si consideri il generico sistema meccanico unidimensionale newtoniano:

$$m\ddot{x} = -V'(x)$$

1. Si supponga che esista almeno un punto di minimo locale $x_0 \in \mathbb{R}$ per l'energia potenziale del sistema. Si dimostri che sul piano delle fasi localmente vicino al punto $(x_0, 0)$ esiste una traiettoria periodica con dati $(x_-, 0)$ e $(x_+, 0)$ tali per cui esistono due tempi $t_1 > 0, t_2 > 0$ per cui $\varphi((x_-, 0), t_1) = (x_+, 0)$ e $\varphi((x_+, 0), t_2) = (x_-, 0)$
2. Dimostrare che per ogni (x, \dot{x}) appartenente all'orbita periodica descritta dai due punti, allora $E(x, \dot{x}) - V(x) = (x - x_-)(x_+ - x)\phi(x)$ per qualche funzione $\phi(x)$.
3. Concludere che se $\phi(x)$ è strett. crescente nell'intervallo, allora una valida stima per il periodo dell'orbita descritta dai due punti è:

$$\pi\sqrt{\frac{2m}{\phi(x_+)}} \leq T \leq \pi\sqrt{\frac{2m}{\phi(x_-)}}$$

In generale se esistono due costanti $C_1, C_2 > 0$ tali che $C_1 \leq \phi(x) \leq C_2$ per ogni $x \in [x_-, x_+]$, allora una valida stima è:

$$\pi\sqrt{\frac{2m}{C_2}} \leq T \leq \pi\sqrt{\frac{2m}{C_1}}$$

4. Trovare la formula integrale per calcolare la lunghezza dell'orbita sul piano delle fasi.

Esercizio 5. (BONUS) Si consideri il seguente sistema dinamico planare:

$$\begin{cases} \dot{x} = \partial_y W(x, y) \\ \dot{y} = -\partial_x W(x, y) \end{cases} \quad \text{con } W(x, y) = x^2 + 3y^2 + 2xy + x$$

1. Si dimostri che $W(x, y)$ è una costante del moto per il sistema;
2. Si trovino i punti di equilibrio e se ne discuta la stabilità
3. Si mostri che la curva di livello $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : W(x, y) = 1\}$ contiene un'orbita periodica e trovi una stima per la lunghezza dell'orbita sul piano delle fasi.