

FM210 Meccanica Analitica

Tutorato 4

Docente: Guido Gentile, Esercitatrice: Livia Corsi

Tutori: Simone Corriano, Laura Fagotto

28/03/2025

Esercizio 1.

Un punto materiale di massa $\mu = 1$ è soggetto ad una forza centrale di energia potenziale

$$V(\rho) = \frac{\log^2 \rho}{\rho^2}$$

con $\rho > 0$. Sia L il modulo del momento angolare, e si assuma inizialmente che $L > 0$. Si completino le seguenti richieste:

- *Si scrivano le equazioni del moto nelle variabili ρ e θ ;*
- *Si disegni il grafico dell'energia potenziale efficace;*
- *Si determinino i punti di equilibrio del sistema dinamico associato per la variabile ρ , e se ne discuta la stabilità;*
- *Si discuta qualitativamente il moto nel piano $(\rho, \dot{\rho})$;*
- *Si discuta come cambia lo scenario se $L = 0$.*

Esercizio 2.

Si consideri il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa $m = 1$, soggetto ad una forza di energia potenziale

$$V(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 2)(x^2 - 3)$$

- *Si determinino i punti di equilibrio e se ne discuta la stabilità;*
- *Si studi il grafico dell'energia potenziale $V(x)$;*
- *Si discutano qualitativamente le curve di livello nel piano $(x, \dot{x})$;*
- *Verificare che la traiettoria con dati iniziali $(x(0), \dot{x}(0)) = (1, 0)$ è periodica e se ne scriva il periodo come integrale definito;*
- *Per il periodo scritto nel punto precedente se ne dia una stima dal basso e dall'alto;*

- Si studi la traiettoria con dati iniziali

$$(x(0), \dot{x}(0)) = \left(\sqrt{2 - \frac{1}{3}}, 0 \right)$$

(vii) Si discuta cosa succede se, nel caso precedente, si modifica il valore della velocità iniziale in $\dot{x}(0) > 0$.

Esercizio 3.

Si considerino due punti materiali di massa $m = 2$ che interagiscono attraverso una forza che dipende solo dal modulo della loro distanza. Descriviamo in moto dei due punti nel sistema del centro di massa, in modo da ricondursi ad un sistema che si muove in un campo centrale nelle variabili polari (ρ, θ) . In questo modo ci siamo ricondotti ad un sistema sottoposto ad una forza di energia potenziale

$$V(\rho) = \rho - \frac{1}{4}\rho^4$$

Al variare del modulo del momento angolare L , si studi il moto nella variabile ρ :

- Si determinino i punti di equilibrio e se ne discuta la stabilità;
- Si individuino le traiettorie periodiche nel piano $(\rho, \dot{\rho})$;
- Se possibile, scelto un moto periodico, se ne trovi il periodo come integrale definito e si discutano le condizioni sotto le quali in generale il moto complessivo del sistema è periodico.

Esercizio 4. Un punto materiale di massa μ è soggetto a una forza centrale di energia potenziale

$$V(\rho) = \log \left(\rho + \frac{\alpha}{\rho} \right), \quad \alpha \geq 0$$

Sia L il modulo del momento angolare, e si assuma che sia $L > 0$. Al variare del coefficiente α si risponda alle seguenti domande.

- Si scrivano l'equazione del moto per la variabile ρ e per la variabile θ .
- Si disegni il grafico dell'energia potenziale efficace.
- Si determinino i punti di equilibrio del sistema dinamico associato all'equazione per la variabile ρ e se ne discuta la stabilità.
- Si studino qualitativamente le orbite nel piano $(\rho, \dot{\rho})$.
- Si determinino le traiettorie periodiche nel piano $(\rho, \dot{\rho})$.
- Si discutano le condizioni sotto le quali il moto complessivo del sistema è periodico.
- Si discuta come cambia lo scenario nel caso in cui si abbia $L = 0$.
- Si risponda alle stesse domande nel caso in cui si abbia $\alpha < 0$.