FM210 Meccanica Analitica

Tutorato 5

Docente: Guido Gentile, Esercitatrice: Livia Corsi
Tutori: Simone Corriano, Laura Fagotto

04/04/2025

Esercizio 1.

Si consideri un punto materiale di massa μ soggetto ad una forza centrale di energia potenziale:

$$V(\rho) = 2 \log \rho - \frac{1}{2} \log(1 + 2\rho^2 + 2\rho^4)$$

Se L indica il modulo del momento angolare, supponendo inizialmente $L > 0$ si completino le seguenti richieste:

- (i) Si determinino eventuali punti di equilibrio e se ne discuta la stabilità.
- (ii) Si studi qualitativamente il grafico dell'energia potenziale efficace e si analizzi qualitativamente il moto nel piano $(\rho, \dot{\rho})$.
- (iii) Si determinino le traiettorie periodiche nel piano $(\rho, \dot{\rho})$.
- (iv) Si discuta come cambia lo scenario per $L = 0$.

Esercizio 2.

Consideriamo un punto materiale di massa $\mu = 1$ che si muove sotto l'azione di una forza centrale con energia potenziale

$$V(\rho) = \log \rho - \frac{\alpha}{4\rho^2}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. Detto L il modulo del momento angolare, si assuma inizialmente che $L > 0$.

(i) Scegliendo $\alpha = 1$ si completino le seguenti:

1. Si determinino eventuali punti di equilibrio e se ne discuta la stabilità.
2. Si studi qualitativamente il grafico dell'energia potenziale efficace.
3. Si descrivano le orbite nel piano $(\rho, \dot{\rho})$.
4. Si determinino, qualora esistano, le traiettorie periodiche.
5. Si discutano le condizioni sotto le quali, in generale, il moto complessivo del sistema è periodico.

(ii) Si discuta come cambia lo scenario, rispondendo ai punti precedenti, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3.

Si consideri un punto materiale di massa m descritto dall'equazione:

$$m\ddot{x} = \frac{\gamma}{\ell} \left(-\frac{x^2}{\ell^2} + \frac{x}{\ell} + 1 \right) e^{-x/\ell}$$

dove $\gamma, \ell > 0$. Si risponda alle seguenti:

- (i) Si disegni il grafico del potenziale.
- (ii) Si determinino i punti di equilibrio e se ne discuta la stabilità.
- (iii) Per i punti di equilibrio stabile non degeneri, se esistono, si calcoli la frequenza delle piccole oscillazioni corrispondente.
- (iv) Si disegni il piano delle fasi $(x, \dot{x})$.
- (v) Al variare del livello di energia E :

1. Per i moti periodici si scriva il periodo in termini di un integrale definito.
2. Detto x_1 un punto di eq. stabile, e $E_1 := V(x_1)$, si dia una stima del periodo T di percorrenza di un'orbita periodica corrispondente ad energia $E_1/2$.
3. Per ogni moto aperto, si discuta se il tempo di fuga all'infinito è finito o meno.

Esercizio 4.

Dati tre vettori $x, y, z \in \mathbb{R}^3$, il vettore $x \wedge (y \wedge z)$ e lo scalare $x \cdot (y \wedge z)$ prendono rispettivamente i nomi di prodotto triplo vettoriale e prodotto misto o prodotto triplo scalare

1. Si dimostri che $x \wedge (y \wedge z) = (x \cdot z)y - (x \cdot y)z$ per ogni $x, y, z \in \mathbb{R}^3$.
2. Si dimostri che $x \cdot (y \wedge z) = y \cdot (z \wedge x) = z \cdot (x \wedge y)$ per ogni $x, y, z \in \mathbb{R}^3$.
3. Impostando

$$\begin{cases} R = \frac{m_1 x + m_2 y}{m_1 + m_2} \\ r = x - y \\ \rho = |r| \end{cases}$$

si dimostri che nel caso di moti centrali descritti dall'equazione:

$$\begin{cases} \ddot{R} = 0, \\ \ddot{r} = \frac{1}{\mu} \frac{r}{|r|} F(|r|), \quad \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \end{cases}$$

dove R prende il nome di coordinata del centro di massa e r di coordinata relativa, si ha che:

$$\ddot{r} \wedge L = -F(\rho)(\dot{\rho}r - \rho\dot{r}),$$

dove $L = \mu \ddot{r} \wedge \dot{r}$ è il momento angolare.

(Suggerimento: Si usi che $2r \cdot \dot{r} = (d/dt)r \cdot r = (d/dt)\rho^2 = 2\rho\dot{\rho}$)