

# FM210 Meccanica Analitica

## Tutorato 6

Docente: Guido Gentile, Esercitatrice: Livia Corsi  
Tutori: Simone Corriano, Laura Fagotto

11/04/2025

### Esercizio 1.

Sia dato un sistema di riferimento  $\kappa = Oxyz$  (sistema assoluto), si consideri un sistema di riferimento mobile  $K = O'\xi\eta\zeta$  (sistema relativo), la cui origine  $O'$  si muove nel piano  $(x, y)$  lungo il profilo di equazione:

$$y(x) = x^3 - 6x^2 + 9x.$$

Si ha che la componente lungo l'asse  $x$  del vettore che individua il punto  $O'$  varia secondo la legge  $x_{O'}(t) = t$ , l'asse  $\zeta$  di  $K$  si mantiene sempre parallelo all'asse  $z$  di  $\kappa$ , e infine l'asse  $\xi$  si mantiene sempre tangente alla curva  $y = y(x)$ .

Un punto materiale  $P$  di massa  $m = 1$ , si muove lungo l'asse  $\xi$  con legge oraria

$$\xi(t) = a \sin bt, \quad \text{con } a, b \text{ costanti positive.}$$

(i) Scrivere la trasformazione rigida  $D : K \rightarrow \kappa$  come composizione di una traslazione  $C$  con una rotazione  $B$ , i.e. determinare  $C$  e  $B$  t.c.  $D = C \circ B$ .

(ii) Determinare il moto  $q(t)$  e  $Q(t)$  del punto  $P$  nel sistema di riferimento  $\kappa$  e  $K$  rispettivamente.

(iii) Determinare la velocità assoluta  $v$ , la velocità relativa  $v'$ , la componente traslatoria della velocità di trascinamento  $v_0$ , e la componente rotatoria della velocità di trascinamento  $v_T$  del punto  $P$ .

(iv) Determinare la forza di Coriolis e la forza centrifuga che agiscono sul punto  $P$ .

### Esercizio 2.

Sia dato un sistema di riferimento  $\kappa = Oxyz$  (sistema assoluto), si consideri un sistema di riferimento mobile  $K = O'\xi\eta\zeta$  (sistema relativo), la cui origine  $O'$  si muove in senso antiorario lungo una circonferenza  $C$  di raggio 1 e centro nell'origine  $O$  con velocità angolare costante  $\omega$ .

L'asse  $\zeta$  si mantiene parallelo all'asse  $z$ , mentre l'asse  $\xi$  si mantiene sempre ortogonale alla circonferenza  $C$  (i.e. in direzione radiale) diretto verso l'esterno; il vettore  $r(t)$  che individua  $O'$  nel sistema fisso, all'istante  $t = 0$ , ha coordinate

$$r(0) = (1, 0, 0).$$

Un punto materiale  $P$  di massa  $m = 1$ , si muove nel sistema  $K$  lungo una circonferenza di raggio  $a \in (0, 1)$ , con velocità angolare costante  $\omega'$ ; all'istante iniziale le coordinate del punto  $P$  nel sistema mobile sono

$$Q(0) = (a, 0, 0).$$

- (i) Scrivere la trasformazione rigida  $D : K \rightarrow \kappa$  come composizione di una traslazione  $C$  con una rotazione  $B$ .
- (ii) Determinare il moto  $q(t)$  e  $Q(t)$  del punto  $P$  nel sistema di riferimento  $\kappa$  e  $K$  rispettivamente.
- (iii) Determinare la velocità assoluta  $v$ , la velocità relativa  $v'$ , la componente traslatoria della velocità di trascinamento  $v_0$ , e la componente rotatoria della velocità di trascinamento  $v_T$  del punto  $P$ .
- (iv) Determinare le condizioni su  $\omega$  e  $\omega'$  affinché il moto complessivo nel sistema  $\kappa$  sia periodico.

### Esercizio 3.

Sia dato un sistema di riferimento  $\kappa = Oxyz$  (sistema assoluto), si consideri  $K = O'\xi\eta\zeta$  un sistema di riferimento mobile (sistema relativo), la cui origine  $O'$  si muove nel piano  $(x, y)$  lungo una guida di equazione

$$y(x) = x^2$$

in modo tale che si abbia  $x_{O'}(t) = t$ .

L'asse  $\xi$  si mantiene sempre tangente alla guida, mentre l'asse  $\zeta$  è parallelo all'asse  $z$ .

Un punto materiale  $P$  di massa  $m = 1$ , si muove nel sistema di riferimento  $K$  lungo l'asse  $\eta$  con legge oraria  $\eta = \eta(t)$ .

- (i) Scrivere la trasformazione rigida  $D : K \rightarrow \kappa$  come composizione di una traslazione  $C$  con una rotazione  $B$ .
- (ii) Determinare il moto  $q(t)$  e  $Q(t)$  del punto  $P$  nel sistema di riferimento  $\kappa$  e  $K$  rispettivamente.
- (iii) Determinare la velocità assoluta  $v$ , la velocità relativa  $v'$ , la componente traslatoria della velocità di trascinamento  $v_0$ , e la componente rotatoria della velocità di trascinamento  $v_T$  del punto  $P$ .
- (iv) Determinare il moto  $\eta(t)$  per cui il punto  $P$  si trovi in ogni istante sull'asse  $y$  nel sistema  $\kappa$ . Quale posizione  $P$  occupa sull'asse  $y$  al tempo  $t$ ?

Suggerimento: Potrebbe essere utile ricordare che, per  $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$  si ha

$$\sin \theta = \frac{\tan \theta}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}}, \quad \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}}$$

### Esercizio 4.

Sia dato un sistema di riferimento  $\kappa = Oxyz$  (sistema assoluto), si consideri  $K = O'\xi\eta\zeta$  un sistema di riferimento mobile (sistema relativo), la cui origine  $O'$  si muove nel piano  $(x, y)$  lungo una guida di equazione

$$y(x) = x + \sin x$$

in modo tale che la sua proiezione sull'asse  $x$  sia  $x_{O'}(t) = ut$ , con  $u > 0$ .

L'asse  $\zeta$  si mantiene parallelo all'asse  $z$ , mentre l'asse  $\xi$  si mantiene tangente alla guida.

Un punto materiale  $P$  di massa  $m$  si muove nel sistema di riferimento  $K$  con velocità costante  $v > 0$  lungo l'asse  $\xi$ ; all'istante iniziale il punto  $P$  si trova in  $O'$ .

(i) Scrivere la trasformazione rigida  $D : K \rightarrow \kappa$  come composizione di una traslazione  $C$  con una rotazione  $B$ .

(ii) Dimostrare che esiste  $t_0 \geq 0$  per cui il moto avviene nella regione  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$  per  $t \geq t_0$ .

(iii) Determinare la velocità assoluta  $v$ , la velocità relativa  $v'$ , la componente traslatoria della velocità di trascinamento  $v_0$ , e la componente rotatoria della velocità di trascinamento  $v_T$  del punto  $P$ .

(iv) Determinare la forza centrifuga, la forma di Coriolis, e la forza inerziale di rotazione che agiscono sul punto  $P$ .