

FM210 Meccanica Analitica

Tutorato 7

Docente: Guido Gentile, Esercitatrice: Livia Corsi
Tutori: Francesco Artibani, Simone Corriano

09/05/2025

Esercizio 1.

Si consideri un sistema lagrangiano costituito da 2 punti materiali P_1 e P_2 , entrambi di massa $m = 1$, vincolati a muoversi in un piano verticale (x, y) su profili di equazione, rispettivamente, $y = 1$ e $y = x^2$; sia g l'accelerazione di gravità.

I due punti sono inoltre collegati da una molla ideale di costante elastica $k > 0$.

Si completino le seguenti richieste:

- (i) Si scriva la lagrangiana \mathcal{L} del sistema.
- (ii) Si scrivano le equazioni di Eulero-Lagrange del sistema.
- (iii) Si determinino le configurazioni di equilibrio e se ne discuta la stabilità.

Esercizio 2.

Un punto materiale P di massa m è vincolato a muoversi sotto l'effetto della forza peso (sia g l'accelerazione di gravità) su una superficie sferica liscia di equazione

$$x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = \ell^2, \quad \ell > 0.$$

Parametrizzando la superficie di vincolo usando le coordinate sferiche

$$q = \ell \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ 1 - \cos \theta \end{pmatrix},$$

si completino le seguenti richieste:

- (i) Si scriva la lagrangiana \mathcal{L} del sistema.
- (ii) Si identifichi una variabile ciclica, se possibile, e si sfrutti ciò per trovare 2 costanti del moto.
- (iii) Si ricavino le equazioni di Eulero-Lagrange.
- (iv) Nel caso in cui esista una variabile ciclica, si utilizzi il metodo di Routh per ridurre il numero di gradi di libertà del sistema e si trovi la nuova lagrangiana ridotta.

Esercizio 3.

In un piano verticale π sottoposto ad una forza di gravità (sia g l'accelerazione di gravità) due punti materiali P_1 e P_2 , entrambi di massa m , sono vincolati a muoversi su una

guida circolare di raggio 1; si scelga in π un sistema di coordinate (x, y) nel quale la circonferenza abbia equazione

$$x^2 + (y - 1)^2 = 1.$$

Due punti materiali P_3 e P_4 , anch'essi di massa m , possono scorrere lungo una guida orizzontale contenuta in π di equazione $y = 0$.

I punti P_1 e P_2 sono collegati tramite una molla, rispettivamente, ai punti P_3 e P_4 , i quali, a loro volta, sono collegati tramite una molla allo stesso punto materiale P_5 , di massa m , libero di scorrere lungo l'asse y ; le molle sono tutte ideali ed hanno costante elastica $k > 0$.

Utilizzando come coordinate lagrangiane le coordinate cartesiane non banali dei punti P_3 , P_4 e P_5 , e gli angoli che i vettori $\overline{OP_1}$ e $\overline{OP_2}$ formano con la verticale discendente (se O è il centro della guida circolare), si completino le seguenti richieste:

(i) Si scriva la lagrangiana del sistema e le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.

(ii) Si determinino i punti di equilibrio del sistema e se ne discuta la stabilità

[Suggerimento: si osservi per qualche minuto la lagrangiana].

(iii) Nella configurazione

$$P_1 = (1, 1), \quad P_2 = (-1, 1), \quad P_3 = (1, 0), \quad P_4 = (-1, 0) \quad P_5 = (0, -mg/2k),$$

$$v_1 = (0, 0), \quad v_2 = (0, 0), \quad v_3 = (0, 0), \quad v_4 = (0, 0) \quad v_5 = (0, 0),$$

si determinino le reazioni vincolari che agiscono sul punto P_3 .

Si supponga ora che i punti P_1 e P_2 siano fissati nelle configurazioni, rispettivamente, $P_1 = (1, 1)$ e $P_2 = (-1, 1)$ e il piano π ruoti intorno all'asse y con velocità angolare costante ω .

(iv) Per questa nuova configurazione del sistema si determinino i punti di equilibrio (nel sistema di riferimento solidale con il piano π).

(v) Si studi, se esistono, la stabilità dei punti di equilibrio trovati nel punto precedente.

(iv)* Si determinino le reazioni vincolari che agiscono sul punto P_3 , in corrispondenza di una generica configurazione compatibile con il moto.