

FM210 Meccanica Analitica

Tutorato 8

Docente: Guido Gentile, Esercitatrice: Livia Corsi
Tutori: Francesco Artibani, Simone Corriano

16/05/2025

Esercizio 1 (II Esonero 08/06/2023).

Un sistema meccanico è costituito da un disco omogeneo di raggio $r = 1$ e massa $M = 3$ e da un punto materiale P di massa $m = 2$, vincolati a muoversi nel piano (x, y) nel modo seguente:

- il disco rotola senza strisciare all'interno di una circonferenza che ha centro O nell'origine e raggio $R = 3$, mentre il punto P si muove lungo la circonferenza stessa;
- una molla di lunghezza a riposo trascurabile e costante elastica $k > 0$ collega il punto P al centro di massa C del disco;
- sul sistema agisce inoltre la forza peso (si indichi con g l'accelerazione di gravità).

Si completino le seguenti richieste:

- (i) Si scrivano la lagrangiana \mathcal{L} del sistema e le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange, utilizzando come coordinate lagrangiane gli angoli che i segmenti OC e OP formano con l'asse y discendente.
- (ii) Si determinino le configurazioni di equilibrio e se ne discuta la stabilità.
- (iii) Si calcoli la forza vincolare che agisce sul punto P .

Esercizio 2.

In un piano orizzontale (che identificheremo con (x, y)), si muove un disco rigido e omogeneo, di raggio R e massa M . Chiamando P_1 e P_2 due punti diagonalmente opposti sul bordo del disco si ha che:

- il punto P_1 del disco è vincolato a scorrere sull'asse y ;
- il punto P_2 del disco è collegato tramite una molla ideale (con costante elastica $k > 0$) ad un punto P_3 fissato sull'asse x (diciamo $P_3 = (a, 0)$);
- il disco è libero di ruotare attorno ad un asse perpendicolare al piano e passante per P_1 .

Scegliendo come coordinate lagrangiane l'ordinata y di P_1 e l'angolo θ che il segmento $\overline{P_1 P_2}$ forma con il verso positivo dell'asse y , si completino le seguenti richieste:

- (i) Si scrivano la lagrangiana \mathcal{L} del sistema e le relative equazioni di Eulero-Lagrange.
- (ii) Si determinino le configurazioni di equilibrio e se ne discuta la stabilità al variare del parametro $a/R \in \mathbb{R}$.

[Il momento d'inerzia del disco rispetto al suo centro di massa è $I = \frac{1}{2}MR^2$.]

Esercizio 3.

In un piano orizzontale sono presenti due punti materiali P_1 e P_2 , entrambi di massa m , vincolati a muoversi nel seguente modo:

- il punto P_2 è vincolato a muoversi lungo una sbarra lineare omogenea S di massa M e lunghezza 4ℓ il cui centro O è fisso;
- il punto P_1 è collegato ai punti O e P_2 , rispettivamente, tramite due sbarre rettilinee S_1 ed S_2 , entrambe di lunghezza ℓ e massa trascurabile;
- il punto P_2 è collegato ad O tramite una molla ideale di costante elastica $k > 0$;
- all'istante iniziale il punto P_2 non coincide con O .

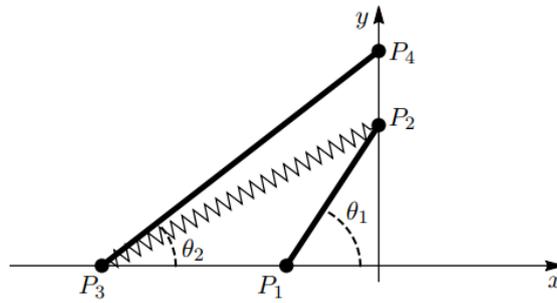
Scegliendo come variabili lagrangiane l'angolo φ che la sbarra S forma con l'asse x di un sistema cartesiano Oxy , e l'angolo θ che la sbarra S_1 forma rispetto alla sbarra S , si completino le seguenti richieste:

- (i) Si scrivano la lagrangiana \mathcal{L} del sistema e le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.
- (ii) Si deduca che la variabile φ è ciclica e si applichi il metodo di Routh per ridurre i gradi di libertà del sistema.
- (iii) Nel caso $m = \ell = k = 1$ e $M = 0$, si determinino le configurazioni di equilibrio del sistema ad un grado di libertà ottenuto al punto precedente, e se ne discuta la stabilità nei casi in cui sia sufficiente un'analisi del secondo ordine.

Esercizio 4 (I Appello 21/06/2021).

Un sistema meccanico è costituito da 4 punti materiali P_1, P_2, P_3 e P_4 , tutti di massa m , che si muovono nel piano verticale (x, y) (sia g l'accelerazione di gravità diretta verso l'asse y discendente), in modo tale che:

- P_1 e P_3 scorrono lungo l'asse x , mentre P_2 e P_4 scorrono lungo l'asse y ;
- un'asta inestensibile di massa trascurabile e lunghezza $\ell_1 = 1$ collega P_1 a P_2 ;
- un'asta inestensibile di massa trascurabile e lunghezza $\ell_2 = 2$ collega P_3 a P_4 ;
- una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo trascurabile collega P_3 a P_4 .



(i) Si scriva la lagrangiana del sistema.

(Come coordinate lagrangiane si possono utilizzare gli angoli θ_1 e θ_2 che le due aste formano con l'asse x , come illustrato in figura).

(ii) Si scrivano le equazioni di Eulero-Lagrange.

(iii) Si determinino le configurazioni di equilibrio e se ne discuta la stabilità nel caso in cui sia sufficiente l'analisi al secondo ordine.

(iv)* Si discuta la stabilità delle configurazioni nel caso in cui l'analisi al secondo ordine sia inconcludente.