FM210 Meccanica Analitica
Tutorato 9

Docente: Guido Gentile, Esercitatrice: Livia Corsi
Tutori: Francesco Artibani, Simone Corriano

23/05/2025

Esercizio 1 (**Recupero della seconda prova di esonero (18-06-2024)**).
Un punto materiale P di massa m è vincolato a muoversi sul paraboloide di equazione $z = -x^2 - y^2$ ed è collegato a un punto P_0 di coordinate (0,0,1) tramite una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla. Sul sistema agisce la forza di gravità diretta verso l'asse z discendente (sia g l'accelerazione di gravità).

1. *Si scrivano la lagrangiana del sistema e le equazioni di Eulero-Lagrange.*
2. *Si verifichi che il sistema è invariante per rotazioni intorno all'asse z e si determini un sistema di coordinate in cui una di esse è ciclica.*
3. *Si determini il momento conservato e si scriva la lagrangiana ridotta.*
4. *Si determinino le configurazioni di equilibrio del sistema descritto dalla lagrangiana ridotta e se ne discuta la stabilità.*
5. *Si studi l'energia potenziale ottenuta al punto 4 e si discuta qualitativamente il moto nello spazio delle fasi corrispondente.*
6. *Si discuta l'esistenza e la stabilità delle configurazioni di equilibrio per la lagrangiana originale al punto 1.*

Esercizio 2 (**Appello straordinario (12-11-2024)**).
Si consideri il sistema meccanico costituito da quattro punti materiali P_1, P_2, P_3 e P_4, tutti di massa m, che si muovono in piano orizzontale nel modo seguente (cfr. la figura). I punti sono disposti in corrispondenza dei vertici di un quadrato indeformabile Q, la cui diagonale ha lunghezza $\ell = 2$, e sono vincolati a scorrere lungo una circonferenza di raggio $r = 1$. Inoltre quattro molle, tutte di costante elastica k e lunghezza a riposo trascurabile, collegano P_1, P_2, P_3 e P_4, rispettivamente, con i punti fissi Q_1, Q_2, Q_3 e Q_4, collocati in corrispondenza dei vertici di un quadrato che ha la diagonale di lunghezza $L = 4$ e il centro coincidente con il centro C della circonferenza. (si scelga un sistema di riferimento opportuno guardando la figura).

1. *Si scriva la lagrangiana del sistema (può essere conveniente utilizzare come coordinata lagrangiana l'angolo θ che il segmento CP_1 forma con il verso positivo dell'asse x).*

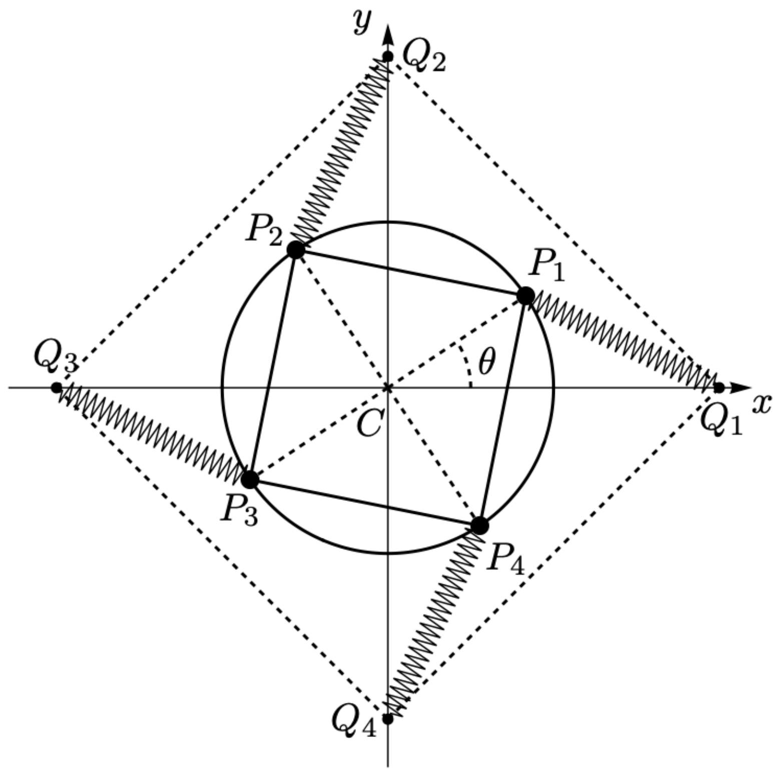
2. *Si scrivano le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange.*

3. *Si determinino le configurazioni di equilibrio del sistema.*

4. *Si discuta la stabilità delle configurazioni di equilibrio.*

5. *Si discuta come cambia lo scenario se il piano è verticale, con la forza di gravità diretta lungo la direzione e il verso del segmento che collega il punto Q_2 al punto Q_4 (cfr. la figura).*

6. *Si discuta come cambia ulteriormente lo scenario, rispetto al punto 5, nel caso in cui i quattro lati del quadrato Q abbiano ciascuno massa M.*



Esercizio 3. *In un piano orizzontale, sul quale è fissato un sistema di assi cartesiani ortogonali $O\hat{x}\hat{y}$, si muove una guida circolare, rigida e omogenea, di centro G, massa M e raggio R. Lungo un diametro della guida è saldata una barra AB, rigida e omogenea, di massa m e lunghezza $L = 2R$. Il punto C della barra, che dista $d = R/2$ dall'estremo A, è vincolato a scorrere senza attrito lungo una guida coincidente con l'asse $O\hat{x}$. Il sistema è libero di ruotare rigidamente attorno ad un asse perpendicolare al piano $O\hat{x}\hat{y}$, passante per C, ed due molle di costante elastica K uniscono rispettivamente i due punti A e H_a e B e H_b, con $K > 0$, dove H_a è la proiezione ortogonale di A sulla retta x = -γ e H_b è la proiezione ortogonale di B sulla retta $x = \gamma$, con $\gamma > 0$. Si adottino come coordinate lagrangiane l'ascissa x di C e l'angolo θ che la barra AB forma con il verso positivo dell'asse $O\hat{x}$ (si veda la Figura sotto).*

1. *Si scrivano la funzione di Lagrange $\mathcal{L}$ del sistema e le equazioni del moto.*
2. *Si trovino le posizioni di equilibrio del sistema e se ne discuta il numero e la stabilità al variare del parametro γ/R*