

$y \in [y_-, y_+]$, è strettamente crescente per $y \in (y_-, y_1)$ e strettamente decrescente per $y \in (y_1, y_+)$, dove $y_1 = y_1(E)$ è il valore in cui si annulla la derivata (tale valore esiste ed è unico)

$$\frac{dx_-}{dy}(y) = -\frac{1}{2\sqrt{2-y^2-\sqrt{1+\frac{E}{y}}}} \left(2y - \frac{E}{2y^2\sqrt{1+\frac{E}{y}}} \right)$$

i.e. in cui $\sqrt{1+E/y_1} = E/4y_1^3$. In conclusione, la curva $(x_-(y), y)$, con $y \in [y_-, y_+]$, si trova nella regione $\mathcal{A}_2$ ed è come nella figura 5.19. Infine, per $E < 0$, le funzioni $x_+(y)$ e $x_-(y)$ sono definite in $[y_1, y_2]$ e in $[y_1, y_3]$, rispettivamente, dove y_1, y_2 e y_3 , con $y_1 < y_2 < y_3$, dipendono da E ; in particolare si ha $y_1 = -E$. Le due curve $(x_+(y), y)$, con $y \in [y_1, y_2]$ e $(x_-(y), y)$, con $y \in [y_1, y_3]$, sono entrambe contenute in $\mathcal{A}_3$ e si raccordano in y_1 , dove $x_-(y_1) = x_+(y_1)$, mentre si ha $x_-(y_2) = x_+(y_3) = 0$, consistentemente con la figura 5.19.]

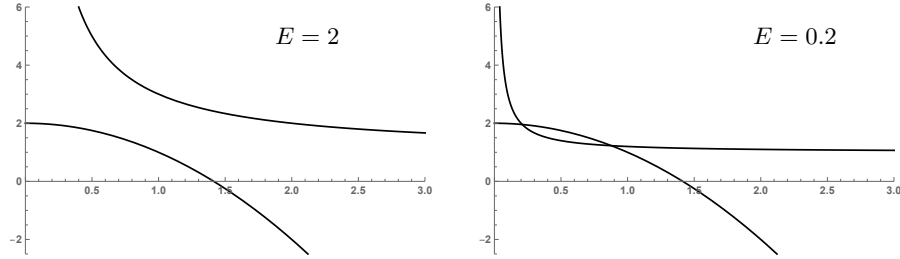


Figura 5.22 Grafico delle curve $2 - y^2$ e $\sqrt{1 + E/y}$ per $E = 2$ ed $E = 0.2$.

Esercizio 12 Si consideri il sistema planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y(x^2 - 1), \\ \dot{y} = 2x(2x^2 - y^2). \end{cases}$$

- (1) Si verifichi che $H(x, y) = (x^2 - 1)(y^2 - x^2 - 1)$ è una costante del moto.
- (2) Si determinino i punti di equilibrio e se ne discuta la stabilità.
- (3) Si studino le curve di livello $\gamma_E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : H(x, y) = E\}$.
- (4) Si individuino i dati iniziali che danno origine a traiettorie periodiche.
- (5) Si calcoli il tempo in cui la traiettoria con dato iniziale $(x(0), y(0)) = (1, 0)$ interseca l'asse $y = \sqrt{2}$.
- (6) Si dimostri che la traiettoria con dato iniziale $(x(0), y(0)) = (1/\sqrt{2}, 0)$ è periodica, se ne scriva il periodo come integrale definito e se ne dia una stima.
- (7) Se si aggiunge un campo vettoriale $(0, -\alpha y)$, con $\alpha > 0$, si trovi un insieme positivamente invariante che contenga il punto $P_0 = (0, 0)$ e si dimostri che P_0 è asintoticamente stabile.

Esercizio 24 Si consideri il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 2(y-1)(x^2 - \alpha), \\ \dot{y} = 2x(x^2 - \alpha). \end{cases}$$

- (1) Per $\alpha = 1$, si verifichi che $H(x, y) = (y-1)^2 - x^2$ è una costante del moto.
- (2) Per $\alpha = 1$, si determinino i punti di equilibrio e se ne discuta la stabilità.
- (3) Per $\alpha = 1$, si analizzino le curve di livello di $H(x, y)$ e si studino le traiettorie nel piano delle fasi.
- (4) Come cambia lo scenario se $\alpha = -1$?

Esercizio 25 Si consideri il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y - (x^2 - 1)^2 - 1, \\ \dot{y} = 4x(x^2 - 1)(y - 1). \end{cases}$$

- (1) Si verifichi che esiste una costante del moto $H(x, y)$ e la si determini.
- (2) Si individuino i punti critici e se ne discuta la stabilità.
- (3) Si studino qualitativamente le curve di livello nel piano delle fasi.
- (4) Si individuino i dati iniziali che danno origine a traiettorie periodiche.
- (5) Si dimostri in particolare che la traiettoria con dato iniziale $(1, 3/4)$ è periodica e se ne scriva il periodo come integrale definito.
- (6) Si trovino in forma implicita le soluzioni $(x(t), y(t))$ con dati iniziali $(1, 1)$ e $(2, 9)$, e se ne discuta il comportamento asintotico per $t \rightarrow \pm\infty$.

[Suggerimento. La costante del moto è $H(x, y) = (y-1)(y - (x^2 - 1)^2)$, a meno di una costante additiva.]

Esercizio 26 Si consideri il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y - 1 - 2e^{-x^2}, \\ \dot{y} = -4xe^{-x^2}(y - 1). \end{cases}$$

- (1) Si verifichi che esiste una costante del moto $H(x, y)$ e la si determini.
- (2) Si individuino i punti critici e se ne discuta la stabilità.
- (3) Si traccino le curve di livello nel piano delle fasi e se ne discuta qualitativamente la forma.
- (4) Si individuino i dati iniziali che danno origine a traiettorie periodiche; si dimostri in particolare che la traiettoria con dato iniziale $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 3/2 + \sqrt{2}/3)$ è periodica e se ne scriva il periodo come integrale definito.

[Suggerimento. Si ha $H(x, y) = (y-1)(y - 2e^{-x^2})$, a meno di una costante additiva.]

Esercizio 27 Sia dato il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - 1 + 4y^3, \\ \dot{y} = -2xy. \end{cases}$$

- (1) Si verifichi che la funzione $H(x, y) = y(x^2 + y^3 - 1)$ è una costante del moto.
- (2) Si determinino i punti di equilibrio e se ne discuta la stabilità.
- (3) Si analizzino le traiettorie lungo la curva di livello che corrisponde al valore $H(x, y) = 0$.
- (4) Si discutano qualitativamente le altre traiettorie nel piano delle fasi.

Esercizio 30 Si consideri il sistema planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y - 4y^3, \\ \dot{y} = 10x - 4x^3. \end{cases}$$

- (1) Si trovi una costante del moto $H(x, y)$.
- (2) Si determinino i punti critici e se ne discuta la stabilità.
- (3) Si analizzino le curve di livello nel piano delle fasi.
- (4) Si individuino i dati iniziali che danno origine a traiettorie periodiche.

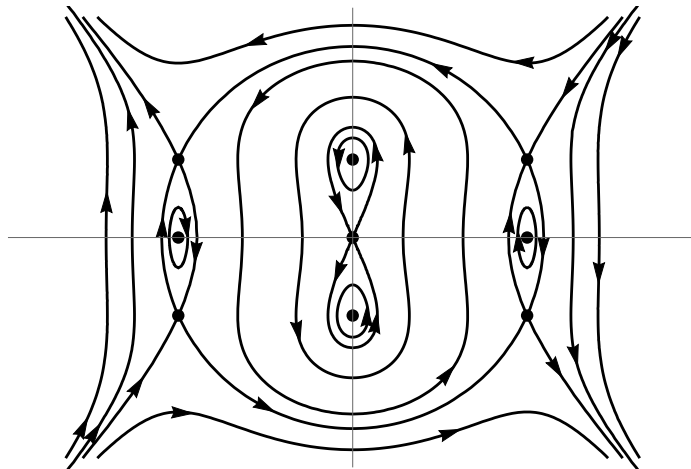


Figura 5.28 Piano delle fasi per il sistema dell'esercizio 30.

[*Suggerimento.* Si ha $H(x, y) = x^2(x^2 - 5) - y^2(y^2 - 1) + c$, dove c è una costante arbitraria. Scegliendo $c = 6$, si può riscrivere $H(x, y) = (x^2 + y^2 - 3)(x^2 - y^2 - 2)$. Indicando con $\Sigma_E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : H(x, y) = E\}$ le curve di livello, si ha $\Sigma_0 = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$, dove $\mathcal{C}_1$ è la circonferenza di centro l'origine e raggio $\sqrt{3}$ e $\mathcal{C}_2$ è l'iperbole di equazione $x^2 - y^2 = 2$. Si hanno 9 punti di equilibrio: $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (0, -1/\sqrt{2})$, $P_3 = (0, 1/\sqrt{2})$, $P_4 = (-\sqrt{5}/2, 0)$, $P_5 = (-\sqrt{5}/2, -\sqrt{1}/2)$, $P_6 = (-\sqrt{5}/2, \sqrt{1}/2)$, $P_7 = (\sqrt{5}/2, 0)$, $P_8 = (\sqrt{5}/2, -\sqrt{1}/2)$, $P_9 = (\sqrt{5}/2, \sqrt{1}/2)$. Di essi, P_1, P_5, P_6, P_8 e P_9 sono instabili, mentre P_2, P_3, P_4 e P_7 sono stabili. Il punto P_1 è contenuto nella curva di livello Σ_6 , che è una *curva del diavolo*, i.e. una curva piana di equazione $y^2(y^2 - a^2) = x^2(x^2 - b^2)$, con $a, b \in \mathbb{R}_+$ (nel nostro caso $a = 1$ e $b = \sqrt{5}$). In particolare Σ_6 è costituita tra tre componenti connesse, tra cui una lemniscata (i.e. una curva a forma di 8). Le altre curve di livello si ottengono per continuità (cfr. la figura 5.28). Si tenga conto anche del teorema 5.22 per disegnare le curve di livello racchiuse tra Σ_0 e Σ_6 .]

Esercizio 31 Si consideri il sistema dinamico in $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y(2y^2 + 2x^2 + 1), \\ \dot{y} = -2x(3x^4 + 2y^2). \end{cases}$$

Si determinino i punti di equilibrio e se ne discuta la stabilità.

[*Suggerimento.* Può essere conveniente utilizzare coordinate polari.]

Esercizio 44 Si consideri il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - y - \alpha (x^3 + xy^2), \\ \dot{y} = x - y - \alpha (yx^2 + y^3). \end{cases}$$

- (1) Per $\alpha \geq 0$, si dimostri che l'origine è punto di equilibrio asintoticamente stabile e se ne studi il bacino d'attrazione. Si studi qualitativamente il moto.
- (2) Per $\alpha < 0$, si dimostri che esiste un ciclo limite repulsivo (ciclo α -limite) e si studi il comportamento asintotico del sistema. Si studi qualitativamente il moto.
- (3) Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, si risolvano esplicitamente le equazioni del moto.
- (4) Si dimostri che il sistema non ammette costanti del moto non banali.

Esercizio 45 Sia $\dot{x} = f(x)$ un sistema dinamico planare di classe C^1 che ammette una costante del moto $H(x)$ di classe C^2 . Si supponga che

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} H(x) = +\infty.$$

- (1) Si dimostri che le traiettorie sono definite globalmente nel tempo.
- (2) Si dimostri che $L_\omega(x) \neq \emptyset$ per ogni $x \in \mathbb{R}^2$.

[*Suggerimento.* Si ragioni come nella dimostrazione del lemma 5.36.]

Esercizio 46 Si consideri il sistema dinamico in $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y(z-1), \\ \dot{y} = -x(z-1), \\ \dot{z} = -z^3, \end{cases}$$

Si determinino i punti di equilibrio e se ne discuta la stabilità. [*Soluzione.* L'origine è l'unico punto di equilibrio. Se ne può dimostrare la stabilità usando il teorema di Ljapunov, con funzione di Ljapunov $W(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2$, con $a, b, c > 0$ scelte in modo che risulti $\dot{W} \leq 0$; per esempio si può scegliere $a = c = 1$, $b = 2$. Non si ha stabilità asintotica, come si conclude osservando che il piano $z = 0$ è invariante e le orbite su tale piano sono curve chiuse che racchiudono l'origine al loro interno.]

Esercizio 47 Si consideri il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y - e^x - 4e^{-x} - 5, \\ \dot{y} = e^{-x} (e^{2x} - 4) (y - 5). \end{cases}$$

- (1) Si dimostri che la funzione $H(x, y) = (y - e^x - 4e^{-x}) (y - 5)$ è una costante del moto.
- (2) Si determinino i punti di equilibrio.
- (3) Se ne discuta la stabilità.
- (4) Si studino qualitativamente le traiettorie del sistema.

Esercizio 48 Si consideri il sistema dinamico descritto dall'equazione

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + x^n = 0,$$

con n dispari e $\gamma > 0$.

- (1) Si dimostri che il punto $(x, \dot{x}) = (0, 0)$ è asintoticamente stabile.
- (2) Si dimostri che tutte le traiettorie tendono al punto $(0, 0)$ per $t \rightarrow +\infty$.

Esercizio 63 Si consideri il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y + 1 - |x|^5, \\ \dot{y} = 5y|x|^3x. \end{cases}$$

- (1) Si verifichi che esiste una costante del moto $H(x, y)$.
- (2) Si determinino i punti di equilibrio e se ne discuta la stabilità.
- (3) Si studino qualitativamente le traiettorie del sistema.
- (4) Si calcoli il limite per $t \rightarrow +\infty$, se esiste, delle soluzioni $\varphi(t, \bar{z})$ con dati iniziali $\bar{z} = (\bar{x}, \bar{y})$, per $\bar{y} = 0$ e $\bar{x} \in \{0, 1, 2\}$.

[*Suggerimento.* Si trova $H = y(y + 1 - |x|^5)$, a meno di una costante additiva; si noti che H è di classe C^4 . L'asse $y = 0$ è invariante e i punti $P_1 = (-1, 0)$ e $P_2 = (1, 0)$, posti lungo tale asse, sono punti di equilibrio instabili; un terzo punto di equilibrio, $P_3 = (0, -1/2)$, è stabile. Se $\bar{z} = (1, 0)$ si ha $\varphi(t, \bar{z}) = (1, 0) \forall t \in \mathbb{R}$; se $\bar{z} = (0, 0)$ o $\bar{z} = (2, 0)$ si ha $\varphi(t, \bar{z}) \rightarrow (1, 0)$ per $t \rightarrow +\infty$.]

Esercizio 64 Si consideri il sistema dinamico descritto dall'equazione

$$G(\dot{x}) \ddot{x} + F(x) = 0,$$

dove G e F sono due funzioni di classe C^2 , con $G(y) \neq 0 \forall y \in \mathbb{R}$.

- (1) Si dimostri che è una costante del moto la funzione $H(x, \dot{x})$, con

$$H(x, y) = \int_0^x dx' F(x') + \int_0^y dy' y' G(y'),$$

- (2) Si assuma $G(y) = (1 + y^2)^{-1}$ e $F(x) = x$.
 - (2.1) Si calcoli $H(x, y)$.
 - (2.2) Si dimostri che tutte le traiettorie sono limitate.
 - (2.3) Si studino le curve di livello della funzione $H(x, y)$.
 - (2.4) Si determini l'insieme dei dati iniziali che danno luogo a traiettorie periodiche.
 - (2.5) Si dimostri che, se si aggiunge all'equazione un termine $\gamma \dot{x}$, con $\gamma > 0$ l'origine è un punto di equilibrio asintoticamente stabile, e se ne stimi il bacino di attrazione.

Esercizio 65 Siano $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni di classe C^1 . L'equazione

$$\ddot{x} + f(x) \dot{x} + g(x) = 0$$

è chiamata *equazione di Liénard*. Se $f(x) = (x^2 - 1)$ e $g(x) = x$, si ottiene l'*equazione di van der Pol*

$$\ddot{x} + (x^2 - 1) \dot{x} + x = 0.$$

Si dimostri che, se si definisce

$$F(x) = \int_0^x ds f(s),$$

si può riscrivere l'equazione di Liénard come un sistema di equazioni del primo ordine

$$\begin{cases} \dot{x} = y - F(x), \\ \dot{y} = -g(x). \end{cases}$$

La trasformazione $y = F(x) + \dot{x}$ è nota come *trasformazione di Liénard* e il piano delle fasi (x, y) prende il nome di *piano di Liénard*. [Soluzione. Derivando l'equazione $\dot{x} = y - F(x)$ e notando che $\dot{y} = -g(x)$, si trova $\ddot{x} = \dot{y} - F'(x) \dot{x} = -g(x) - f(x) \dot{x}$.]