

Analisi Matematica per le Applicazioni – Analisi Matematica II
CdL in Ingegneria Meccanica – Anno Accademico 2025/2026

Soluzioni della prova scritta del primo appello (16-01-2026)

Esercizio 0.

(1) Se il dato iniziale $y(0)$ è tale che $y(0) \neq 0$, integrando per separazione di variabili si trova

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int 3x^2 dx \implies \int \frac{dy}{y^2} = -\frac{1}{y} + c_1, \quad \int 3x^2 dx = x^3 + c_2,$$

dove c_1 e c_2 sono due costanti arbitrarie. Si trova quindi

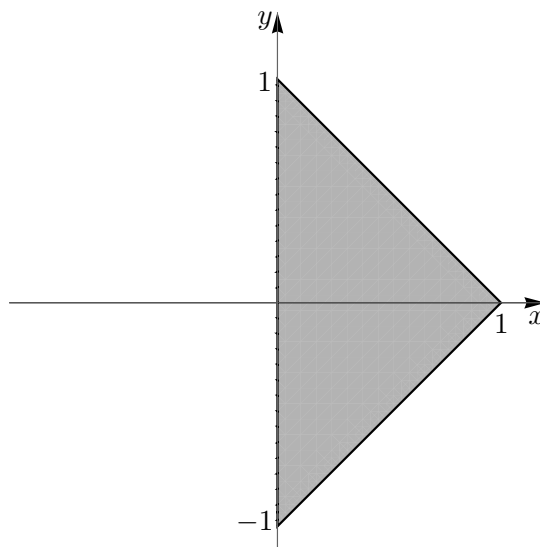
$$-\frac{1}{y} = x^3 + C \implies y(x) = -\frac{1}{x^3 + C},$$

dove C è una costante arbitraria (calcolando $y(x)$ in $x = 0$, si trova $C = -1/y(0)$). Se invece il dato iniziale è $y(0) = 0$, la soluzione è data da $y(x) = 0$.

(2) Per disegnare il dominio Ω si deve tener conto che, poiché $x + |y| \leq 1$ e $|y| \geq 0$, si ha anche $x \leq 1$. Per ogni $x \in [0, 1]$, si ha quindi

$$0 \leq |y| \leq 1 - x \implies -1 + x \leq y \leq 1 - x,$$

così che, per ogni $x \in [0, 1]$, y varia tra le due rette $y = -1 + x$ e $y = 1 - x$ (cfr. la figura).



Si ha

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} x \, dx \, dy &= \int_0^1 x \, dx \int_{-1+x}^{1-x} dy = \int_0^1 x y \Big|_{-1+x}^{1-x} dx = \int_0^1 x (1 - x - (-1 + x)) \, dx \\ &= 2 \int_0^1 (x - x^2) \, dx = 2 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

(3) Integrando per separazione di variabili si trova

$$\int \frac{y}{1+y^2} dy = \int x dx \implies \frac{1}{2} \log(1+y^2) = \frac{x^2}{2} + C, \quad (*)$$

dove $y = y(x)$ e la costante C è fissata dalla condizione iniziale: per $x = 0$ si ha $y(0) = 1$, così che $(*)$, calcolata in $x = 0$, dà

$$\frac{1}{2} \log 2 = 0 + C \implies C = \frac{1}{2} \log 2.$$

Quindi si ottiene

$$\begin{aligned} \log(1+y^2) &= x^2 + \log 2 \implies 1+y^2 = e^{x^2+\log 2} = e^{x^2} e^{\log 2} = 2e^{x^2} \\ \implies y^2 &= 2e^{x^2} - 1 \implies y = \pm \sqrt{2e^{x^2} - 1}. \implies y = \sqrt{2e^{x^2} - 1}, \end{aligned}$$

dove la scelta del segno $+$ nell'ultimo passaggio è di nuovo dovuta alla condizione iniziale.

(4) La curva γ si può parametrizzare come

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)) = (t, t^2), \quad t \in [0, 1],$$

così che $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t)) = (1, 2t)$. Si ha quindi

$$\int_{\gamma} y dx + x dy = \int_0^1 dt (t^2 + t \cdot 2t) = 3 \int_0^1 t^2 dt = 3 \left. \frac{t^3}{3} \right|_0^1 = t^3 \Big|_0^1 = 1.$$

[Alternativamente, si nota innanzitutto che la forma differenziabile è esatta in quanto è chiusa (scrivendo $\omega = F_1(x, y) dx + F_2(x, y) dy$, con $F_1(x, y) = y$ e $F_2(x, y) = x$, si ha $\partial F_1(x, y)/\partial y = 1 = \partial F_2(x, y)/\partial x$) ed è definita in $\mathbb{R}^2$, che è un insieme semplicemente connesso; si cerca quindi una primitiva $\mathcal{U}(x, y)$ tale che

$$\mathcal{U}(x, y) = \int dx y = xy + c_1(y) = \int dy x = xy + c_2(x),$$

così che scegliendo $c_1(y) = c_2(x) = 0$ si trova $\mathcal{U}(x, y) = xy$; si calcola l'integrale come

$$\int_{\gamma} y dx + x dy = \mathcal{U}(1, 1) - \mathcal{U}(0, 0) = 1,$$

utilizzando le proprietà delle forme differenziali esatte.]

ESERCIZIO 1. Integrando per separazione di variabili si trova

$$\int dy \frac{y}{1+y^2} dy = \int \frac{1+\log x}{x \log x} dx,$$

dove, con la sostituzione $t = 1 + y^2 = t$ ($\implies dt = 2y dy$), si trova

$$I_1 = \int \frac{y}{1+y^2} dy = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \log t + c_1 = \frac{1}{2} \log(1+y^2) + c_1,$$

dove c_1 è una costante arbitraria, mentre, con la sostituzione $t = \log x$ ($\implies dt = dx/x$), si trova

$$I_2 = \int \frac{1 + \log x}{x \log x} dx = \int dt \frac{1+t}{t} = \int \frac{dt}{t} + \int dt = \log |t| + t + c_2 = \log |\log x| + \log x + c_2.$$

dove c_2 è di nuovo una costante arbitraria. In conclusione si ha

$$\frac{1}{2} \log(1 + y^2) = \log |\log x| + \log x + C,$$

dove la costante $C = c_1 - c_2$ si fissa imponendo la condizione iniziale $y(e) = -\sqrt{3}$. Si trova

$$\frac{1}{2} \log(1 + 3) = \log |\log e| + \log e + C,$$

da cui, tenendo conto che

$$\frac{1}{2} \log 4 = \frac{1}{2} \log 2^2 = \log 2, \quad \log |\log e| + \log e = \log 1 + 1 = 1,$$

si trova

$$C = \log 2 - 1.$$

Ne segue che

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \log(1 + y^2) &= \log |\log x| + \log x + \log 2 - 1, \\ \implies 1 + y^2 &= \exp\left(2(\log |\log x| + \log x + \log 2 - 1)\right), \\ \implies y^2 &= \exp\left(2(\log |\log x| + \log x + \log 2 - 1)\right) - 1, \\ \implies y &= \pm \sqrt{\exp\left(2(\log |\log x| + \log x + \log 2 - 1)\right) - 1}, \\ \implies y &= -\sqrt{\exp\left(2(\log |\log x| + \log x + \log 2 - 1)\right) - 1}, \end{aligned}$$

dove, nell'ultimo passaggio, si è tenuto conto che $y(e) = -\sqrt{3} < 0$. [Si noti che, usando il fatto che si ha $\log |\log x| + \log x + \log 2 - 1 = \log(2e^{-1}x|\log x|)$, si può scrivere $y(x) = -\sqrt{(2e^{-1}x|\log x|)^2 - 1}$.]

ESERCIZIO 2. Gli autovalori di A sono le radici del polinomio caratteristico

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbf{1}) = \det \begin{pmatrix} 7 - \lambda & -4 \\ 4 & -1 - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda - 7 + 16 = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2,$$

quindi sono $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$. La matrice non è diagonalizzabile, dal momento che è una matrice 2×2 con autovalori coincidenti e non è proporzionale all'identità. [Si può anche verificare esplicitamente che A non è diagonalizzabile nel modo seguente: se $v = (v_1, v_2)$ è l'autovettore associato all'autovalore $\lambda = 3$, l'equazione $Av = 3v$ dà

$$7v_1 - 4v_2 = 3v_1, \quad 4v_1 - v_2 = 3v_2 \implies v_1 = v_2 \implies v = (1, 1),$$

quindi esiste un unico autovettore associato a $\lambda = 3$.]

Possiamo allora scrivere

$$A = S + N, \quad S = 3\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \implies N = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

Si verifica immediatamente che $N^2 = 0$. Si ha quindi

$$e^{Ax} = e^{Sx+Nx} = e^{Sx}e^{Nx} = (e^{3x\mathbb{1}})(e^{Nx}) = (e^{3x\mathbb{1}})(\mathbb{1} + Nx) = e^{3x} \begin{pmatrix} 1+4x & -4x \\ 4x & 1-4x \end{pmatrix}.$$

La soluzione con la condizione iniziale assegnata è data da

$$y(x) = e^{3x} \begin{pmatrix} 1+4x & -4x \\ 4x & 1-4x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Si trova quindi

$$\begin{aligned} y_1(x) &= e^{3x} (4(1+4x) - 4x) = e^{3x} (12x + 4), \\ y_2(x) &= e^{3x} (4(4x) + 1 - 4x) = e^{3x} (12x + 1). \end{aligned}$$

ESERCIZIO 3. Le radici del polinomio caratteristico $\lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda - 1)$ sono

$$\lambda = 0, \quad \lambda = 1.$$

Quindi la soluzione generale dell'equazione omogenea associata è

$$y_0(x) = c_1 + c_2 e^x,$$

dove c_1 e c_2 sono due costanti arbitrarie. La soluzione particolare è data da $\tilde{y}(x) = \tilde{y}_1(x) + \tilde{y}_2(x)$, dove $\tilde{y}_1(x)$ è una soluzione particolare dell'equazione

$$y'' - y' = x^3$$

e $\tilde{y}_2(x)$ è una soluzione particolare dell'equazione

$$y'' - y' = x \sin x.$$

Si cerca $\tilde{y}_1(x)$ nella forma

$$\tilde{y}_1(x) = x(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx.$$

Tenuto conto che

$$\tilde{y}'_1 = 4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx + D, \quad \tilde{y}''_1 = 12Ax^2 + 6Bx + 2C,$$

si trova

$$12Ax^2 + 6Bx + 2C - 4Ax^3 - 3Bx^2 - 2Cx - D = x^3,$$

da cui si ricava

$$\begin{aligned} -4A &= 1 \implies A = -\frac{1}{4}, \\ 12A - 3B &= 0 \implies 3B = 12A = -3 \implies B = -1, \\ 6B - 2C &= 0 \implies 2C = 6B = -6 \implies C = -3, \\ 2C - D &= 0 \implies D = 2C = -6. \end{aligned}$$

Quindi si trova

$$\tilde{y}_1(x) = -\frac{x^4}{4} - x^3 - 3x^2 - 6x.$$

Si cerca $\tilde{y}_2(x)$ nella forma

$$\tilde{y}_2(x) = (Ax + B) \cos x + (Cx + D) \sin x.$$

Tenuto conto che

$$\begin{aligned}\tilde{y}_2' &= A \cos x - (Ax + B) \sin x + C \sin x + (Cx + D) \cos x, \\ \tilde{y}_2'' &= -2A \sin x - (Ax + B) \cos x + 2C \cos x - (Cx + D) \sin x,\end{aligned}$$

si trova

$$\begin{aligned}-2A \sin x - (Ax + B) \cos x + 2C \cos x - (Cx + D) \sin x \\ - A \cos x + (Ax + B) \sin x - C \sin x - (Cx + D) \cos x = x \sin x,\end{aligned}$$

da cui si ricava

$$\begin{aligned}(-2A - D + B - C) \sin x &= 0, \\ (-C + A)x \sin x &= x \sin x, \\ (-B + 2C - A - D) \cos x &= 0, \\ (-A - C)x \cos x &= 0,\end{aligned}$$

La quarta equazione dà

$$C = -A,$$

che, inserita nella seconda, implica

$$2A = 1 \implies A = \frac{1}{2} \implies C = -\frac{1}{2}.$$

Sostituendo i valori trovati di A e C nelle altre due equazioni otteniamo

$$\begin{aligned}-1 - D + B + \frac{1}{2} &= 0 \implies -D + B = \frac{1}{2}, \\ -B - 1 - \frac{1}{2} - D &= 0 \implies -B - D = \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Sommando e sottraendo le due equazioni troviamo

$$-2D = 2, \quad 2B = -1 \implies B = -\frac{1}{2}, \quad D = -1.$$

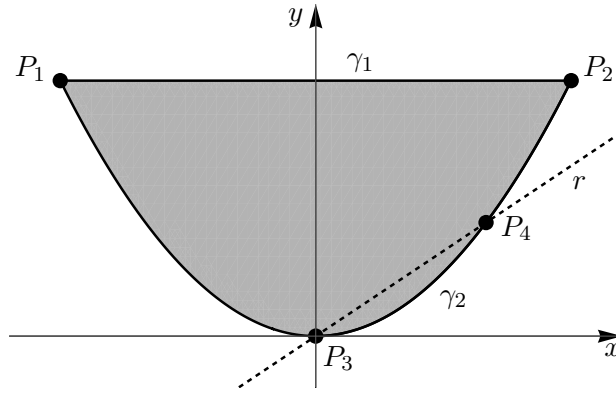
La soluzione $\tilde{y}_2(x)$ è quindi data da

$$\tilde{y}_2(x) = \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right) \cos x + \left(-\frac{x}{2} - 1\right) \sin x.$$

In conclusione la soluzione generale dell'equazione è

$$y(x) = y_0(x) + \tilde{y}(x) = c_1 + c_2 e^x - \frac{x^4}{4} - x^3 - 3x^2 - 6x + \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right) \cos x - \left(\frac{x}{2} + 1\right) \sin x.$$

ESERCIZIO 4. Il dominio D della funzione è dato dall'intersezione dell'insieme che si trova al di sopra della parabola $y = x^2$ con l'insieme che si trova al di sotto della retta $y = 1$ (cfr. la figura).



Le derivate parziali della funzione $f(x, y)$ sono

$$f_x(x, y) = 8x - 12y, \quad f_y(x, y) = 18y - 12x.$$

Si ha $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$ se e solo se $8x - 12y = 18y - 12x = 0$, che possiamo riscrivere

$$2x = 3y, \quad 3y = 2x.$$

Le due equazioni sono uguali: tutti i punti $(x, y) \in \text{int}(D)$ che si trovano sulla retta $y = 2x/3$ (cfr. la figura) sono punti critici interni. La matrice hessiana non dà informazioni sulla loro natura. Infatti si ha

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{yx}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -12 \\ -12 & 18 \end{pmatrix},$$

così che $\det \mathcal{H} = 8 \cdot 18 - 12^2 = 2 \cdot 6 \cdot (12 - 12) = 0$.

Per studiare la funzione sulla frontiera $\gamma_1 \cup \gamma_2$, dove (cfr. la figura)

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= (t, 1), & t &\in [-1, 1], \\ \gamma_2(t) &= (t, t^2), & t &\in [-1, 1], \end{aligned}$$

definiamo

$$\begin{aligned} h_1(t) &= f(\gamma_1(t)) = f(t, 1) = 4t^2 + 9 - 12t, & t &\in [-1, 1], \\ h_2(t) &= f(\gamma_2(t)) = f(t, t^2) = 4t^2 + 9t^4 - 12t^3, & t &\in [-1, 1], \end{aligned}$$

Si ha

$$h'_1(t) = \frac{dh_1}{dt}(t) = 8t - 12,$$

così che $h'_1(t) = 0$ se e solo se $t = 12/8 = 3/2$, che però non appartiene all'intervallo $[-1, 1]$.

Analogamente, si trova

$$h'_2(t) = \frac{dh_2}{dt}(t) = 8t + 36t^3 - 36t^2 = 4t(2 + 9t^2 - 9t) = 0,$$

così che $h'_2(t) = 0$ se e solo se $t = 0 \in [-1, 1]$ oppure $9t^2 - 9t + 2 = 0$, ovvero

$$t = \frac{9 \pm \sqrt{9 \cdot 9 - 9 \cdot 8}}{18} = \frac{9 \pm \sqrt{9}}{18} = \frac{9 \pm 3}{18}.$$

I due valori trovati, $12/18 = 2/3$ e $6/18 = 1/3$ appartengono entrambi all'intervallo $[-1, 1]$.

Infine, bisogna tener conto dei punti di intersezione delle due curve γ_1 e γ_2 .

In conclusione, i punti candidati a essere massimi o minimi sono:

1. i punti critici interni $P = (x, 2x/3)$, con $0 < x < x_0$ dove x_0 è il punto di intersezione tra la retta r $y = 2x/3$ e la parabola $y = x^2$, ovvero tale che $2x_0/3 = x_0^2$, da cui si ricava $x_0 = 2/3$
2. i punti $P_1 = (-1, 1)$ e $P_2 = (1, 1)$ in cui le curve γ_1 e γ_2 si intersecano;
3. i punti lungo la curva $\gamma_2 = \gamma_2(t)$ in cui si annulla la funzione $h'_2(t)$, ovvero $P_3 = (0, 0)$, $P_4 = (2/3, 4/9) = (x_0, x_0^2)$ e $P_5 = (1/3, 1/9)$.

Si noti che P_3 e P_4 sono lungo la retta r , al pari dei punti $P = (x, 2x/3)$, $x \in (0, x_0)$.

Calcolando la funzione $f(x, y)$ sui punti sopra elencati, si trova

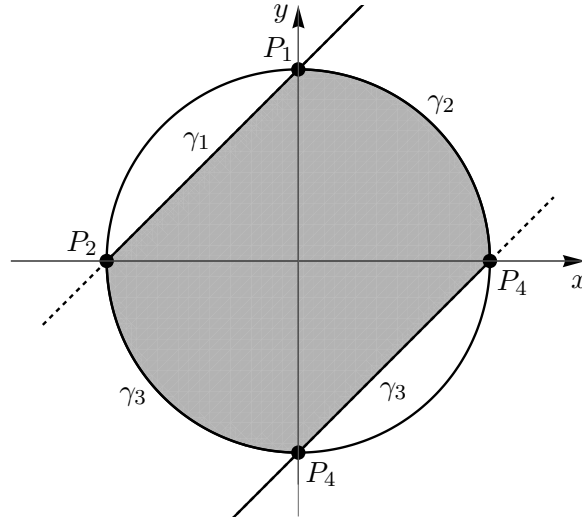
$$f(P_3) = f(P_4) = f(x, 2x/3) = 4x^2 + 9(2x/3)^2 - 12x(2x/3) = 4x^2 + 4x^2 - 8x^2 = 0,$$

$$f(P_5) = f(1/3, 1/9) = 4/9 + 9/81 - 12/27 = \frac{36 + 9 - 36}{81} = \frac{1}{9},$$

$$f(P_1) = f(-1, 1) = 4 + 9 + 12 = 25, \quad f(P_2) = f(1, 1) = 4 + 9 - 12 = 1.$$

In conclusione tutti i punti lungo il segmento che unisce i punti P_3 e P_4 , estremi compresi, sono punti di minimo assoluto, in corrispondenza dei quali la funzione $f(x, y)$ assume il valore minimo $m = 0$, mentre il punto P_1 è un punto di massimo assoluto, e in corrispondenza di tale punto la funzione assume il valore massimo $M = 25$.

Esercizio 5. L'insieme Ω si ottiene richiedendo: (1) $x^2 + y^2 \leq 9$, che definisce il cerchio $\mathcal{C}$ di raggio $R = 3$ e centro nell'origine; (2) $|y - x| \leq 3$, ovvero $-3 \leq y - x \leq 3$, che definisce la striscia $-3 + x \leq y \leq 3 + x$.



La retta $y = 3 + x$ interseca la circonferenza $\partial\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 9\}$ in (x, y) tale che

$$y = x + 3, \quad x^2 + y^2 = 9 \implies x^2 + (x + 3)^2 = 9 \implies 2x^2 + 6x + 9 = 9 \implies 2(x + 3)x = 0,$$

ovvero in $P_1 = (0, 3)$ e $P_2 = (-3, 0)$, mentre la retta $y = x - 3$ interseca la circonferenza $\partial\mathcal{C}$ nei punti x, y tali che

$$y = x - 3, \quad x^2 + y^2 = 9 \implies x^2 + (x - 3)^2 = 9 \implies 2x^2 - 6x + 9 = 9 \implies 2(x - 3)x = 0,$$

ovvero in $P_3 = (0, -3)$ e $P_4 = (3, 0)$ (cfr. la figura).

L'insieme Ω è quindi l'insieme del piano che ha come frontiera le curve

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-3, 0], y = x + 3\}, & \gamma_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 3], y = \sqrt{9 - x^2}\}, \\ \gamma_3 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 3], y = x - 3\}, & \gamma_4 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-3, 0], y = -\sqrt{9 - x^2}\}. \end{aligned}$$

Si può suddividere Ω in due sottoinsiemi,

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2,$$

dove

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \{(x, y) \in \Omega : x \geq 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 3, x - 3 \leq y \leq \sqrt{9 - x^2}\}, \\ \Omega_2 &= \{(x, y) \in \Omega : x < 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -3 \leq x < 0, -\sqrt{9 - x^2} \leq y \leq x + 3\}. \end{aligned}$$

Si ha perciò

$$\iint_{\Omega} xy \, dx \, dy = \iint_{\Omega_1} xy \, dx \, dy + \iint_{\Omega_2} xy \, dx \, dy,$$

dove

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega_1} xy \, dx \, dy &= \int_0^3 dx \, x \int_{x-3}^{\sqrt{9-x^2}} y \, dy \\ &= \int_0^3 dx \, x \left. \frac{y^2}{2} \right|_{x-3}^{\sqrt{9-x^2}} = \frac{1}{2} \int_0^3 dx \, x \left((9 - x^2) - (x - 3)^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^3 dx \, x (9 - x^2 - x^2 + 6x - 9) = \frac{1}{2} \int_0^3 dx \, x (6x - 2x^2) \\ &= \int_0^3 dx (3x^2 - x^3) = 3 \left. \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right|_0^3 = 27 - \frac{81}{4} = 27 - \frac{27 \cdot 3}{4} = \frac{27}{4} \end{aligned}$$

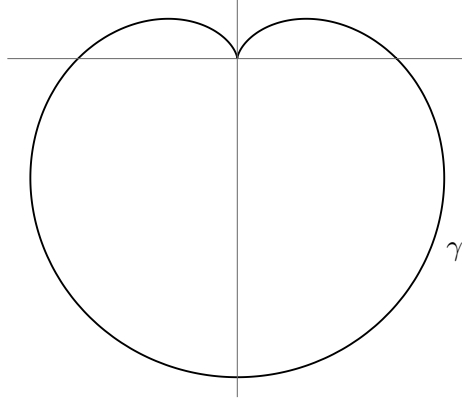
e, analogamente,

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega_2} xy \, dx \, dy &= \int_{-3}^0 dx \, x \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{x+3} y \, dy \\ &= \int_{-3}^0 dx \, x \left. \frac{y^2}{2} \right|_{-\sqrt{9-x^2}}^{x+3} = \frac{1}{2} \int_{-3}^0 dx \, x \left((x + 3)^2 - (9 - x^2) \right) \\ &= \frac{1}{2} \int_{-3}^0 dx \, x (x^2 + 9 + 6x - 9 + x^2) = \frac{1}{2} \int_{-3}^0 dx \, x (2x^2 + 6x) \\ &= \int_{-3}^0 dx (x^3 + 3x^2) = \left. \frac{x^4}{4} + 3 \frac{x^3}{3} \right|_{-3}^0 = -\frac{81}{4} + 27 = -\frac{27 \cdot 3}{4} + 27 = \frac{27}{4}. \end{aligned}$$

Sommando i due integrali si trova

$$\iint_{\Omega} xy \, dx \, dy = \frac{27}{2}.$$

ESERCIZIO 6. La curva γ è raffigurata in figura. Si noti comunque che il disegno della curva γ non è necessario per il calcolo dell'integrale.



Tenendo conto che

$$\gamma'(t) = (-\cos t \cos t - (1 - \sin t) \sin t, -\cos t \sin t + (1 - \sin t) \cos t),$$

da cui segue che

$$\begin{aligned} \|\gamma'(t)\|^2 &= \cos^4 t + (1 - \sin t)^2 \sin^2 t + 2 \cos^2 t \sin t (1 - \sin t) \\ &\quad + \cos^2 t \sin^2 t + (1 - \sin t)^2 \cos^2 t - 2 \cos^2 t \sin t (1 - \sin t) \\ &= \cos^4 t + (1 - \sin t)^2 \sin^2 t + \cos^2 t \sin^2 t + (1 - \sin t)^2 \cos^2 t \\ &= \cos^2 t (\cos^2 t + \sin^2 t) + (1 - \sin t)^2 (\sin^2 t + \cos^2 t) \\ &= \cos^2 t + (1 - \sin t)^2 = \cos^2 t + 1 + \sin^2 t - 2 \sin t = 2(1 - \sin t), \end{aligned}$$

e che

$$\begin{aligned} f(\gamma(t)) &= ((1 - \sin t) \cos t)^2 (((1 - \sin t) \cos t)^2 + ((1 - \sin t) \sin t)^2)^{1/4} \\ &= (1 - \sin t)^2 \cos^2 t (((1 - \sin t)^2 (\cos^2 t + \sin^2 t))^{1/4} \\ &= (1 - \sin t)^2 \cos^2 t (1 - \sin t)^{1/2} = (1 - \sin t)^2 \cos^2 t \sqrt{1 - \sin t}, \end{aligned}$$

si ottiene

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(x, y) \, ds &= \int_{\gamma} f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| \\ &= \int_0^{2\pi} d2\pi (1 - \sin t)^2 \cos^2 t \sqrt{1 - \sin t} \sqrt{2(1 - \sin t)} \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} dt (1 - \sin t)^2 \cos^2 t (1 - \sin t) = \sqrt{2} (I_1 - I_2), \end{aligned}$$

dove

$$I_1 = \int_0^{2\pi} dt (1 - \sin t)^2 \cos^2 t = \int_0^{2\pi} dt \cos^2 t - 2 \int_0^{2\pi} dt \cos^2 t \sin t + \int_0^{2\pi} dt \cos^2 t \sin^2 t$$

$$I_2 = \int_0^{2\pi} dt (1 - \sin t)^2 \cos^2 t \sin t = \int_0^{2\pi} dt \cos^2 t \sin t - 2 \int_0^{2\pi} dt \cos^2 t \sin^2 t + \int_0^{2\pi} dt \cos^2 t \sin^3 t.$$

Usando il fatto che

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} dt \cos^2 t \sin t &= -\frac{\cos^3 t}{3} \Big|_0^{2\pi} = 0, \\ \int_0^{2\pi} dt \cos^2 t \sin^3 t &= \int_0^{2\pi} dt \cos^2 t \sin t - \int_0^{2\pi} dt \cos^4 t \sin t = 0 - \left(\frac{\cos^5(t)}{5} \right) \Big|_0^{2\pi} = 0,\end{aligned}$$

si ottiene

$$I_1 - I_2 = \int_0^{2\pi} dt \cos^2 t + 3 \int_0^{2\pi} dt \cos^2 t \sin^2 t.$$

Inoltre si ha

$$\begin{aligned}\int dt \cos^2 t \sin^2 t &= \int dt (\cos^2 t \sin t) (\sin t) = \int dt \left(-\frac{\cos^3}{3} \right)' (\sin t) = -\frac{\cos^3 t}{3} \sin t + \int dt \frac{\cos^3 t}{3} (\sin t)' \\ &= -\frac{\cos^3 t}{3} \sin t + \frac{1}{3} \int dt \cos^4 t = -\frac{\cos^3 t}{3} \sin t + \frac{1}{3} \int dt \cos^2 t - \frac{1}{3} \int dt \cos^2 t \sin^2 t,\end{aligned}$$

da cui si ottiene

$$\begin{aligned}\frac{4}{3} \int dt \cos^2 t \sin^2 t &= -\frac{\cos^3 t}{3} \sin t + \frac{1}{3} \int dt \cos^2 t \\ \implies \int dt \cos^2 t \sin^2 t &= \frac{3}{4} \left(-\frac{\cos^3 t}{3} \sin t + \frac{1}{3} \int dt \cos^2 t \right) \\ \implies 3 \int dt \cos^2 t \sin^2 t &= -\frac{3}{4} \cos^3 t \sin t + \frac{3}{4} \int dt \cos^2 t,\end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned}\int dt \cos^2 t &= \int dt \cos t \cos t = \int dt \cos t (\sin t)' = \cos t \sin t - \int dt (\cos t)' \sin t \\ &= \cos t \sin t + \int dt \sin^2 t = \cos t \sin t + \int dt (1 - \cos^2 t) \\ &= \cos t \sin t + \int dt - \int dt \cos^2 t = \cos t \sin t + t - \int dt \cos^2 t \\ \implies 2 \int dt \cos^2 t &= \cos t \sin t + t + c_1 \\ \implies \int dt \cos^2 t &= \frac{\cos t \sin t + t}{2} + c_2,\end{aligned}$$

con c_1 e c_2 due costanti arbitrarie, così che

$$I_1 - I_2 = \frac{7}{4} \int_0^{2\pi} dt \cos^2 t - \frac{3}{4} \frac{\cos^3 t}{4} \sin t \Big|_0^{2\pi} = \frac{7}{4} \int_0^{2\pi} dt \cos^2 t = \frac{7}{4} \frac{\sin t \cos t + t}{2} \Big|_0^{2\pi} = \frac{7}{4} \pi.$$

In conclusione, si ha

$$\int_{\gamma} f(x, y) ds = \frac{7\pi\sqrt{2}}{4}.$$