

Analisi Matematica per le Applicazioni – Analisi Matematica II

CdL in Ingegneria Meccanica – Anno Accademico 2025/2026

Soluzioni della prova scritta del secondo appello (03-02-2026)

ESERCIZIO 0.

(1) Il polinomio caratteristico associato all'equazione omogenea associata $y'' + y' = 0$ è

$$P(\lambda) = \lambda^2 + \lambda = \lambda(\lambda + 1),$$

le cui radici sono $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = -1$, così che la soluzione generale dell'equazione omogenea è

$$y_0(x) = c_1 + c_2 e^{-x},$$

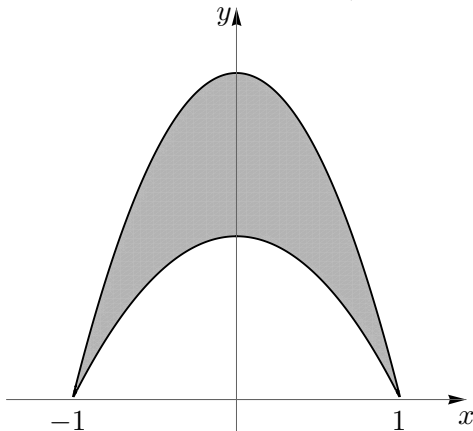
dove c_1 e c_2 sono due costanti arbitrarie. La soluzione particolare dell'equazione non omogenea $y'' + y' = -1$ si cerca nella forma $\tilde{y}(x) = ax$, poiché il termine noto è una costante e c_1 è soluzione dell'omogenea. Tenendo conto che $\tilde{y}'(x) = a$ e $\tilde{y}''(x)$, si trova

$$\tilde{y}'' + \tilde{y}' = a = -1 \implies \tilde{y}(x) = -x.$$

La soluzione generale dell'equazione non omogenea è

$$y(x) = y_0(x) + \tilde{y}(x) = c_1 + c_2 e^{-x} - x.$$

(2) Per disegnare il dominio Ω si deve tener conto che y è compresa tra le due parabole $y = 1 - x^2$ e $y = 2(1 - x^2)$, che si intersecano in $x = \pm 1$. Quindi Ω è l'intersezione dell'insieme che si trova al di sopra della prima parabola e al di sotto della seconda (cfr. la figura).



Se $(x, y) \in \Omega$, si ha $x \in [-1, 1]$ e, per ogni $x \in [-1, 1]$, risulta $1 - x^2 \leq y \leq 2(1 - x^2)$, così che, usando anche la parità della funzione integranda,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} dx dy &= \int_{-1}^1 dx \int_{1-x^2}^{2(1-x^2)} dy = \int_{-1}^1 xy \Big|_{1-x^2}^{2(1-x^2)} dx = \int_{-1}^1 (2(1-x^2) - (1-x^2)) dx \\ &= \int_{-1}^1 (1-x^2) dx = 2 \int_0^1 (1-x^2) dx = 2 \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = 2 \left(1 - \frac{1}{3} \right) = 2 \frac{2}{3} = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

(3) Integrando per separazione di variabili si trova

$$\int y \, dy = \int x \, dx \implies \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C, \quad (*)$$

dove $y = y(x)$ e la costante C è fissata dalla condizione iniziale: per $x = 0$ si ha $y(0) = -1$, così che $(*)$, calcolata in $x = 0$, dà

$$\frac{1}{2} = 0 + C \implies C = \frac{1}{2}.$$

Inserendo il valore trovato per C in $(*)$ si ottiene

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \implies y^2 = x^2 + 1 \implies y = \pm \sqrt{x^2 + 1} \implies y = -\sqrt{x^2 + 1},$$

dove la scelta del segno $-$ nell'ultimo passaggio è di nuovo dovuta alla condizione iniziale.

(4) La curva γ si può parametrizzare come

$$\gamma(t) = (2x(t), 2y(t)) = (2 \cos t, 2 \sin t), \quad t \in [0, \pi],$$

così che $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t)) = (-2 \sin t, 2 \cos t)$. Si ha

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = \sqrt{4 \sin^2 t + 4 \cos^2 t} = \sqrt{4} = 2,$$

$$f(\gamma(t)) = 1 + 2 \cos t + 4 \cos^2 t \sqrt{4 \cos^2 t + 4 \sin^2 t} = 1 + 2 \cos t + 4 \cos^2 t \sqrt{4} = 1 + 2 \cos t + 8 \cos^2 t,$$

e quindi l'integrale è

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f \, ds &= \int_0^{\pi} dt f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| = \int_0^{\pi} dt 2 (1 + 2 \cos t + 8 \cos^2 t) \\ &= 2 \left(t + 2 \sin t + 8 \frac{t + \sin t \cos t}{2} \right) \Big|_0^{\pi} = 2\pi + 2 \cdot 8 \frac{\pi}{2} = 10\pi, \end{aligned}$$

dove si è tenuto conto che

$$\begin{aligned} \int dt \cos^2 t &= \int dt \cos t \cos t = \int dt \cos t (\sin t)' = \cos t \sin t - \int dt (\cos t)' \sin t \\ &= \cos t \sin t + \int dt \sin^2 t = \cos t \sin t + \int dt (1 - \cos^2 t) \\ &= \cos t \sin t + \int dt - \int dt \cos^2 t = \cos t \sin t + t - \int dt \cos^2 t \\ \implies 2 \int dt \cos^2 t &= \cos t \sin t + t + c_1 \\ \implies \int dt \cos^2 t &= \frac{\cos t \sin t + t}{2} + c_2, \end{aligned}$$

con c_1 e c_2 due costanti arbitrarie.

ESERCIZIO 1. Riscrivendo l'equazione nella forma

$$y' = \frac{x^2 y^3}{y^2(1+x^3)} + \frac{x^2 x^3}{y^2(1+x^3)} = \frac{x^2}{1+x^3} y + \frac{x^5}{1+x^3} y^{-2},$$

si vede che l'equazione è un'equazione differenziale di Bernouilli della forma

$$y' = a(x) y + b(x) y^n,$$

con

$$a(x) = \frac{x^2}{1+x^3}, \quad b(x) = \frac{x^5}{1+x^3}, \quad n = -2.$$

Se si definisce $w(x) = (y(x))^{1-n} = (y(x))^3$, allora, in termini di w , l'equazione diventa

$$w' = (1-n) a(x) w + (1-n) b(x) = 3a(x) w + 3b(x), \quad (*)$$

che è un'equazione differenziale lineare non omogenea del primo ordine.

La soluzione dell'equazione (*) è data da

$$w(x) = e^{A(x)-A(0)} \left(C + \int_0^x dt e^{-(A(t)-A(0))} 3b(t) \right), \quad (**)$$

dove $C = w(0)$ e

$$A(x) = \int dx 3a(x).$$

Operando la sostituzione $u = 1 + x^3$ ($\implies du = 3x^2 dx$), si trova

$$A(x) = \int dx \frac{3x^2}{1+x^3} = \int \frac{du}{u} = \log |u| + c_0 = \log |1+x^3| + c_1 = \log(1+x^3) + c_1,$$

dove c_1 è una costante arbitraria e il modulo è stato tolto in considerazione del fatto che condizione iniziale è data al tempo $x = 0$ e si ha $1+x^3 > 0$ per x vicino a 0. Risulta

$$A(x) - A(0) = \log(1+x^3), \quad e^{A(x)-A(0)} = 1+x^3, \quad e^{-(A(x)-A(0))} = \frac{1}{1+x^3},$$

e quindi, di nuovo con la sostituzione $u = 1 + t^3$,

$$\begin{aligned} \int dt e^{-(A(t)-A(0))} 3b(t) &= \int dt \frac{3t^5}{(1+t^3)^2} = \int dt 3t^2 \frac{t^3}{(1+t^3)^2} = \int dt 3t^2 \frac{1+t^3-1}{(1+t^3)^2} = \int du \frac{u-1}{u^2} \\ &= \int \frac{du}{u} - \int \frac{du}{u^2} = \log |u| + \frac{1}{u} + c_2 = \log |1+t^3| + \frac{1}{1+t^3} + c_2 \end{aligned}$$

dove c_2 è una costante arbitraria, così che si ha

$$\int_0^x dt e^{-(A(t)-A(0))} 3b(t) = \left(\log |1+t^3| + \frac{1}{1+t^3} \right) \Big|_0^x = \log(1+x^3) + \frac{1}{1+x^3} - 1.$$

La soluzione (**) è quindi data da

$$w(x) = (1+x^3) \left(C + \log(1+x^3) + \frac{1}{1+x^3} - 1 \right).$$

Dal momento che $y(0) = 1$ e, di conseguenza, $C = w(0) = (y(0))^3 = 1$ si ha

$$w(x) = (1+x^3) \left(\log(1+x^3) + \frac{1}{1+x^3} \right) = 1 + (1+x^3) \log(1+x^3).$$

In conclusione, la soluzione del problema di Cauchy originale è data da

$$y(x) = (w(x))^{\frac{1}{3}} = \left(1 + (1+x^3) \log(1+x^3) \right)^{\frac{1}{3}}.$$

ESERCIZIO 2. Gli autovalori di A sono le radici del polinomio caratteristico

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbb{1}) = \det \begin{pmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 7\lambda + 12 - 2 = \lambda^2 - 7\lambda + 10,$$

quindi sono

$$\lambda_1 = \frac{7 \pm \sqrt{49-40}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2} \implies \lambda_1 = 5, \lambda_2 = 2.$$

La matrice è diagonalizzabile, dal momento che gli autovalori sono distinti. Se $v_1 = (v_{11}, v_{12})$ è l'autovettore associato all'autovalore $\lambda_1 = 5$, l'equazione $Av_1 = 5v_1$ dà

$$4v_{11} + 2v_{12} = 5v_{11}, \quad v_{11} + 3v_{12} = 5v_{12} \implies v_{11} = 2v_{12} \implies v_1 = (2, 1),$$

Analogamente, se $v_2 = (v_{21}, v_{22})$ è l'autovettore associato a $\lambda_2 = 2$, l'equazione $Av_2 = 2v_2$ dà

$$4v_{21} + 2v_{22} = 2v_{21}, \quad v_{21} + 3v_{22} = 2v_{22} \implies v_{21} = -v_{22} \implies v_2 = (-1, 1).$$

Se definiamo

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \implies Q^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

possiamo scrivere

$$\begin{aligned} e^{Ax} &= Q \begin{pmatrix} e^{5x} & 0 \\ 0 & e^{2x} \end{pmatrix} Q^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{5x} & 0 \\ 0 & e^{2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{5x} & e^{5x} \\ -e^{2x} & 2e^{2x} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2e^{5x} + e^{2x} & 2e^{5x} - 2e^{2x} \\ e^{5x} - e^{2x} & e^{5x} + 2e^{2x} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La soluzione con la condizione iniziale assegnata è data da

$$y(x) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2e^{5x} + e^{2x} & 2e^{5x} - 2e^{2x} \\ e^{5x} - e^{2x} & e^{5x} + 2e^{2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Si trova quindi

$$y_1(x) = \frac{4}{3}e^{5x} - \frac{1}{3}e^{2x}, \quad y_2(x) = \frac{2}{3}e^{5x} + \frac{1}{3}e^{2x}.$$

ESERCIZIO 3. Le radici del polinomio caratteristico $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = \lambda(\lambda - 2)^2$ sono $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$. Quindi la soluzione generale dell'equazione omogenea associata è

$$y_0(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} = e^{2x} (c_1 + c_2 x),$$

dove c_1 e c_2 sono due costanti arbitrarie.

Nell'equazione non omogenea

$$y'' - 4y' + 4y = x e^{2x} \sin x$$

il termine noto $x e^{2x} \sin x$ è della forma

$$e^{\lambda x} (A_n(x) \cos \mu x + B_n(x) \sin \mu x),$$

dove $A_n(x)$ e $B_n(x)$ sono polinomi di grado n . Nel nostro caso si ha

$$\lambda = 2, \quad \mu = 1, \quad n = 1, \quad A_n(x) = 0, \quad B_n(x) = 1.$$

Poiché $\lambda + i\mu = 2 + i \neq 2 = \lambda_1 = \lambda_2$, si cerca la soluzione particolare $\tilde{y}(x)$ dell'equazione non omogenea nella forma

$$\tilde{y}(x) = e^{2x} ((Ax + B) \cos x + (Cx + D) \sin x).$$

Se scriviamo

$$\tilde{y}(x) = e^{2x} Q(x), \quad Q(x) = (Ax + B) \cos x + (Cx + D) \sin x,$$

e teniamo conto che

$$\begin{aligned} \tilde{y}' &= 2e^{2x} Q(x) + e^{2x} Q'(x), \\ \tilde{y}'' &= 4e^{2x} Q(x) + 4e^{2x} Q'(x) + e^{2x} Q''(x), \end{aligned}$$

otteniamo

$$\begin{aligned} \tilde{y}'' - 4\tilde{y}' + 4\tilde{y} &= 4e^{2x} Q(x) + 4e^{2x} Q'(x) + e^{2x} Q''(x) - 4(2e^{2x} Q(x) + e^{2x} Q'(x)) + 4e^{2x} Q(x) \\ &= 4e^{2x} Q(x) + 4e^{2x} Q'(x) + e^{2x} Q''(x) - 8e^{2x} Q(x) - 4e^{2x} Q'(x) + 4e^{2x} Q(x) \\ &= (4e^{2x} Q(x) - 8e^{2x} Q(x) + 4e^{2x} Q(x)) + 4e^{2x} Q'(x) + e^{2x} Q''(x) - 4e^{2x} Q'(x) \\ &= Q(x)(4e^{2x} - 8e^{2x} + 4e^{2x}) + e^{2x} Q''(x) \\ &= e^{2x} Q''(x), \end{aligned}$$

dove si è usato che

$$4e^{2x} - 8e^{2x} + 4e^{2x} = (e^{2x})'' - 4(e^{2x})' + 4e^{2x} = 0$$

dal momento che e^{2x} risolve l'equazione omogenea. Calcolando esplicitamente le derivate di $Q(x)$, si trova

$$\begin{aligned} Q'(x) &= A \cos x - (Ax + B) \sin x + C \sin x + (Cx + D) \cos x, \\ Q''(x) &= -2A \sin x - (Ax + B) \cos x + 2C \cos x - (Cx + D) \sin x, \end{aligned}$$

così che, imponendo che si abbia

$$e^{2x}Q''(x) = \tilde{y}'' - 4\tilde{y}' + 4\tilde{y} = xe^{2x} \sin x,$$

si ottengono le quattro equazioni

$$(-B + 2C) \cos x = 0, \quad -A x \cos x = 0, \quad (-2A - D) \sin x = 0, \quad -C x \sin x = x \sin x,$$

ovvero il sistema di quattro equazioni algebriche

$$\begin{cases} -B + 2C = 0, \\ -A = 0, \\ -2A - D = 0, \\ -C = 1. \end{cases}$$

La seconda e quarta equazione danno

$$C = -1, \quad A = 0,$$

che, inserite nella prima e nella terza, implicano

$$B = -2C = 2, \quad D = -2A = 0.$$

In conclusione la soluzione particolare dell'equazione non omogenea è

$$\tilde{y}(x) = e^{2x}(-2 \cos x - x \sin x)$$

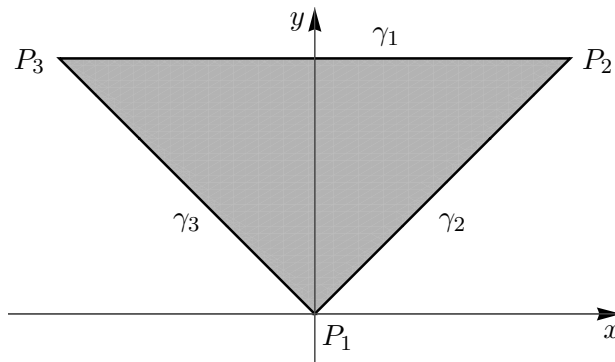
e quindi la soluzione generale dell'equazione è

$$y(x) = y_0(x) + \tilde{y}(x) = e^{2x}(c_1 + c_2x - 2 \cos x - x \sin x).$$

ESERCIZIO 4. Il dominio D della funzione è dato dall'intersezione dell'insieme che si trova al di sopra del grafico della funzione

$$y = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0, \end{cases}$$

con l'insieme che si trova al di sotto della retta $y = 1$ (cfr. la figura).



Le derivate parziali della funzione $f(x, y)$ sono

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 2x + y, \\ f_y(x, y) &= x - 4y. \end{aligned}$$

Si ha $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$ se e solo se $2x + y = x - 4y = 0$, che possiamo riscrivere

$$y = -2x, \quad x = 4y \implies x = 4(-2x) = -8x \implies 9x = 0 \implies y = x = 0.$$

Il punto $P_1 = (0, 0)$ non è tuttavia un punto interno del dominio D e quindi va studiato come punto di frontiera. Di fatto, non esistono punti critici interni, quindi la funzione raggiunge sulla frontiera il suo massimo e il suo minimo (che sappiamo a priori che esistono, per il teorema di Weierstrass, essendo f una funzione continua e D un insieme compatto).

La frontiera ∂D è costituita da tre segmenti: possiamo quindi scrivere

$$\partial D = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3,$$

dove (cfr. la figura)

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= (t, 1), & t &\in [-1, 1], \\ \gamma_2(t) &= (t, t), & t &\in [0, 1], \\ \gamma_3(t) &= (t, -t), & t &\in [-1, 0]. \end{aligned}$$

Per studiare la funzione su ∂D introduciamo le funzioni

$$\begin{aligned} h_1(t) &= f(\gamma_1(t)) = f(t, 1) = t^2 + t - 2, & t &\in [-1, 1], \\ h_2(t) &= f(\gamma_2(t)) = f(t, t) = t^2 + t^2 - 2t^2 = 0, & t &\in [0, 1], \\ h_3(t) &= f(\gamma_3(t)) = f(t, -t) = t^2 - t^2 - 2t^2 = -2t^2, & t &\in [-1, 0]. \end{aligned}$$

Consideriamo per primo il segmento γ_1 . Si ha

$$h'_1(t) = \frac{dh_1}{dt}(t) = 2t + 1,$$

così che $h'_1(t) = 0$ se e solo se $t = -1/2$, che appartiene all'intervallo $[-1, 1]$. Quindi i punti da considerare lungo γ_1 , nella ricerca dei punti estremali di f , sono i due estremi $P_2 = (1, 1)$ e $P_3 = (-1, 1)$, oltre al punto $P_4 = (-1/2, 1)$.

Lungo γ_2 la funzione è identicamente nulla, quindi si ha

$$h'_2(t) = \frac{dh_2}{dt}(t) = 0,$$

e questo implica che tutti i punti di γ_2 , estremi inclusi, vanno considerati.

Infine, studiando la funzione lungo γ_3 , si trova

$$h'_3(t) = \frac{dh_3}{dt}(t) = -4t,$$

così che $h_2(t) = 0$ è una funzione crescente in $[-1, 0]$ e assume valore minimo in $t = -1$ e valore massimo in $t = 0$. A tali valori di t corrispondono il punto P_3 , già preso in considerazione in quanto estremo di γ_1 , e il punto $P_1 = (0, 0)$.

In conclusione, i punti candidati a essere massimi o minimi sono:

1. i punti di intersezione dei tre segmenti che costituiscono la frontiera di D , ovvero

$$P_1 = (0, 0), \quad P_2 = (1, 1), \quad P_3 = (-1, 1),$$

2. tutti i punti lungo il segmento γ_2 , ovvero i punti

$$P(t) = (t, t), \quad t \in [0, 1],$$

(si noti che questo include anche P_1 e P_2),

3. il punto

$$P_4 = (-1/2, 1)$$

lungo il segmento γ_1 .

Calcolando la funzione $f(x, y)$ sui punti sopra elencati, si trova

$$f(P(t)) = f(t, t) = 0 \quad \forall t \in [0, 1],$$

$$f(P_1) = f(P_2) = 0, \quad f(P_3) = f(-1, 1) = -2,$$

$$f(P_4) = f(-1/2, 1) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 2 = \frac{1 - 2 - 8}{4} = -\frac{9}{4}.$$

In conclusione tutti i punti lungo il segmento γ_1 che unisce i punti P_1 e P_2 , estremi compresi, sono punti di massimo assoluto, mentre il punto P_4 è un punto di minimo assoluto, e si ha

$$M = \max_{(x,y) \in D} f(x, y) = 0,$$

$$m = \min_{(x,y) \in D} f(x, y) = f(-1/2, 1) = -\frac{9}{4}.$$

ESERCIZIO 5. La condizione

$$|x - y| \leq 1 \implies |y - x| \leq 1 \implies -1 \leq y - x \leq 1 \implies x - 1 \leq y \leq x + 1$$

individua la striscia Σ_1 compresa tra le due rette $y = x - 1$ e $y = x + 1$, mentre la condizione

$$|x + y| \leq 1 \implies -1 \leq y + x \leq 1 \implies -x - 1 \leq y \leq -x + 1$$

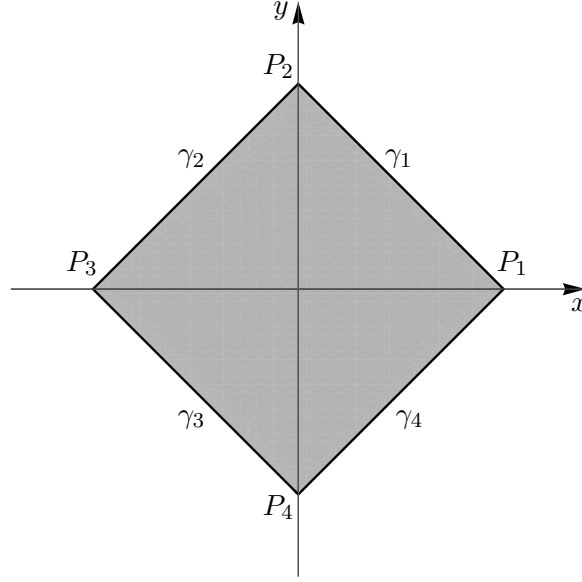
individua la striscia Σ_2 compresa tra le due rette $y = -x - 1$ e $y = -x + 1$. Il dominio Ω è quindi

$$\Omega = \Sigma_1 \cap \Sigma_2,$$

ovvero è dato da quadrato che si ottiene come intersezione delle due strisce (cfr. la figura: si osservi che i segmenti $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ si trovano sulle rette

$$y = 1 - x, \quad y = 1 + x, \quad y = -1 - x, \quad y = x - 1,$$

rispettivamente).



Possiamo scrivere $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3 \cup \Omega_4$, dove

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x\}, \\ \Omega_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x < 0, 0 \leq y \leq 1 + x\}, \\ \Omega_3 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x < 0, -1 - x \leq y < 0\}, \\ \Omega_4 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, -1 + x \leq y < 0\}, \end{aligned}$$

così che abbiamo

$$|xy| = \begin{cases} xy, & (x, y) \in \Omega_1 \cup \Omega_3, \\ -xy, & (x, y) \in \Omega_2 \cup \Omega_4, \end{cases}$$

poiché x e y hanno lo stesso segno in Ω_1 e in Ω_3 e segno opposto in Ω_2 e in Ω_4 . Abbiamo quindi

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} |xy| \, dx dy &= \iint_{\Omega_1} xy \, dx dy + \iint_{\Omega_2} (-xy) \, dx dy + \iint_{\Omega_3} xy \, dx dy + \iint_{\Omega_4} (-xy) \, dx dy \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy xy + \int_{-1}^0 dx \int_0^{1+x} dy (-xy) + \int_{-1}^0 dx \int_{-1-x}^0 dy xy + \int_0^1 dx \int_{x-1}^0 dy (-xy). \end{aligned}$$

Calcolando i quattro integrali separatamente, si ha

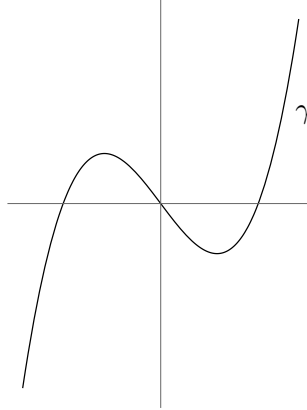
$$\begin{aligned}
 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy xy &= \int_0^1 dx x \frac{(1-x)^2}{2} = \frac{1}{2} \int_0^1 dx x(1-2x+x^2) = \frac{1}{2} \int_0^1 dx (x-2x^2+x^3) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{6-8+3}{12} = \frac{1}{24} \\
 \int_{-1}^0 dx \int_0^{1+x} dy (-xy) &= - \int_{-1}^0 dx x \frac{(1+x)^2}{2} = -\frac{1}{2} \int_{-1}^0 dx x(1+2x+x^2) = -\frac{1}{2} \int_{-1}^0 dx (x+2x^2+x^3) \\
 &= -\frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \right) \Big|_{-1}^0 = -\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{6-8+3}{12} = \frac{1}{24} \\
 \int_{-1}^0 dx \int_{-1-x}^0 dy xy &= - \int_{-1}^0 dx x \frac{(1+x)^2}{2} = -\frac{1}{2} \int_{-1}^0 dx x(1+2x+x^2) = -\frac{1}{2} \int_{-1}^0 dx (x+2x^2+x^3) \\
 &= -\frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \right) \Big|_{-1}^0 = -\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{6-8+3}{12} = \frac{1}{24} \\
 \int_0^1 dx \int_{x-1}^0 dy (-xy) &= \int_0^1 dx x \frac{(x-1)^2}{2} = \frac{1}{2} \int_0^1 dx x(1-2x+x^2) = \frac{1}{2} \int_0^1 dx (x-2x^2+x^3) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{6-8+3}{12} = \frac{1}{24}.
 \end{aligned}$$

Si noti che il fatto che i tre integrali siano uguali si può vedere dall'inizio notando che il dominio è simmetrico rispetto a entrambi gli assi x e y e l'integrando è pari in entrambe le variabili x e y : quindi è sufficiente calcolare il primo integrale e moltiplicare il risultato per 4.

In conclusione si ottiene

$$\iint_{\Omega} |xy| dx dy = \frac{1}{24} + \frac{1}{24} + \frac{1}{24} + \frac{1}{24} = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}.$$

Esercizio 6. La curva γ è raffigurata in figura. Si noti comunque che il disegno della curva γ non è necessario per il calcolo dell'integrale.



Lungo la curva γ si ha

$$x = x(t) = t, y = y(t) = f(t) = t(t^2 - 2) = t^3 - 2t \implies x'(t) = 1, y'(t) = f'(t) = 3t^2 - 2. \quad (*)$$

Decomponiamo

$$\omega = \omega_1 + \omega_2,$$

dove

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \left(\frac{xy}{x^2 + 1} \right) dx + \left(\frac{xy}{x^2 + 1} \right) dy, \\ \omega_2 &= \left(-\frac{xy^2}{(1 + x^2y^2)^2} \right) dx + \left(-\frac{x^2y}{(1 + x^2y^2)^2} \right) dy, \end{aligned}$$

e scriviamo

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma} \omega_1 + \int_{\gamma} \omega_2.$$

Calcoliamo prima l'integrale di ω_1 . Si ha

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{-2}^2 \left(\frac{x(t)y(t)}{x^2(t) + 1} x'(t) + \frac{x(t)y(t)}{x^2(t) + 1} y'(t) \right) dt = \int_{-2}^2 \left(\frac{t^2(t^2 - 2)}{t^2 + 1} + \frac{t^2(t^2 - 2)(3t^2 - 2)}{t^2 + 1} \right) dt,$$

dove si è tenuto conto delle relazioni (*). Possiamo riscrivere

$$\begin{aligned} \frac{t^2(t^2 - 2)}{t^2 + 1} + \frac{t^2(t^2 - 2)(3t^2 - 2)}{t^2 + 1} &= \frac{t^2(t^2 - 2) + t^2(t^2 - 2)(3t^2 - 2)}{t^2 + 1} \\ &= \frac{t^2(t^2 - 2)(1 + 3t^2 - 2)}{t^2 + 1} = \frac{t^2(t^2 - 2)(3t^2 - 1)}{t^2 + 1} = \frac{t^2(3t^4 - 7t^2 + 2)}{t^2 + 1} \\ &= \frac{3t^6 - 7t^4 + 2t^2}{t^2 + 1} = \frac{3(t^6 + t^4) - 3t^4 - 7t^4 + 2t^2}{t^2 + 1} = \frac{3t^4(t^2 + 1) - 10t^4 + 2t^2}{t^2 + 1} \\ &= 3t^4 + \frac{-10t^4 + 2t^2}{t^2 + 1} = 3t^4 + \frac{-10(t^4 + t^2) + 10t^2 + 2t^2}{t^2 + 1} = 3t^4 + \frac{-10t^2(t^2 + 1) + 12t^2}{t^2 + 1} \\ &= 3t^4 - 10t^2 + \frac{12t^2}{t^2 + 1} = 3t^4 - 10t^2 + \frac{12(t^2 + 1) - 12}{t^2 + 1} = 3t^4 - 10t^2 + 12 - \frac{12}{t^2 + 1}, \end{aligned}$$

così che

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{t^2(t^2 - 2)}{t^2 + 1} + \frac{t^2(t^2 - 2)(3t^2 - 2)}{t^2 + 1} \right) dt &= \int \left(3t^4 - 10t^2 + 12 - \frac{12}{t^2 + 1} \right) dt \\ &= 3\frac{t^5}{5} - 10\frac{t^3}{3} + 12t - 12 \arctan t = \frac{3}{5}t^5 - \frac{10}{3}t^3 + 12t - 12 \arctan t, \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \omega &= \int_{-2}^2 \left(\frac{t^2(t^2 - 2)}{t^2 + 1} + \frac{t^2(t^2 - 2)(3t^2 - 2)}{t^2 + 1} \right) dt = 2 \int_0^2 \left(\frac{t^2(t^2 - 2)}{t^2 + 1} + \frac{t^2(t^2 - 2)(3t^2 - 2)}{t^2 + 1} \right) dt \\ &= 2 \left(\frac{3}{5}t^5 - \frac{10}{3}t^3 + 12t - 12 \arctan t \right) \Big|_0^2 = \frac{192}{5} - \frac{160}{3} + 48 - 24 \arctan 2 = \frac{496}{15} - 24 \arctan 2. \end{aligned}$$

Per calcolare l'integrale di ω_2 , notiamo che

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{xy^2}{(1+x^2y^2)^2} \right) &= -\frac{2xy}{(1+x^2y^2)^2} + xy^2 \frac{4x^2y}{(1+x^2y^2)^3} = -\frac{2xy}{(1+x^2y^2)^2} + \frac{4x^3y^3}{(1+x^2y^2)^3}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{x^2y}{(1+x^2y^2)^2} \right) &= -\frac{2xy}{(1+x^2y^2)^2} + x^2y \frac{4xy^2}{(1+x^2y^2)^3} = -\frac{2xy}{(1+x^2y^2)^2} + \frac{4x^3y^3}{(1+x^2y^2)^3},\end{aligned}$$

da cui segue che ω_2 è una forma differenziale chiusa. Poiché è definita in $\mathbb{R}^2$, che è un insieme semplicemente connesso, ω_2 è esatta e quindi ammette un potenziale $\mathcal{U}(x, y)$ tale che

$$-\frac{xy^2}{(1+x^2y^2)^2} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}, \quad -\frac{x^2y}{(1+x^2y^2)^2} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y}.$$

Integrando la prima equazione rispetto a x , con la sostituzione $t = 1 + x^2y^2$ ($\implies dt = 2xy^2 dx$), si ottiene

$$\mathcal{U}(x, y) = - \int dx \frac{xy^2}{(1+x^2y^2)^2} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{t} + c_1(y) = \frac{1}{1+x^2y^2} + c_1(y),$$

dove $c_1(y)$ è una funzione arbitraria della sola variabile y , e, analogamente, integrando la seconda equazione rispetto a y , con la sostituzione $t = 1 + x^2y^2$ ($\implies dt = 2x^2y dy$), si ottiene

$$\mathcal{U}(x, y) = - \int dy \frac{x^2y}{(1+x^2y^2)^2} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{t} + c_2(x) = \frac{1}{1+x^2y^2} + c_2(x),$$

dove $c_2(x)$ è una funzione arbitraria della sola variabile x . Confrontando le due espressioni trovate di $\mathcal{U}(x, y)$, si vede che, scegliendo $c_1(x) = c_2(y) = 0$, si trova il potenziale

$$\mathcal{U}(x, y) = \frac{1}{1+x^2y^2}.$$

Si ha allora, tenendo conto che si ha $f(-2) = -4$ e $f(2) = 4$ e che quindi la curva γ connette il punto $P_1 = (-2, -4)$ al punto $P_2 = (2, 4)$ al punto

$$\int_{\gamma} \omega_2 = \mathcal{U}(2, 4) - \mathcal{U}(-2, -4) = \frac{1}{1+4 \cdot 16} - \frac{1}{1+4 \cdot 16} = 0.$$

In conclusione, si ha

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma} \omega_1 + \int_{\gamma} \omega_2 = \frac{496}{15} - 24 \arctan 2 + 0 = \frac{496}{15} - 24 \arctan 2.$$