

Analisi Matematica per le Applicazioni – Analisi Matematica II

CdL in Ingegneria Meccanica – Anno Accademico 2025/2026

Soluzioni della prova scritta del terzo appello (23-04-2026)

ESERCIZIO 0.

(1) L'equazione omogenea associata all'equazione $y' = -2xy + 2x$ è

$$y' = a(x)y, \quad a(x) = -2x.$$

La soluzione dell'equazione omogenea è quindi

$$y(x) = e^{A(x)}c_1, \quad A(x) = \int a(x) dx = -\int 2x dx = -x^2,$$

dove $A(x)$ è una primitiva della funzione $a(x)$ e c_1 è una costante arbitraria. La soluzione generale dell'equazione non omogenea $y' = a(x)y + b(x)$ è

$$y(x) = e^{A(x)} \left(c_1 + \int e^{-A(x)} b(x) dt \right),$$

che, nel caso considerato, dove $A(x) = -x^2$ e $b(x) = 2x$, diventa

$$y(x) = e^{-x^2} \left(c_1 + \int e^{x^2} 2x dt \right).$$

Operando prima la sostituzione $t = x^2$ ($\implies dt = 2x dx$), si trova

$$\int e^{x^2} 2x dx = \int e^t dt = e^t + c_2 = e^{x^2} + c_2,$$

dove c_2 è una costante arbitraria, così che, in conclusione, la soluzione generale dell'equazione è

$$y(x) = e^{-x^2} (c_0 + e^{x^2}) = e^{-x^2} c_0 + 1,$$

dove $c_0 = c_1 + c_2$ è una costante arbitraria.

[Alternativamente, per separazione di variabili, scrivendo $y' = -2x(y - 1)$, si trova

$$\int \frac{dy}{y-1} = -\int 2x dx \implies \log |y-1| = -x^2 + c,$$

dove c è una costante arbitraria. Si ha quindi, prendendo l'esponenziale di entrambi i membri dell'equazione,

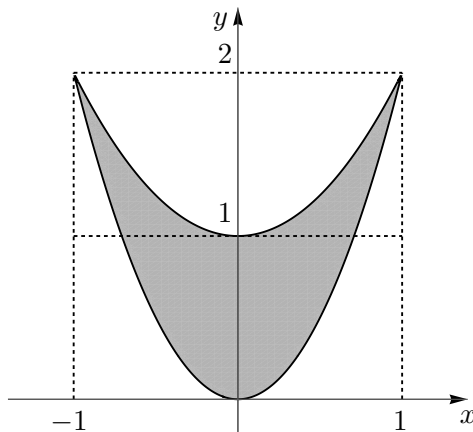
$$|y-1| = e^{-x^2+c} = e^{-x^2} k,$$

dove $k = e^c$ è una costante positiva arbitraria (positiva poiché l'esponenziale di un numero reale è sempre positivo). Si può eliminare il modulo ponendo

$$y-1 = c_0 e^{-x^2},$$

dove $c_0 = \pm k \in \mathbb{R}$ è una costante arbitraria, da cui segue che $y(x) = y = 1 + e^{-x^2} c_0$.]

(2) Per disegnare il dominio Ω si deve tener conto che y è compresa tra le due parabole $y = 2x^2$ e $y = 1 + x^2$, che si intersecano in $x = \pm 1$. Quindi Ω è l'intersezione dell'insieme che si trova al di sopra della prima parabola e al di sotto della seconda (cfr. la figura).



Se $(x, y) \in \Omega$, si ha $x \in [-1, 1]$ e, per ogni $x \in [-1, 1]$, risulta $2x^2 \leq y \leq 1 + x^2$, così che, usando anche la parità della funzione integranda, si ottiene

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{dx dy}{1 + x^2} &= \int_{-1}^1 \frac{dx}{1 + x^2} \int_{2x^2}^{1+x^2} dy = 2 \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2} (1 + x^2 - 2x^2) = 2 \int_0^1 \frac{1 - x^2}{1 + x^2} dx \\ &= 2 \int_0^1 \frac{2 - (1 + x^2)}{1 + x^2} dx = 4 \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2} - 2 \int_0^1 dx \\ &= \left(4 \arctan x - 2x \right) \Big|_0^1 = 4 \arctan 1 - 2 = 4 \frac{\pi}{4} - 2 = \pi - 2. \end{aligned}$$

(3) L'equazione omogenea associata all'equazione $y'' - y = x^2$ è $y'' - y = 0$. Le soluzioni del polinomio caratteristico $\lambda^2 - 1 = 0$ sono $\lambda = \pm 1$, quindi la soluzione dell'equazione omogenea è

$$y_0(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}.$$

La soluzione particolare dell'equazione non omogenea si cerca nella forma di un polinomio di secondo grado, ovvero $\tilde{y}(x) = ax^2 + bx + c$, dove le costanti a , b e c vanno determinate imponendo che si abbia $\tilde{y}'' - \tilde{y} = x^2$. Si ha

$$\tilde{y}'(x) = 2ax + b, \quad \tilde{y}''(x) = 2a \quad \implies \quad \tilde{y}'' - \tilde{y} = 2a - ax^2 - bx - c = x^2,$$

da cui segue che

$$-a = 1, \quad -b = 0, \quad 2a - c = 0 \quad \implies \quad a = -1, \quad b = 0, \quad c = 2a = -2.$$

Pertanto, la soluzione particolare dell'equazione $y'' - y = x^2$ è

$$\tilde{y}(x) = -x^2 - 2,$$

e quindi la soluzione generale è

$$y(x) = y_0(x) + \tilde{y}(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - x^2 - 2.$$

Imponendo le condizioni iniziali e tenendo conto che

$$y'(x) = c_1 e^x - c_2 e^{-x} - 2x,$$

si trova

$$y(0) = c_1 + c_2 - 2 = 0, \quad y'(0) = c_1 - c_2 = 0$$

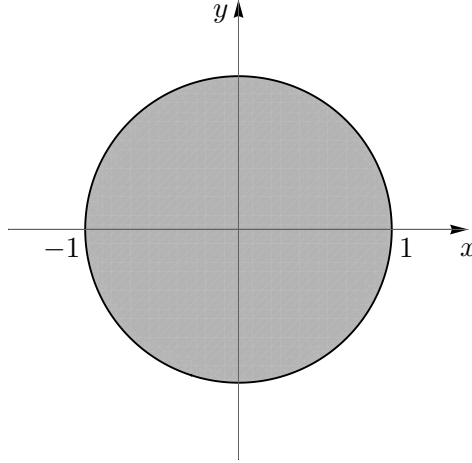
da cui si ottiene

$$c_1 = c_2, \quad c_1 + c_2 = 2 \quad \implies \quad c_1 = c_2 = 1.$$

In conclusione, la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = e^x + e^{-x} - x^2 - 2.$$

(4) Il dominio Ω è il cerchio che ha centro nell'origine e raggio $r = 1$ (cfr. la figura).



Le derivate parziali di $f(x, y)$ sono

$$f_x(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2x}{1 + y^2}, \quad f_y(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{2y(1 + x^2)}{(1 + y^2)^2},$$

così che risulta $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$ se e solo se $x = y = 0$. Si ha quindi un solo punto critico interno: $P_0 = (0, 0)$. Sulla frontiera si ha $x^2 + y^2 = 1$, quindi per $(x, y) \in \partial\Omega$, si può scrivere

$$g(x) = f(x, \pm\sqrt{1 - x^2}) = \frac{1 + x^2}{1 + 1 - x^2} = \frac{1 + x^2}{2 - x^2}, \quad x \in [-1, 1].$$

Si trova

$$g'(x) = \frac{dg}{dx}(x) = \frac{2x(2 - x^2) - (-2x)(1 + x^2)}{(2 - x^2)^2} = \frac{4x - 2x^2 + 2x + 2x^2}{(2 - x^2)^2} = \frac{6x}{(2 - x^2)^2},$$

così che si ha $g'(x) = 0$ se e solo se $x = 0$. Quindi, lungo la frontiera, i punti di minimo e di massimo vanno cercati in corrispondenza di $x = 0$ e degli estremi $x = \pm 1$ dell'intervallo $[-1, 1]$. Per $x = 0$ (a cui corrisponde $y = \pm 1$) si ha

$$f(0, \pm 1) = g(0) = \frac{1}{2},$$

mentre, per x agli estremi dell'intervallo $[-1, 1]$ (a cui corrisponde $y = 0$), si ha

$$f(1, 0) = f(-1, 0) = g(1) = \frac{2}{1} = 2.$$

Infine, in corrispondenza di P_0 , si ha

$$f(0, 0) = 1.$$

In conclusione il valore massimo di $f(x, y)$ in Ω è $M = 2$ ed è raggiunto in corrispondenza dei punti di frontiera $P_1 = (1, 0)$ e $P_2 = (-1, 0)$, mentre il valore minimo è $m = 1/2$ ed è raggiunto in corrispondenza dei punti di frontiera $P_3 = (0, 1)$ e $P_4 = (0, -1)$. Si noti che P_0 è un punto di sella: questo si verifica esplicitamente calcolando la matrice hessiana e osservando che è indefinita.

[Alternativamente, per studiare la funzione sulla frontiera, si possono utilizzare coordinate polari, scrivendo $x = \cos \theta$ e $y = \sin \theta$, con $\theta \in [0, 2\pi)$, così che, per $(x, y) \in \partial\Omega$, si ha

$$f(x, y) = g(\theta) = \frac{1 + \cos^2 \theta}{1 + \sin^2 \theta}$$

e quindi

$$\begin{aligned} g'(\theta) &= \frac{-2 \cos \theta \sin \theta (1 + \sin^2 \theta) - 2 \sin \theta \cos \theta (1 + \cos^2 \theta)}{(1 + \sin^2 \theta)^2} \\ &= -\frac{2 \cos \theta \sin \theta (1 + \sin^2 \theta + 1 + \cos^2 \theta)}{(1 + \sin^2 \theta)^2} \\ &= -\frac{6 \cos \theta \sin \theta}{(1 + \sin^2 \theta)^2}. \end{aligned}$$

Si ha quindi $g'(\theta) = 0$ se e solo se $\sin \theta = 0$ (ovvero $\theta = 0$ o $\theta = \pi$) oppure $\cos \theta = 0$ (ovvero $\theta = \pi/2$ o $\theta = 3\pi/2$). Quindi i punti estremali sulla frontiera vanno cercati tra i punti $P_1 = (1, 0)$, $P_2 = (-1, 0)$, $P_3 = (0, 1)$ e $P_4 = (0, -1)$, che corrispondono, rispettivamente, a $\theta = 0$, $\theta = \pi$, $\theta = \pi/2$ e $\theta = 3\pi/2$. Poiché $f(P_1) = f(P_2) = 2$ e $f(P_3) = f(P_4) = 1/2$, si trova che P_1 e P_2 sono punti di minimo, mentre P_3 e P_4 sono punti di massimo.]

ESERCIZIO 1. Riscrivendo l'equazione nella forma

$$\frac{y'}{y^2 - y - 2} = \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1},$$

si procede per separazione di variabili:

$$\int \frac{dy}{y^2 - y - 2} = \int \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} dx.$$

Le radici dell'equazione di secondo grado $y^2 - y - 2 = 0$ sono

$$y_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \implies y_+ = 2, y_- = -1,$$

così che si può fattorizzare

$$y^2 - y - 2 = (y - 2)(y + 1)$$

e quindi scrivere

$$\frac{1}{y^2 - y - 2} = \frac{1}{(y - 2)(y + 1)} = \frac{A}{y - 2} + \frac{B}{y + 1} = \frac{A(y + 1) + B(y - 2)}{(y - 2)(y + 1)},$$

da cui si trova

$$A(y + 1) + B(y - 2) = (A + B)y + (A - 2B) = 1,$$

ovvero

$$A + B = 0, \quad A - 2B = 1 \implies B = -A, \quad 3A = 1 \implies A = \frac{1}{3}, \quad B = -\frac{1}{3}.$$

Si ha allora

$$\int \frac{dy}{y^2 - y - 2} = \frac{1}{3} \int \frac{dy}{y - 2} - \frac{1}{3} \int \frac{dy}{y + 1} = \frac{1}{3} (\log |y - 2| - \log |y + 1|) + c_1 = \frac{1}{3} \log \left| \frac{y - 2}{y + 1} \right| + c_1,$$

dove c_1 è una costante arbitraria. Per calcolare l'integrale

$$\int \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} dx$$

si opera la sostituzione $t = x^2 + x + 1$, che implica $dt = (2x + 1)dx$, così che si trova

$$\int \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} dx = \int \frac{dt}{t} = \log |t| + c_2 = \log |x^2 + x + 1| + c_2,$$

dove c_1 è una costante arbitraria. Si trova quindi

$$\log \left| \frac{y - 2}{y + 1} \right| = 3 \log |x^2 + x + 1| + c_0,$$

dove $c_0 = 3(c_2 - c_1)$ è una costante arbitraria. Riscrivendo

$$3 \log |x^2 + x + 1| + c_0 = \log |x^2 + x + 1|^3 + c_0$$

ed esponenziando entrambi i membri dell'equazione si ottiene

$$\left| \frac{y - 2}{y + 1} \right| = k_0 |x^2 + x + 1|^3,$$

dove $k_0 = e^{c_0}$ è una costante positiva arbitraria che va fissata imponendo la condizione iniziale $y(0) = 0$, ovvero

$$2 = \left| \frac{-2}{1} \right| = k_0 |1|^3 = k_0 \implies k_0 = 2 \implies \left| \frac{y - 2}{y + 1} \right| = 2 |x^2 + x + 1|^3,$$

Tenendo conto che

$$x^2 + x + 1 = x^2 + x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0, \quad \frac{y-2}{y+1} = \frac{-2}{1} < 0 \quad \text{per } y = 0,$$

si possono eliminare i moduli e scrivere

$$\frac{2-y}{y+1} = f(x) = 2(x^2 + x + 1)^3.$$

Moltiplicando per $y + 1$ entrambi i membri si ottiene

$$(2-y) = f(x)(y+1) \implies y(1+f(x)) = 2-f(x) \implies y = \frac{2-f(x)}{1+f(x)}.$$

In conclusione, la soluzione del problema di Cauchy originale è data da

$$y(x) = \frac{2(1 - (x^2 + x + 1)^3)}{1 + 2(x^2 + x + 1)^3}.$$

ESERCIZIO 2. Gli autovalori di A sono le radici del polinomio caratteristico

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbb{1}) = \det \begin{pmatrix} 5-\lambda & -2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 5 + 4 = \lambda^2 - 6\lambda + 9,$$

quindi sono

$$\lambda_1 = 3 \pm \sqrt{9-9} = 3 \implies \lambda_1 = \lambda_2 = 3.$$

La matrice A non è diagonalizzabile, dal momento che gli autovalori sono uguali e A non è proporzionale all'identità $\mathbb{1}$. Si può scrivere A nella forma $A = S + N$, dove

$$S = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

è diagonale e N è nilpotente di ordine 2 (ovvero tale che $N^2 = 0$). Si ha

$$N = A - S = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

e si verifica immediatamente che

$$N^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Di conseguenza, si ha

$$\begin{aligned} e^{Ax} &= e^{Sx} e^{Nx} = e^{Sx} (\mathbb{1} + Nx) = e^{3x} \mathbb{1} (\mathbb{1} + Nx) \\ &= e^{3x} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x & -2x \\ 2x & -2x \end{pmatrix} \right) = e^{3x} \begin{pmatrix} 1+2x & -2x \\ 2x & 1-2x \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Per risolvere il sistema di equazioni differenziali, si nota innanzitutto che le equazioni per y_1 e y_2 non dipendono da y_3 , quindi si considera il sistema di due equazioni

$$\begin{cases} y_1' = 5y_1 - 2y_2, \\ y_2' = 2y_1 + y_2. \end{cases}$$

La soluzione con la condizione iniziale assegnata $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 2$ è data da

$$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = e^{Ax} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = e^{3x} \begin{pmatrix} 1+2x & -2x \\ 2x & 1-2x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = e^{3x} \begin{pmatrix} 1+2x-4x \\ 2x+2-4x \end{pmatrix} = e^{3x} \begin{pmatrix} 1-2x \\ 2-2x \end{pmatrix},$$

ovvero

$$y_1(x) = e^{3x} (1 - 2x), \quad y_2(x) = e^{3x} (2 - 2x).$$

Inserendo le espressioni trovate per y_1 e y_2 nella terza equazione si trova

$$y_3' = 3y_3 + e^{3x} (1 - 2x + 2 - 2x) = 3y_3 + e^{3x} (3 - 4x),$$

con condizione iniziale $y_3(0) = 3$.

La soluzione dell'ultima equazione è data da

$$\begin{aligned} y_3(x) &= e^{3x} \left(y_3(0) + \int_0^x dt e^{-3t} (e^{3t} (3 - 4t)) \right) \\ &= e^{3x} \left(y_3(0) + \int_0^x dt (3 - 4t) \right) = e^{3x} (3 + 3x - 2x^2). \end{aligned}$$

In conclusione la soluzione del problema di Cauchy è data da

$$y_1(x) = e^{3x} (1 - 2x), \quad y_2(x) = e^{3x} (2 - 2x), \quad y_3(x) = e^{3x} (3 + 3x - 2x^2).$$

ESERCIZIO 3. L'equazione

$$x^2 y'' - x y' + 5y = x \log x$$

è un'equazione di Eulero che, tramite la trasformazione $x = e^t$ viene espressa in termini della variabile $z(t) = y(e^t)$ nella forma

$$z'' - 2z' + 5z = x \log x = t e^t.$$

Le radici del polinomio caratteristico $\lambda^2 - 2\lambda + 5$ associato all'equazione omogenea sono

$$\lambda = 1 \pm \sqrt{1 - 5} = 1 \pm 2i \quad \implies \quad \lambda_1 = 1 + 2i, \quad \lambda_2 = 1 - 2i.$$

Quindi la soluzione generale dell'equazione omogenea associata è

$$z_0(t) = e^t (c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t),$$

dove c_1 e c_2 sono due costanti arbitrarie.

Nell'equazione non omogenea

$$z'' - 2z' + 5z = t e^t$$

il termine noto $t e^t$ è della forma

$$e^{\lambda t} (A_n(t) \cos \mu x + B_n(t) \sin \mu t),$$

dove $A_n(t)$ e $B_n(t)$ sono polinomi di grado n . Nel nostro caso si ha

$$\lambda = 1, \quad \mu = 0, \quad n = 1, \quad A_1(t) = t, \quad B_1(t) = 0.$$

Poiché $\lambda + i\mu = 1 \neq 1 \pm 2i$, si cerca la soluzione particolare $\tilde{z}(t)$ dell'equazione non omogenea nella forma

$$\tilde{z}(t) = e^t (At + B).$$

Se scriviamo

$$\tilde{z}(t) = e^t Q(t), \quad Q(t) = (At + B),$$

e teniamo conto che

$$\tilde{z}' = e^t Q(t) + e^t Q'(t),$$

$$\tilde{z}'' = e^t Q(t) + 2e^t Q'(t) + e^t Q''(t),$$

dove $Q'(t) = A$ e $Q''(t) = 0$, otteniamo

$$\begin{aligned} \tilde{z}'' - 2\tilde{z}' + 5\tilde{z} &= e^t Q(t) + 2e^t Q'(t) + e^t Q''(t) - 2(e^t Q(t) + e^t Q'(t)) + 5e^t Q(t) \\ &= e^t Q(t) + 2e^t Q'(t) + e^t Q''(t) - 2e^t Q(t) - 2e^t Q'(t) + 5e^t Q(t) \\ &= e^t (Q''(t) + 4Q(t)) = 4e^t Q(t) = e^t (4At + 4B), \end{aligned}$$

così che, imponendo che $\tilde{z}$ risolva l'equazione non omogenea, troviamo

$$e^t (4At + 4B) = t e^t \implies 4A = 1, \quad 4B = 0 \implies A = \frac{1}{4}, \quad B = 0.$$

In conclusione la soluzione particolare dell'equazione non omogenea è

$$\tilde{z}(t) = \frac{t}{4} e^t$$

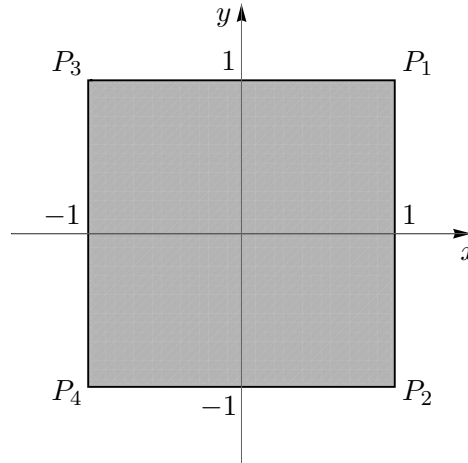
e quindi la soluzione generale dell'equazione è

$$z(t) = e^t \left(c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t + \frac{t}{4} \right).$$

Tornando alle variabili originali e tendo conto che $x = e^t$ implica $t = \log x$, si trova

$$\begin{aligned} y(x) = z(\log x) &= e^{\log x} \left(c_1 \cos(2 \log x) + c_2 \sin(2 \log x) + \frac{\log x}{4} \right) \\ &= x \left(c_1 \cos(2 \log x) + c_2 \sin(2 \log x) + \frac{\log x}{4} \right). \end{aligned}$$

ESERCIZIO 4. (4) Il dominio Ω è dato dall'intersezione delle due strisce $S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1\}$ e $S_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \leq 1\}$: è quindi il quadrato che ha vertici nei punti $P_1 = (1, 1)$, $P_2 = (1, -1)$, $P_3 = (-1, 1)$ e $P_4 = (-1, -1)$ (cfr. la figura).



Si cercano innanzitutto i punti critici interni di

$$f(x, y) = \frac{x^4}{4} - xy^3 + \frac{3}{4}y^4,$$

ovvero i punti (x, y) all'interno di Ω in cui si annullano le derivate

$$f_x(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = x^3 - y^3, \quad f_y(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -3xy^2 + 3y^3 = 3y^2(y - x).$$

Si ha $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$ se e solo se $x = y$ (la soluzione $x = y = 0$ ne costituisce un caso particolare). Quindi tutti i punti della bisettrice $y = x$ interni al quadrato Ω sono punti stazionari, e si ha

$$f(x, x) = \frac{x^4}{4} - x^4 + \frac{3}{4}x^4 = 0.$$

La frontiera $\partial\Omega$ dell'insieme Ω è costituita dai quattro segmenti

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= \{(1, t) : t \in [-1, 1]\}, \\ \gamma_2(t) &= \{(t, 1) : t \in [-1, 1]\}, \\ \gamma_3(t) &= \{(-1, t) : t \in [-1, 1]\}, \\ \gamma_4(t) &= \{(t, -1) : t \in [-1, 1]\}. \end{aligned}$$

Lungo γ_1 si ha

$$g_1(t) = f(1, t) = \frac{1}{4} - t^3 + \frac{3}{4}t^4 \implies g_1'(t) = -3t^2 + 3t^3 = 3t^2(t - 1),$$

così che $g_1'(t) = 0$ se e solo se $t = 0$ o $t = 1$, di cui solo $t = 0$ è all'interno dell'intervallo $[-1, 1]$, dal momento che $t = 1$ coincide con uno dei due estremi. Quindi i punti di massimo e di minimo di f

lungo γ_1 vanno cercati nel punto $P_5 = (1, 0)$, che corrisponde a $t = 0$, e negli estremi $P_1 = (1, 1)$ e $P_2 = (1, -1)$, che corrispondono a $t = 1$ e $t = -1$, rispettivamente. Si ha

$$\begin{aligned} f(P_1) &= f(1, 1) = g_1(1) = \frac{1}{4} - 1 + \frac{3}{4} = 0, \\ f(P_2) &= f(1, -1) = g_1(-1) = \frac{1}{4} + 1 + \frac{3}{4} = 2, \\ f(P_5) &= f(1, 0) = g_1(0) = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Lungo γ_2 si ha

$$g_2(t) = f(t, 1) = \frac{t^4}{4} - t + \frac{3}{4} \implies g_2'(t) = t^3 - 1,$$

così che $g_2'(t) = 0$ se e solo se $t = 1$, che è però un estremo dell'intervallo $[-1, 1]$. Quindi i punti di massimo e di minimo di f lungo γ_2 vanno cercati negli estremi $P_1 = (1, 1)$ e $P_3 = (-1, 1)$, che corrispondono a $t = 1$ e $t = -1$, rispettivamente. Si ha

$$f(P_3) = f(-1, 1) = g_2(-1) = \frac{1}{4} + 1 + \frac{3}{4} = 2,$$

mentre $f(P_1)$ è già stato calcolato poiché $P_1 = \gamma_1 \cap \gamma_2$ è anche un estremo di γ_1 .

Lungo γ_3 si ha

$$g_3(t) = f(-1, t) = \frac{1}{4} + t^3 + \frac{3}{4}t^4 \implies g_3'(t) = 3t^2 + 3t^3 = 3t^2(t + 1),$$

così che $g_3'(t) = 0$ se e solo se $t = 0$ o $t = -1$, di cui solo $t = 0$ è all'interno dell'intervallo $[-1, 1]$. Quindi i punti di massimo e di minimo di f lungo γ_3 vanno cercati nel punto $P_6 = (-1, 0)$, che corrisponde a $t = 0$, e negli estremi $P_3 = (-1, 1)$ e $P_4 = (-1, -1)$, che corrispondono a $t = 1$ e $t = -1$, rispettivamente. Si ha

$$\begin{aligned} f(P_4) &= f(-1, -1) = g_3(-1) = \frac{1}{4} - 1 + \frac{3}{4} = 0, \\ f(P_6) &= f(-1, 0) = g_3(0) = \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

mentre $f(P_3)$ è già stato calcolato poiché $P_3 = \gamma_2 \cap \gamma_3$ è anche un estremo di γ_2 .

Infine, lungo γ_4 si ha

$$g_4(t) = f(t, -1) = \frac{t^4}{4} + t + \frac{3}{4} \implies g_4'(t) = t^3 + 1,$$

così che $g_4'(t) = 0$ se e solo se $t = -1$, che è però un estremo dell'intervallo $[-1, 1]$. Quindi i punti di massimo e di minimo di f lungo γ_4 vanno cercati negli estremi $P_4 = (-1, -1)$ e $P_2 = (1, -1)$, che corrispondono a $t = 1$ e $t = -1$, rispettivamente. Entrambi $f(P_2)$ e $f(P_4)$ sono già stati calcolati poiché $P_2 = \gamma_1 \cap \gamma_4$ e $P_4 = \gamma_3 \cap \gamma_4$.

In conclusione, i punti candidati a essere massimi o minimi sono:

1. i punti di intersezione dei quattro segmenti che costituiscono la frontiera dell'insieme Ω , ovvero $P_1 = (1, 1)$, $P_2 = (1, -1)$, $P_3 = (-1, 1)$ e $P_4 = (-1, -1)$,
2. i punti $P_5 = (1, 0)$ e $P_6 = (-1, 0)$ lungo la frontiera,
3. tutti i punti lungo il segmento γ_0 determinato dall'intersezione della bisettrice $y = x$ e il quadrato Ω , ovvero i punti

$$P(t) = (t, t), \quad t \in [-1, 1],$$

(si noti che questo include anche P_1 e P_4).

Tenendo conto dei valori che la funzione $f(x, y)$ assume nei punti sopra elencati, si trova che

1. tutti i punti del segmento γ_0 costituiscono punti di minimo, mentre i punti P_2 e P_3 costituiscono punti di massimo,
2. il valore minimo della funzione è dato da $f(t, t) = 0$, con $t \in [-1, 1]$, mentre il valore massimo è dato da $f(P_2) = f(P_3) = 2$.

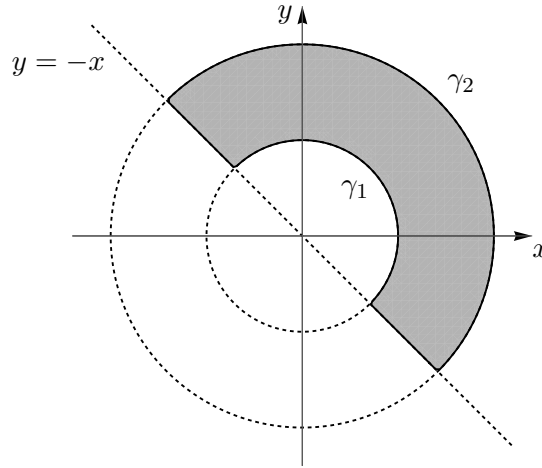
ESERCIZIO 5. La condizione

$$x + y \geq 0 \implies y \geq -x$$

individua il semipiano S che si trova al di sopra della bisettrice $y = -x$ del secondo e quarto quadrante, mentre la condizione

$$1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$$

individua la corona circolare C compresa tra le due circonferenze γ_1 e γ_2 che hanno centro nell'origine e raggio $r = 1$ e $r = 2$, rispettivamente. Quindi il dominio Ω è dato dall'intersezione dei due insiemi, ovvero si ha $\Omega = S \cap C$ (cfr. la figura).



Usando coordinate polari, ovvero scrivendo $x = \rho \cos \theta$ e $y = \rho \sin \theta$, con $\rho > 0$ e $\theta \in [0, 2\pi)$, e tenendo conto che la semiretta $y = -x$ del quarto quadrante e la semiretta $y = -x$ del secondo quadrante formano, rispettivamente, un angolo $-\pi/4$ e un angolo $3\pi/4$ con l'asse x , scriviamo

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \in C\} = \{(\rho, \theta) \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi) : 1 \leq \rho \leq 2, -\pi/4 \leq \theta \leq 3\pi/4\},$$

[Alternativamente, in termini delle coordinate (ρ, θ) , la condizione $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ diventa

$$1 \leq \rho^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \leq 4 \implies 1 \leq \rho^2 \leq 4 \implies 1 \leq \rho \leq 2,$$

mentre la condizione $x + y \geq 0$, tenendo conto che $\rho > 0$ e

$$\cos \theta + \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos \theta + \sin \theta) = \cos \theta \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin \theta \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$$

diventa

$$\rho(\cos \theta + \sin \theta) > 0 \implies \cos \theta + \sin \theta > 0 \implies \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) > 0,$$

che implica $\theta + (\pi/4) \in (0, \pi) \implies \theta \in (-\pi/4, 3\pi/4)$, dal momento che $\sin \theta > 0$ per $\theta \in (0, \pi)$.]

Possiamo quindi riscrivere l'integrale come

$$I = \iint_{\Omega} (x^2 + y^3) dx dy = \int_1^2 d\rho \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} d\theta \rho (\rho^2 \cos^2 \theta + \rho^3 \sin^3 \theta),$$

dove si è tenuto conto che lo jacobiano J della trasformazione che porta dalle coordinate cartesiane alle coordinate polari è $J = \rho$.

Possiamo scrivere I come somma di due integrali $I = I_1 + I_2$, dove

$$I_1 = \int_1^2 d\rho \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} d\theta \rho \rho^2 \cos^2 \theta, \quad I_2 = \int_1^2 d\rho \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} d\theta \rho \rho^3 \sin^3 \theta.$$

Calcoliamo i due integrali separatamente. Per il primo, abbiamo

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_1^2 d\rho \rho^3 \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} d\theta \cos^2 \theta \\ &= \frac{\rho^4}{4} \Big|_1^2 \frac{\theta + \sin \theta \cos \theta}{2} \Big|_{-\pi/4}^{3\pi/4} \\ &= \frac{1}{4} (16 - 1) \frac{1}{2} \left(\frac{3\pi}{4} + \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) - \left(-\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right) \\ &= \frac{15}{4} \frac{1}{2} \left(\pi + \left(\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right) \right) = \frac{15}{8} (\pi + 0) = \frac{15\pi}{8}, \end{aligned}$$

dove si è tenuto conto del fatto che

$$\begin{aligned} \int \cos^2 \theta d\theta &= \int \cos \theta \cos \theta d\theta = \int (\sin \theta)' \cos \theta d\theta \\ &= \sin \theta \cos \theta - \int \sin \theta (\cos \theta)' d\theta = \sin \theta \cos \theta - \int \sin \theta (-\sin \theta) d\theta \\ &= \sin \theta \cos \theta + \int \sin^2 \theta d\theta = \sin \theta \cos \theta + \int (1 - \cos^2 \theta) d\theta \\ &= \sin \theta \cos \theta + \int d\theta - \int \cos^2 \theta d\theta = \sin \theta \cos \theta + \theta - \int \cos^2 \theta d\theta \\ &\implies \int \cos^2 \theta d\theta = \frac{\sin \theta \cos \theta + \theta}{2} + \text{costante} \end{aligned}$$

e dei seguenti valori delle funzioni trigonometriche:

$$\sin \frac{3\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Analogamente, effettuando la sostituzione $t = \cos \theta$ ($\implies dt = -\sin \theta d\theta$) per integrare

$$\begin{aligned} \int \sin \theta d\theta &= -\int dt = -t + \text{costante} = -\cos \theta + \text{costante}, \\ \int \cos^2 \theta (\sin \theta) d\theta &= -\int t^2 dt = -\frac{t^3}{3} + \text{costante} = -\frac{\cos^3 \theta}{3} + \text{costante}, \end{aligned}$$

per il secondo integrale troviamo

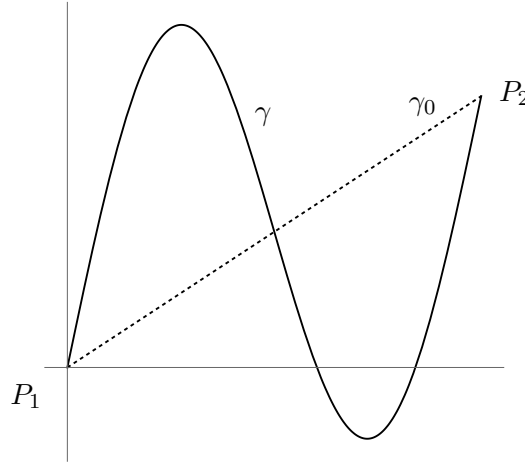
$$\begin{aligned}
 I_2 &= \int_1^2 d\rho \rho^4 \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} d\theta \sin^3 \theta \\
 &= \int_1^2 d\rho \rho^4 \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} (\sin \theta) d\theta \sin^2 \theta = \int_1^2 d\rho \rho^4 \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} (\sin \theta) d\theta (1 - \cos^2 \theta) \\
 &= \int_1^2 d\rho \rho^4 \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} (\sin \theta) d\theta - \int_1^2 d\rho \rho^4 \int_{-\pi/4}^{3\pi/4} \cos^2 \theta (\sin \theta) d\theta \\
 &= \frac{\rho^5}{5} \Big|_1^2 (-\cos \theta) \Big|_{-\pi/4}^{3\pi/4} - \frac{\rho^5}{5} \Big|_1^2 \left(-\frac{\cos^3 \theta}{3} \right) \Big|_{-\pi/4}^{3\pi/4} \\
 &= \frac{1}{5} (32 - 1) \left(\left(-\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) \right) + \frac{1}{3} \left(\cos^3\left(\frac{3\pi}{4}\right) - \cos^3\left(\frac{-\pi}{4}\right) \right) \right) \\
 &= \frac{31}{5} \left(\left(-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right) + \frac{1}{3} \left(\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 \right) \right) \\
 &= \frac{31}{5} \left(\frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{2}{6\sqrt{2}} \right) = \frac{31}{5} \frac{5}{3\sqrt{2}} = \frac{31}{3\sqrt{2}},
 \end{aligned}$$

dove si è tenuto conto dei valori delle funzioni trigonometriche.

In conclusione si ottiene

$$I = I_1 + I_2 = \frac{15\pi}{8} + \frac{31}{3\sqrt{2}}.$$

ESERCIZIO 6. La curva γ è raffigurata in figura: è una curva regolare aperta che connette il punto $P_1 = (0, 0) = \gamma(0)$ con il punto $P_2 = \gamma(1) = (1, 1)$.



Innanzitutto, studiamo se le due forme differenziali ω_1 e ω_2 sono esatte. Per quanto riguarda ω_1 , ponendo $f_1(x, y) = xy^2$ e $f_2(x, y) = x^2y$, in modo da scrivere $\omega_1 = f_1(x, y) dx + f_2(x, y) dy$, si ha

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = 2xy = \frac{\partial f_2}{\partial x},$$

quindi ω_1 è chiusa. Inoltre ω_1 è definita e regolare in tutto $\mathbb{R}^2$, che è un insieme semplicemente connesso, di conseguenza ω_1 è esatta. Per quanto riguarda ω_2 , ponendo $g_1(x, y) = x$ e $g_2(x, y) = x$, in modo da scrivere $\omega_2 = g_1(x, y) dx + g_2(x, y) dy$, si ha

$$\frac{\partial g_1}{\partial y} = 0 \neq 1 = \frac{\partial g_2}{\partial x},$$

che mostra che ω_2 non è chiusa e quindi, *a fortiori*, non è esatta.

La forma differenziale ω_1 , in quanto esatta, ammette un potenziale $\mathcal{U}$ tale che

$$f_1 = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}, \quad f_2 = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y}.$$

Integrando

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \int \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x} dx = \int f_1(x, y) dx = \int xy^2 dx = \frac{x^2 y^2}{2} + c_1(y), \\ \mathcal{U} &= \int \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y} dy = \int f_2(x, y) dy = \int x^2 y dy = \frac{x^2 y^2}{2} + c_2(x), \end{aligned}$$

e fissando $c_1(y) = c_2(x) = c_0 = \text{costante}$ (per esempio $c_0 = 0$), si trova

$$\mathcal{U} = \frac{x^2 y^2}{2} + c_0.$$

Si ha allora

$$I_1 = \int_{\gamma} \omega_1 = \mathcal{U}(P_2) - \mathcal{U}(P_0) = \mathcal{U}(1, 1) - \mathcal{U}(0, 0) = \frac{1}{2}.$$

Per l'integrale di ω_2 , dobbiamo calcolare esplicitamente

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\gamma} \omega_2 = \int_0^1 (g_1(t, t + \sin(2\pi t)) x'(t) dt + g_2(t, t + \sin(2\pi t)) y'(t) dt) \\ &= \int_0^1 (t x'(t) dt + t y'(t) dt) = \int_0^1 (t dt + t(1 + 2\pi \cos(2\pi t)) dt) \\ &= \int_0^1 (2t + 2\pi t \cos(2\pi t)) dt = 2 \int_0^1 t dt + \int_0^1 t(2\pi \cos(2\pi t)) dt, \end{aligned}$$

dove si è tenuto conto che, scrivendo $\gamma(t) = (x(t), y(t)) = (t, t + \sin(2\pi t))$, si ha

$$g_1(t, t + \sin(2\pi t)) = g_2(t, t + \sin(2\pi t)) = x(t) = t, \quad x'(t) = 1, \quad y'(t) = 1 + 2\pi \cos(2\pi t).$$

Si ha inoltre

$$\begin{aligned} \int t dt &= \frac{t^2}{2} + c_1, \\ \int t(2\pi \cos(2\pi t)) dt &= \int t(\sin(2\pi t))' dt = t \sin(2\pi t) - \int \sin(2\pi t) dt = t \sin(2\pi t) + \frac{1}{2\pi} \cos(2\pi t) + c_2, \end{aligned}$$

dove c_1 e c_2 sono due costanti arbitrarie, così che

$$I_2 = t^2 \Big|_0^1 + \left(t \sin(2\pi t) + \frac{1}{2\pi} \cos(2\pi t) \right) \Big|_0^1 = 1 + \sin(2\pi) + \frac{1}{2\pi} \cos(2\pi) - 0 - 0 - \frac{1}{2\pi} \cos(0) = 1.$$