

Analisi Matematica per le Applicazioni – Analisi Matematica II

CdL in Ingegneria Meccanica – Anno Accademico 2025/2026

Soluzioni della prova scritta del quarto appello (12-06-2026)

ESERCIZIO 0.

(1) Il polinomio caratteristico associato all'equazione omogenea $y'' + 2y' + y = 0$ è

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1,$$

le cui radici sono

$$\lambda = -1 \pm \sqrt{1 - 1} = -1.$$

Si hanno quindi due radici coincidenti: la soluzione generale dell'equazione omogenea è

$$y_0(x) = (c_1 + c_2 x) e^{-x},$$

dove c_1 e c_2 sono due costanti arbitrarie.

Scrivendo il termine noto $x^2 + 2x + 1$ dell'equazione non omogenea nella forma

$$e^{\lambda x} (A_n(x) \cos \mu x + B_n(x) \sin \mu x),$$

con λ e μ costanti e A_n e B_n due polinomi di grado n in x , si ha

$$\lambda = 0, \quad \mu = 0, \quad n = 2, \quad A_n(x) = x^2 + 2x + 1.$$

Dal momento che $\lambda + i\mu = 0$ non è una radice del polinomio caratteristico, si cerca una soluzione particolare dell'equazione non omogenea nella forma di un polinomio di grado 2, ovvero

$$\tilde{y}(x) = Ax^2 + Bx + C,$$

dove A , B e C sono costanti da determinarsi. Si ha

$$\tilde{y}'(x) = 2Ax + B, \quad \tilde{y}''(x) = 2A,$$

e quindi

$$\tilde{y}'' + 2\tilde{y}' + \tilde{y} = 2A + 2(2Ax + B) + (Ax^2 + Bx + C) = Ax^2 + (4A + B)x + (2A + 2B + C).$$

Imponendo che $\tilde{y}(x)$ risolva l'equazione si trova

$$Ax^2 + (4A + B)x + (2A + 2B + C) = x^2 + 2x + 1$$

e, uguagliando i coefficienti delle potenze con lo stesso grado, si ottiene

$$A = 1, \quad 4A + B = 2, \quad 2A + 2B + C = 1 \implies A = 1, \quad B = 2 - 4A = -2, \quad C = 1 - 2A - 2B = 3.$$

La soluzione particolare dell'equazione non omogenea è pertanto

$$\tilde{y}(x) = x^2 - 2x + 3.$$

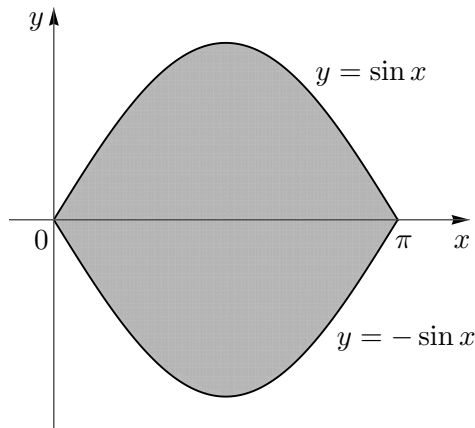
In conclusione, la soluzione generale dell'equazione differenziale non omogenea è data da

$$y(x) = y_0(x) + \tilde{y}(x) = (c_1 + c_2 x) e^{-x} + x^2 - 2x + 3.$$

(2) Per $x \in [0, \pi]$, si ha $\sin x \geq 0$, quindi la condizione $|y| \leq \sin x$ equivale a richiedere

$$-\sin x \leq y \leq \sin x, \quad x \in [0, \pi].$$

Tenendo conto del grafico della funzione $\sin x$, il dominio Ω è quindi l'insieme compreso tra il grafico della funzione $\sin x$ e il grafico della funzione $-\sin x$, per $x \in [0, \pi]$ (cfr. la figura).



Il dominio Ω è normale rispetto all'asse x (come del resto anche rispetto all'asse y), quindi l'integrale doppio si può riscrivere

$$I_0 = \iint_{\Omega} dx dy x = \int_0^{\pi} dx x \int_{-\sin x}^{\sin x} dy = \int_0^{\pi} dx x (\sin x - (-\sin x)) = 2 \int_0^{\pi} dx x \sin x.$$

L'integrale si può risolvere integrando per parti: scrivendo $f(x) = x$ e $g'(x) = \sin x$, così che $f'(x) = 1$ e $g(x) = -\cos x$, si trova

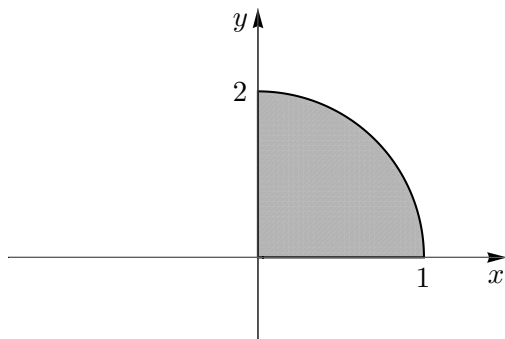
$$\int dx x \sin x = -x \cos x + \int dx \cos x = -x \cos x + \sin x + c_0,$$

dove c_0 è una costante arbitraria. In conclusione si ha

$$I_0 = 2(-x \cos x + \sin x) \Big|_0^{\pi} = 2(-\pi \cos \pi + \sin \pi + 0 - \sin 0) = 2\pi,$$

avendo tenuto conto che $\sin 0 = \sin \pi = 0$ e $\cos \pi = -1$.

(3) La condizione $x^2 + y^2 \leq 1$ identifica il cerchio di raggio $r = 1$ con centro nell'origine, mentre le condizioni $x \geq 0, y \geq 0$ individuano il primo quadrante del piano: il dominio è quindi il quarto di cerchio contenuto nel primo quadrante (cfr. la figura).



Può essere utile riscrivere $f(x, y) = (x^2 - y^2)^2$. I punti critici interni si cercano imponendo che si abbia

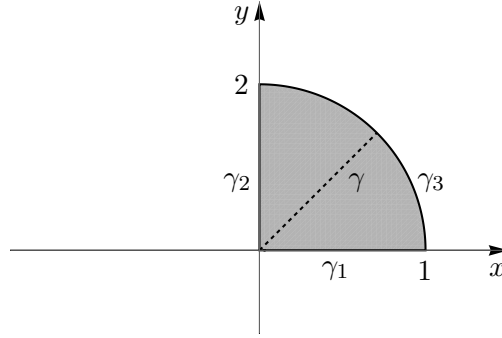
$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} (x^2 - y^2)^2 = 4x (x^2 - y^2) = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} (x^2 - y^2)^2 = -4y (x^2 - y^2) = 0.\end{aligned}$$

La prima derivata parziale si annulla o se $x = 0$ o se $x^2 = y^2$: se $x = 0$, la seconda derivata parziale si annulla per $y = 0$, mentre se $x^2 = y^2$, la seconda derivata è automaticamente nulla. In conclusione le due derivate parziali si annullano per $y = \pm x$ (di cui $y = x = 0$ è un caso particolare). I punti interni al dominio che soddisfano tale condizione (con il segno $+$) sono i punti lungo il segmento (cfr. la figura sotto)

$$\gamma(t) = (t, t), \quad t \in (0, \sqrt{2}),$$

in quanto gli estremi del segmento vanno esclusi in quanto punti di frontiera (e non interni). Si ha

$$f(t, t) = 0, \quad t \in (0, \sqrt{2}).$$



La frontiera $\partial\Omega$ è costituita da 3 curve regolari (cfr. la figura sopra), i due segmenti

$$\begin{aligned}\gamma_1(t) &= (t, 0), & t &\in [0, 1], \\ \gamma_2(t) &= (0, t), & t &\in [0, 1],\end{aligned}$$

e l'arco di circonferenza

$$\gamma_3(t) = (\cos t, \sin t), \quad t \in [0, \pi/2].$$

Lungo il segmento γ_1 la funzione assume il valore

$$h_1(t) = f(t, 0) = t^4,$$

che ha un punto di minimo in $t = 0$ e un punto di massimo in $t = 1$ (poiché $h'_1(t) = 4t^3$, la funzione è crescente in $[0, 1]$). Lungo il segmento γ_2 la funzione assume il valore

$$h_2(t) = f(0, t) = t^4,$$

che ha, ugualmente, un punto di minimo in $t = 0$ e un punto di massimo in $t = 1$. Lungo la curva γ_3 la funzione assume il valore

$$h_3(t) = f(\cos t, \sin t) = (\cos t - \sin t)^2 (\cos t + \sin t)^2 = (\cos^2 t - \sin^2 t)^2 = (2 \cos^2 t - 1)^2.$$

Per determinare i punti di massimo e di minimo di f lungo γ_3 dobbiamo quindi studiare la funzione $h_3(t) = (2\cos^2 t - 1)^2$ nell'intervallo $I = [0, \pi/2]$. Si ha

$$h'_3(t) = 2(2\cos^2 t - 1)(-\sin t)$$

e quindi $h'(t) = 0$ o per $t = 0$ (che è però un estremo dell'intervallo) o per t tale che

$$\cos^2 t = \frac{1}{2} \implies \cos t = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Tenendo conto che

$$\cos t = \frac{1}{\sqrt{2}} \implies t = \pm \frac{\pi}{4}, \quad \cos t = -\frac{1}{\sqrt{2}} \implies t = \pm \frac{3\pi}{4},$$

e che solo $t_0 = \pi/4$ appartiene all'intervallo I , concludiamo che l'unico punto critico di f interno alla curva γ_3 è $P_0 = (\cos t_0, \sin t_0) = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$. Si noti che P_0 è un estremo del segmento γ .

Infine si devono considerare i punti di intersezione delle 3 curve γ_1 , γ_2 e γ_3 , ovvero

$$P_1 = \gamma_1 \cap \gamma_2 = (0, 0), \quad P_2 = \gamma_1 \cap \gamma_3 = (1, 0), \quad P_3 = \gamma_2 \cap \gamma_3 = (0, 1),$$

dove P_1 è l'altro estremo del segmento γ . Si ha

$$f(0, 0) = 0, \quad f(1, 0) = 1, \quad f(0, 1) = 1.$$

In conclusione, il minimo di f vale 0 ed è raggiunto lungo il segmento γ (estremi inclusi), mentre il massimo di f vale 1 ed è raggiunto in corrispondenza dei punti $P_2 = (1, 0)$ e $P_3 = (0, 1)$.

[Alternativamente, per studiare la funzione $f(x, y)$ lungo γ_3 si può anche parametrizzare la curva nella forma

$$\gamma_3(x) = (x, \sqrt{1-x^2}), \quad x \in [-1, 1],$$

e studiare la funzione

$$g_3(x) = (x^2 - (\sqrt{1-x^2})^2)^2 = (x^2 - 1 + x^2)^2 = (2x^2 - 1)^2, \quad x \in [0, 1].$$

La derivata $g'_3(x) = 2(2x^2 - 1)4x = 8x(2x^2 - 1)$ si annulla o per $x = 0$, che però è un estremo dell'intervallo $[0, 1]$, o per $x^2 = 1/2$ ovvero $x = \pm 1/\sqrt{2}$, di cui solo il valore $x_0 = 1/\sqrt{2}$ è interno all'intervallo $[0, 1]$. Si ritrova quindi il punto $P_0 = (x_0, \sqrt{1-x_0^2}) = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$.

[L'esercizio si può anche svolgere passando a coordinate polari: scrivendo $x = \rho \cos \theta$ e $y = \rho \sin \theta$, le condizioni che si definiscono il dominio Ω si traducono nelle seguenti condizioni:

$$\left. \begin{aligned} x \geq 0 &\implies \theta \in [-\pi/2, \pi/2] \\ y \geq 0 &\implies \theta \in [0, \pi] \end{aligned} \right\} \implies \theta \in [0, \pi/2],$$

$$x^2 + y^2 \leq 1 \implies \rho \in [0, 1],$$

così che, in termini della variabili (ρ, θ) , si ha

$$\varphi(\rho, \theta) = f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = \rho^4(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)^2 = \rho^4(2\cos^2 \theta - 1)^2,$$

$$\Omega = \{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times [2\pi] : 0 \leq \rho \leq 1, \theta \in [0, \pi/2]\}.$$

Quindi i punti critici interni si ottengono imponendo

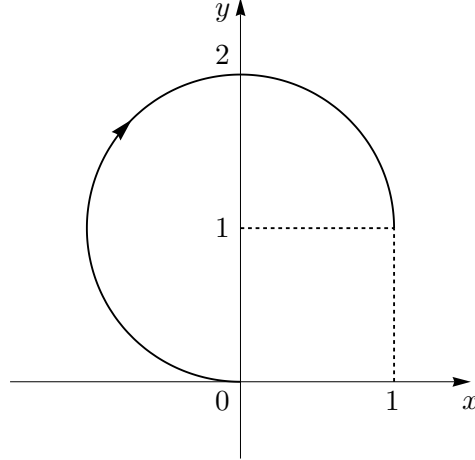
$$\frac{\partial \varphi}{\partial \rho} = 4\rho^3(2\cos^2 \theta - 1)^2 = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \rho^4(-2\sin \theta \cos \theta)(2\cos^2 \theta - 1) = 0.$$

La prima condizione è verificata o per $\rho = 0$ (che tuttavia è sulla frontiera del dominio) o per $\cos^2 \theta = 1/2$, che soddisfa anche la seconda (per $\sin \theta = 0$ o $\cos \theta = 0$, invece, si annulla la seconda derivata, ma non la prima). La condizione $\cos^2 \theta = 1/2$ implica $\cos \theta = \pm 1/\sqrt{2}$, da cui si ottiene $\theta = \pm \pi/4$ o $\theta = \pm 3\pi/4$, di cui solo $\theta = \pi/4$ va considerata per i punti che appartengono al dominio. La condizione $\theta = \pi/4$ individua nel dominio la curva γ lungo la bisettrice $y = x$. In termini delle coordinate polari, le curve γ_1 , γ_2 e γ_3 sono parametrizzate nella forma

$$\begin{aligned} \gamma_1 : \quad & \theta = 0, \rho \in [0, 1] \implies \varphi(\rho, \theta) = \rho^4, \\ \gamma_2 : \quad & \theta = \pi/2, \rho \in [0, 1] \implies \varphi(\rho, \theta) = \rho^4, \\ \gamma_3 : \quad & \theta \in [0, \pi/2], \rho = 1 \implies \varphi(\rho, \theta) = (2\cos^2 \theta - 1)^2, \end{aligned}$$

così che si ritrova che φ è crescente lungo i due segmenti e assume valore massimo 1 nei punti P_2 e P_3 e valore minimo 0 in P_1 in entrambi i casi, mentre lungo γ_3 assume valore massimo agli estremi e valore minimo in P_0 . Quindi, il minimo di φ vale 0 ed è raggiunto lungo il segmento γ , il massimo di φ vale 1 ed è raggiunto in corrispondenza dei punti P_2 e P_3 .]

(4) La curva γ è l'arco di circonferenza di raggio $r = 1$ e centro nel punto $(0, 1)$ che connette i due punti $(0, 0)$ e $(1, 1)$ in senso orario (cfr. la figura).



Scrivendo la forma differenziale come

$$\omega = f_1(x, y)dx + f_2(x, y)dy,$$

dove $f_1(x, y) = xy^2$ e $f_2(x, y) = x^2y$, si ha

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = 2xy = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y),$$

da cui si evince che la forma differenziale è chiusa. Poiché la forma differenziale è definita in tutto $\mathbb{R}^2$, la forma differenziale è anche esatta e quindi ammette un potenziale $U(x, y)$ tale che

$$f_1(x, y) = \frac{\partial U}{\partial x}(x, y), \quad f_2(x, y) = \frac{\partial U}{\partial y}(x, y).$$

Integrando si trova

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \int dx f_1(x, y) = \int dx y^2 = \frac{1}{2} x^2 y^2 + c_1(y), \\ U(x, y) &= \int dy f_2(x, y) = \int dx^2 y = \frac{1}{2} x^2 y^2 + c_2(x), \end{aligned}$$

così che si può scegliere $c_1(y) = c_2(x) = 0$, in modo da fissare

$$U(x, y) = \frac{1}{2} x^2 y^2.$$

L'integrale della forma differenziale lungo γ è quindi dato da

$$\int_{\gamma} \omega = U(1, 1) - U(0, 0) = \frac{1}{2}$$

[Alternativamente, usando il fatto che ω è esatta, si può scegliere una qualsiasi cammino che connette i due estremi $P_0 = (0, 0)$ e $P_1 = (1, 1)$ della curva γ , per esempio il segmento $\gamma_0(t) = (t, t)$, con $t \in [0, 1]$, e, usando il fatto che $dx = dy = dt$ lungo γ_0 , scrivere

$$\int_{\gamma} \omega = \int_0^1 dt (t t^2 + t t^2) = 2 \int_0^1 dt t^3 = 2 \frac{t^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Infine, l'integrale si può anche calcolare senza cambiare il cammino, notando che parametrizzando la curva come $\gamma(t) = (\cos t, 1 + \sin t)$, con $t \in [0, 3\pi/2]$, così che $dx = -\sin t dt$ e $dy = \cos t$, si trova

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \omega &= - \int_0^{3\pi/2} dt (\cos t (1 + \sin t)^2 (-\sin t) + (1 + \sin t) \cos^2 t \cos t) \\ &= \int_0^{3\pi/2} dt (\sin t \cos t + 3 \sin^2 t \cos t + \sin^3 t \cos t - \cos t - \sin t \cos^3 t) \\ &= \left(\frac{\sin^2 t}{2} + \sin^3 t + \frac{\sin^4 t}{4} - \sin t + \frac{\cos^4 t}{4} \right) \Big|_0^{3\pi/2} = \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{4} + 1 - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

dove il segno $-$ davanti all'integrale nella prima riga è dovuto al fatto che la curva è percorsa in senso orario (quindi in verso opposto a quello della parametrizzazione).]

ESERCIZIO 1. Riscrivendo l'equazione nella forma

$$\frac{y'}{y \log y} = 2x,$$

si procede per separazione di variabili:

$$\int \frac{dy}{y \log y} = \int 2x dx.$$

Il primo integrale si risolve per sostituzione, ponendo $t = \log y$ ($\implies dt = dy/y$), così che

$$\int \frac{dy}{y \log y} = \int \frac{dt}{t} = \log |t| + c_1 = \log |\log y| + c_1,$$

dove c_1 è una costante arbitraria. Il secondo integrale è banale:

$$\int 2x \, dx = x^2 + c_2,$$

dove c_2 è una costante arbitraria. Si trova quindi

$$\log |\log y| = x^2 + c_0,$$

dove $c_0 = c_2 - c_1$ è una costante arbitraria.

Esponenziando entrambi i membri dell'equazione si ottiene

$$|\log y| = e^{x^2 + c_0} = k_0 e^{x^2},$$

dove $k_0 = e^{c_0}$ è una costante positiva arbitraria che va fissata imponendo la condizione iniziale $y(0) = e$, ovvero

$$|\log y(0)| = |\log e| = 1 \implies k_0 e^0 = k_0 = 1 \implies |\log y| = e^{x^2} \implies \log y = \pm e^{x^2}$$

Si elimina infine l'ambiguità di segno tenendo conto che $\log y(0) = \log e = 1 > 0$, così da ottenere

$$\log y(x) = e^{x^2}.$$

Riesponenziando si trova infine

$$y(x) = e^{e^{x^2}}.$$

ESERCIZIO 2. Gli autovalori di A sono le radici del polinomio caratteristico

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbb{1}) = \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 3 & 3 - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 3 - 3 = \lambda^2 - 4\lambda = \lambda(\lambda - 4),$$

quindi sono

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 4.$$

Poiché gli autovalori sono distinti, la matrice A è diagonalizzabile. Se $v_1 = (v_{11}, v_{12})$ indica l'autovettore associato all'autovalore $\lambda_1 = 0$, l'equazione $Av_1 = 0v_1 = 0$ dà

$$v_{11} + v_{12} = 0, \quad 3v_{11} + 3v_{12} = 0 \implies v_{11} = -v_{12} \implies v_1 = (-1, 1).$$

Analogamente, se $v_2 = (v_{21}, v_{22})$ è l'autovettore associato a $\lambda_2 = 4$, l'equazione $Av_2 = 4v_2$ dà

$$v_{21} + v_{22} = 4v_{21}, \quad 3v_{21} + 3v_{22} = 4v_{22} \implies 3v_{21} = v_{22} \implies v_2 = (1, 3).$$

Se definiamo

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \implies Q^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

possiamo scrivere

$$\begin{aligned} e^{Ax} &= Q \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{4x} \end{pmatrix} Q^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{4x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ e^{4x} & e^{4x} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 + e^{4x} & -1 + e^{4x} \\ -3 + 3e^{4x} & 1 + 3e^{4x} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Possiamo riscrivere il sistema di equazioni come due sistemi lineari, il primo dato da

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2, \\ y_2' = 3y_1 + 3y_2, \end{cases}$$

con condizioni iniziali $y_1(0) = 3$, $y_2(0) = 1$, e il secondo dato da

$$y_3' = 2y_1 + 2y_2,$$

con condizione iniziale $y_3(0) = 2$. Il primo sistema dipende solo dalle variabili y_1 e y_2 , quindi si può risolvere ignorando la variabile y_3 . La soluzione è data da

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} &= e^{Ax} \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 + e^{4x} & -1 + e^{4x} \\ -3 + 3e^{4x} & 1 + 3e^{4x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 9 + 3e^{4x} - 1 + e^{4x} \\ -9 + 9e^{4x} + 1 + 3e^{4x} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 8 + 4e^{4x} \\ -8 + 12e^{4x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + e^{4x} \\ -2 + 3e^{4x} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

ovvero

$$y_1(x) = e^{4x} + 2, \quad y_2(x) = 3e^{4x} - 2.$$

Inserendo le espressioni trovate per y_1 e y_2 nella terza equazione si trova

$$y_3' = 2y_1 + 2y_2 = 2(e^{4x} + 2 + 3e^{4x} - 2) = 8e^{4x}$$

con condizione iniziale $y_3(0) = 3$. L'ultima equazione si integra immediatamente e dà

$$y_3(x) = 8 \int dx e^{4x} = 2 \int d(4x) e^{4x} = 2e^{4x} + c_0,$$

dove la costante c_0 si determina imponendo che si abbia

$$y_3(0) = 2 + c_0 = 2 \implies c_0 = 0.$$

In conclusione la soluzione è data da

$$y_1(x) = e^{4x} + 2, \quad y_2(x) = 3e^{4x} - 2, \quad y_3(x) = 2e^{4x}.$$

ESERCIZIO 3. L'equazione omogenea $y'' - 2y' + 5y = 0$ si risolve studiando il polinomio caratteristico associato $P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 5$. Le radici di $P(\lambda)$ sono

$$\lambda = 1 \pm \sqrt{1 - 5} = 1 \pm 2i \implies \lambda_1 = 1 + 2i, \quad \lambda_2 = 1 - 2i.$$

Quindi la soluzione generale dell'equazione omogenea associata è

$$y_0(x) = e^x (c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x),$$

dove c_1 e c_2 sono due costanti arbitrarie.

Nell'equazione non omogenea

$$y'' - 2y' + 5y = e^x (x \cos x + \sin x),$$

il termine noto è della forma

$$e^{\lambda x} (A_n(x) \cos \mu x + B_n(x) \sin \mu x),$$

dove $\lambda = 1$, $\mu = 1$, $n = 1$ e $A_1(x) = x$ e $B_1(x) = 1$ sono polinomi di grado 1. Poiché $\lambda + i\mu = 1 + i \neq 1 \pm 2i$, si cerca la soluzione particolare $\tilde{y}(x)$ dell'equazione non omogenea nella forma

$$\tilde{y}(x) = e^x ((Ax + B) \cos x + (Cx + D) \sin x).$$

Se scriviamo

$$\tilde{y}(x) = e^x Q(x), \quad Q(x) = (Ax + B) \cos x + (Cx + D) \sin x,$$

e teniamo conto che

$$\tilde{y}' = e^x Q(x) + e^x Q'(x),$$

$$\tilde{y}'' = e^x Q(x) + 2e^x Q'(x) + e^x Q''(x),$$

dove

$$Q'(x) = (A + Cx + D) \cos x + (-Ax - B + C) \sin x,$$

$$Q''(x) = (2C - Ax - B) \cos x + (-2A - Cx - D) \sin x,$$

otteniamo

$$\begin{aligned} \tilde{y}'' - 2\tilde{y}' + 5\tilde{y} &= e^x Q(x) + 2e^x Q'(x) + e^x Q''(x) - 2(e^x Q(x) + e^x Q'(x)) + 5e^x Q(x) \\ &= e^x Q(x) + 2e^x Q'(x) + e^x Q''(x) - 2e^x Q(x) - 2e^x Q'(x) + 5e^x Q(x) \\ &= e^x (Q''(x) + 4Q(x)) \\ &= e^x ((2C - Ax - B + 4Ax + 4B) \cos x + (-2A - Cx - D + 4Cx + 4D) \sin x), \end{aligned}$$

così che, imponendo che $\tilde{y}$ risolva l'equazione non omogenea, troviamo

$$\begin{aligned} 2C - Ax - B + 4Ax + 4B &= x, \\ -2A - Cx - D + 4Cx + 4D &= 1. \end{aligned}$$

Uguagliando i coefficienti dei polinomi a destra e a sinistra delle due equazioni, si trova il sistema

$$\begin{cases} 3A = 1, \\ 2C + 3B = 0, \\ 3C = 0, \\ -2A + 3D = 1. \end{cases} \implies \begin{cases} A = 1/3, \\ B = 0, \\ C = 0, \\ D = 1/3 + 2A/3 = 1/3 + 2/9 = 5/9. \end{cases}$$

La soluzione particolare dell'equazione non omogenea è quindi

$$\tilde{y}(x) = e^x \left(\frac{x}{3} \cos x + \frac{5}{9} \sin x \right)$$

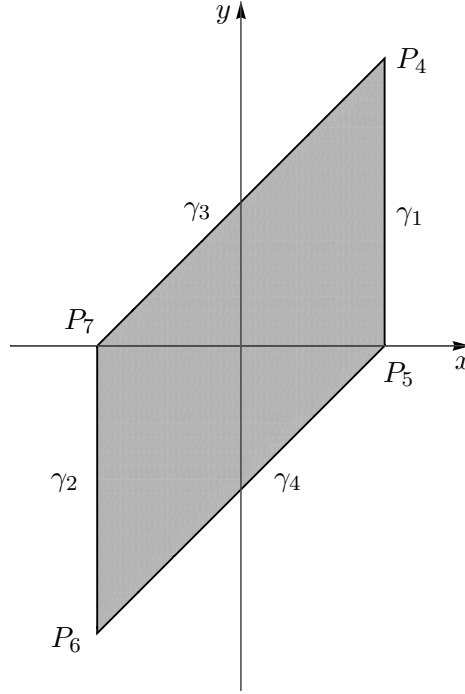
e quindi la soluzione generale dell'equazione è

$$z(t) = e^x \left(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \frac{x}{3} \cos x + \frac{5}{9} \sin x \right).$$

Esercizio 4. La condizione $|x| \leq 1$ definisce la striscia S_1 di semiampiezza 1 intorno all'asse y , mentre la condizione

$$|y - x| \leq 1 \implies -1 \leq y - x \leq 1 \implies x - 1 \leq y \leq x + 1$$

definisce la striscia S_2 compresa tra le due rette $y = x + 1$ e $y = x - 1$. Il dominio Ω è dato dall'intersezione delle due strisce: $\Omega = S_1 \cap S_2$ (cfr. la figura).



Si cercano innanzitutto i punti critici interni di

$$f(x, y) = \frac{x^2 - x + y^2}{1 + 3x^2},$$

ovvero i punti (x, y) all'interno di Ω in cui si annullano le derivate

$$f_x(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{(2x - 1)(1 + 3x^2) - 6x(x^2 - x + y^2)}{(1 + 3x^2)^2},$$

$$f_y(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{2y}{1 + 3x^2}.$$

Si ha $f_y(x, y) = 0$ se e solo se $y = 0$, che, introdotta nella prima equazione, dà

$$\frac{(2x - 1)(1 + 3x^2) - 6x(x^2 - x)}{(1 + 3x^2)^2} = \frac{2x - 1 + 6x^3 - 3x^2 - 6x^3 + 6x^2}{(1 + 3x^2)^2} = \frac{3x^2 + 2x - 1}{(1 + 3x^2)^2},$$

che si annulla se e solo se

$$3x^2 + 2x - 1 = 0 \implies x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 3}}{3} = \frac{-1 \pm 2}{3} \implies x = \frac{1}{3} \text{ oppure } x = -1.$$

Quindi l'unico punto critico interno è $P_0 = (1/3, 0)$, dal momento che $(-1, 0)$ appartiene alla frontiera di Ω . Si ha

$$f(P_0) = f(1/3, 0) = \frac{(1/9) - (1/3)}{1 + (1/3)} = -\frac{1}{6} \approx -0.17.$$

La frontiera $\partial\Omega$ dell'insieme Ω è costituita dai quattro segmenti (cfr. la figura sopra)

$$\begin{aligned}\gamma_1(t) &= \{(1, t) : t \in [0, 1]\}, \\ \gamma_2(t) &= \{(-1, t) : t \in [-1, 0]\}, \\ \gamma_3(t) &= \{(t, t+1) : t \in [-1, 1]\}, \\ \gamma_4(t) &= \{(t, t-1) : t \in [-1, 1]\}.\end{aligned}$$

Lungo γ_1 si ha

$$g_1(t) = f(1, t) = \frac{t^2}{4} \implies g_1'(t) = \frac{t}{2},$$

così che $g_1'(t) = 0$ se e solo se $t = 0$, che è però un estremo dell'intervallo $[0, 1]$.

Lungo γ_2 si ha

$$g_2(t) = f(-1, t) = \frac{2 + t^2}{4} \implies g_2'(t) = \frac{t}{2},$$

così che $g_2'(t) = 0$ se e solo se $t = 1$, che di nuovo è un estremo dell'intervallo $[-1, 1]$.

Lungo γ_3 si ha

$$\begin{aligned}g_3(t) = f(t, t+1) &= \frac{2t^2 + t + 1}{1 + 3t^2} \implies g_3'(t) = \frac{(4t+1)(1+3t^2) - 6t(2t^2+t+1)}{1+3t^2} \\ &= \frac{4t+1+12t^3+3t^2-12t^3-6t^2-6t}{1+3t^2} \\ &= \frac{-3t^2-2t+1}{1+3t^2},\end{aligned}$$

così che $g_3'(t) = 0$ se e solo se

$$3t^2 + 2t - 1 = 0 \implies t = \frac{-1 \pm \sqrt{1+3}}{3} = \frac{-1 \pm 2}{3} \implies t = \frac{1}{3} \text{ oppure } t = -1.$$

Solo il valore $t = 1/3$ è interno all'intervallo $[-1, 1]$ e, tenendo conto che $t+1 = 4/3$ per $t = 1/3$ e ponendo quindi $P_1 = (1/3, 4/3)$, si ha

$$f(P_1) = \frac{(1/9) - (1/3) + (16/9)}{1 + (1/3)} = \frac{7}{6} \approx 1.17.$$

Lungo γ_4 si ha

$$\begin{aligned}g_4(t) = f(t, t-1) &= \frac{2t^2 - 3t + 1}{1 + 3t^2} \implies g_4'(t) = \frac{(4t-3)(1+3t^2) - 6t(2t^2-3t+1)}{1+3t^2} \\ &= \frac{4t-3+12t^3-9t^2-12t^3+18t^2-6t}{1+3t^2} \\ &= \frac{9t^2-2t-3}{1+3t^2},\end{aligned}$$

così che $g'_4(t) = 0$ se e solo se

$$9t^2 - 2t - 3 = 0 \implies t = \frac{1 \pm \sqrt{1+27}}{9} = \frac{1 \pm \sqrt{28}}{9} \implies t = \frac{1+2\sqrt{7}}{9} \text{ oppure } t = \frac{1-2\sqrt{7}}{9}.$$

Entrambi i valori $t_1 = (1+2\sqrt{7})/9 \approx 0.7$ e $t_2 = (1-2\sqrt{7})/9 \approx -0.5$ sono interni all'intervallo $[-1, 1]$. Se definiamo

$$P_2 = (t_1, t_1 - 1), \quad P_3 = (t_2, t_2 - 1),$$

troviamo

$$f(P_2) \approx g_4(0.7) \approx -0.05, \quad f(P_3) \approx g_4(-0.5) \approx 1.7.$$

Infine, in corrispondenza dei punti di intersezione delle quattro curve $\gamma_1, \dots, \gamma_4$, ovvero

$$\begin{aligned} P_4 &= \gamma_1 \cap \gamma_3 = (1, 2), & P_5 &= \gamma_1 \cap \gamma_4 = (1, 0), \\ P_6 &= \gamma_4 \cap \gamma_2 = (-1, -2), & P_7 &= \gamma_2 \cap \gamma_3 = (-1, 0), \end{aligned}$$

si trova

$$f(P_4) = 1, \quad f(P_5) = 0, \quad f(P_6) = \frac{3}{2} = 1.5, \quad f(P_7) = \frac{1}{2} = 0.5.$$

Confrontando i valori trovati e notando che

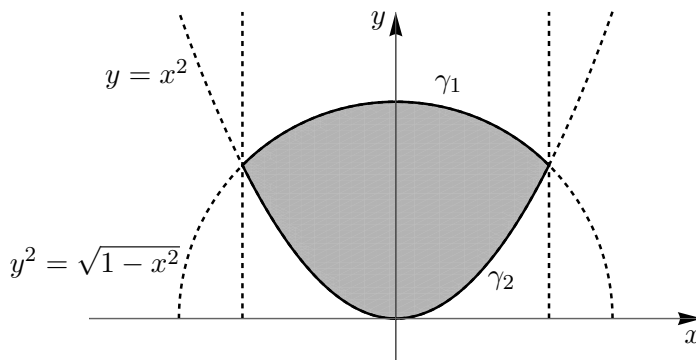
$$\begin{aligned} \max \{-0.17, 1.17, -0.05, 1.7, 1, 0, 1.5, 0.5\} &= 1.7, \\ \min \{-0.17, 1.17, -0.05, 1.7, 1, 0, 1.5, 0.5\} &= -0.17, \end{aligned}$$

concludiamo che il massimo della funzione f è raggiunto in corrispondenza del punto P_3 , mentre il minimo è raggiunto in corrispondenza del punto interno P_0 .

ESERCIZIO 5. Poiché $y \geq 0$, la condizione $y^2 \geq x^4$ equivale a $y \geq x^2$ e implica che il dominio Ω si trova al di sopra della parabola $y = x^2$, mentre la condizione

$$y \leq \sqrt{2-x^2} \implies y^2 \leq 2-x^2 \implies y^2 + x^2 \leq 2$$

implica che Ω è contenuto all'interno del cerchio di raggio $r = \sqrt{2}$ e centro nell'origine. Quindi il dominio Ω è dato dall'insieme compreso tra e due curve γ_1 e γ_2 , date rispettivamente dall'arco di circonferenza $y = \sqrt{2-x^2}$ e dall'arco di parabola $y = x^2$, entrambi definiti per $x \in [-1, 1]$ (cfr. la figura)



Possiamo quindi riscrivere

$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1, 1], x^2 \leq y \leq \sqrt{2-x^2} \right\},$$

così che si trova

$$I = \iint_{\Omega} (yx^2 + y^3x^5) \, dx \, dy = \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} dy (yx^2 + y^3x^5).$$

Riscriviamo $I = I_1 + I_2$, dove

$$I_1 = \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} dy yx^2, \quad I_2 = \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} dy y^3x^5.$$

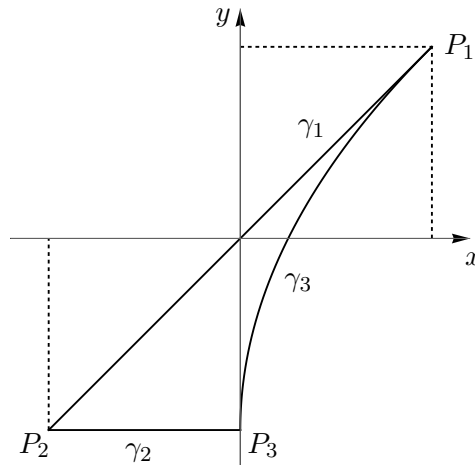
Si trova quindi

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-1}^1 dx x^2 \int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} dy y = \int_{-1}^1 dx x^2 \frac{y^2}{2} \Big|_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} = \int_{-1}^1 dx x^2 \left(\frac{1}{2} ((2-x^2) - x^4) \right) \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dx (2x^2 - x^4 - x^6) = \int_0^1 dx (2x^2 - x^4 - x^6) = \left(\frac{2x^3}{3} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \right) \Big|_0^1 \\ &= \frac{2}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} = \frac{70 - 21 - 15}{105} = \frac{34}{105}, \end{aligned}$$

dove si è usato il fatto che la funzione integranda è pari in x . Si ha invece $I_2 = 0$ dal momento che si tratta di un integrale di una funzione dispari su un intervallo simmetrico rispetto all'origine. Possiamo quindi concludere che

$$\iint_{\Omega} (yx^2 + y^3x^5) \, dx \, dy = I_1 = \frac{34}{105}.$$

ESERCIZIO 6. La curva γ è raffigurata in figura: è una curva regolare chiusa costituita dal segmento γ_1 che connette il punto $P_2 = (-1, -1)$ al punto $P_1 = (1, 1)$, dal segmento γ_2 che connette il punto $P_3 = (0, -1)$ al punto $P_2 = (-1, -1)$ e dall'arco di parabola che connette il punto P_3 al punto P_1 .



Possiamo scrivere

$$\int_{\gamma} f ds = \int_{\gamma_1} f ds + \int_{\gamma_2} f ds + \int_{\gamma_3} f ds.$$

Lungo γ_1 si ha

$$\gamma_1(t) = (x(t), y(t)) = (t, t) \implies \|\gamma_1'(t)\| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

e quindi

$$I_1 = \int_{\gamma_1} f ds = \int_{-1}^1 dt t \sqrt{t+1} \sqrt{2},$$

dove, operando la sostituzione $s = \sqrt{1+t}$ ($\implies s^2 = 1+t \implies 2s ds = dt$), si trova

$$\begin{aligned} \int dt t \sqrt{t+1} &= \int ds 2s(s^2-1)s = 2 \int ds s^4 - 2 \int ds s^2 \\ &= \frac{2}{5} s^5 - \frac{2}{3} s^3 + \text{costante} = \frac{2}{5} (1+t)^{5/2} - \frac{2}{3} (1+t)^{3/2} + \text{costante}, \end{aligned}$$

così che si ottiene

$$I_1 = \sqrt{2} \left(\frac{2}{5} (1+t)^{5/2} - \frac{2}{3} (1+t)^{3/2} \right) \Big|_{-1}^1 = \sqrt{2} \left(\frac{2}{5} 2^{5/2} - \frac{2}{3} 2^{3/2} \right) = 2 \left(\frac{8}{5} - \frac{4}{3} \right) = \frac{8}{15}.$$

Per calcolare l'integrale lungo γ_3 , si ha

$$\gamma_3(t) = (x(t), y(t)) = (t, -1) \implies \|\gamma_3'(t)\| = \sqrt{1} = 1$$

e quindi

$$I_3 = \int_{\gamma_3} f ds = - \int_{-1}^0 dt \sqrt{t+1} = -\frac{2}{3} (t+1)^{3/2} \Big|_{-1}^0 = -\frac{2}{3} (1-0) = -\frac{2}{3}.$$

Infine, lungo γ_2 si ha

$$\gamma_2(t) = (x(t), y(t)) = \left(\frac{(t+1)^2}{4}, t \right) \implies \|\gamma_2'(t)\| = \sqrt{\frac{(t+1)^2}{4} + 1},$$

da cui si ottiene

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\gamma_2} f ds = \int_{-1}^1 dt t \sqrt{\frac{(t+1)^2}{4} + 1} \sqrt{\frac{(t+1)^2}{4} + 1} \\ &= \int_{-1}^1 dt t \left(\frac{(t+1)^2}{4} + 1 \right) = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 dt t (t^2 + 2t + 5) \\ &= \frac{1}{4} \int_{-1}^1 dt (t^3 + 2t^2 + 5t) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dt t^2 = \int_0^1 dt t^2 = \frac{t^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

dove si è tenuto che

$$\int_{-1}^1 dt (t^3 + 5t) = 0$$

per parità.

In conclusione si ha

$$\int_{\gamma} f ds = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{8}{15} - \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{8-10+5}{15} = \frac{3}{15}.$$