

# Analisi Matematica per le Applicazioni – Analisi Matematica II

## CdL in Ingegneria Meccanica – Anno Accademico 2025/2026

Soluzioni della prova scritta del sesto appello (08-09-2026)

---

### ESERCIZIO 0.

(1) La soluzione generale dell'equazione differenziale è della forma

$$y(x) = y_0(x) + \tilde{y}(x),$$

dove  $y_0(x)$  è la soluzione generale dell'equazione omogenea  $y' - y = 0$  e  $\tilde{y}(x)$  è una soluzione particolare dell'equazione non omogenea  $y' - y = x^2$ .

L'equazione omogenea, scritta nella forma  $y' = a(x)y$ , con  $a(x) = 1$ , ha soluzione

$$y_0(x) = ce^{A(x)}, \quad A(x) = \int a(x) dx = x \implies y_0(x) = ce^x,$$

dove  $c$  è una costante arbitraria.

Scrivendo

$$y' - y = x^2 = e^{\lambda x} (A_n(x) \cos \mu x + B_n(x) \sin \mu x),$$

si ottiene

$$\lambda = \mu = 0, \quad n = 2, \quad A_2(x) = x^2, \quad B_2(x) \sin \mu x = 0,$$

così che, dal momento che  $\lambda + i\mu = 0$  non è una soluzione dell'equazione caratteristica  $\lambda - 1 = 0$ , la soluzione particolare  $\tilde{y}(x)$  dell'equazione non omogenea ha la forma di un polinomio di secondo grado, ovvero

$$\tilde{y}(x) = ax^2 + bx + c,$$

Imponendo che  $\tilde{y}(x)$  risolva l'equazione e tendo conto che

$$\tilde{y}'(x) = 2ax + b,$$

si trova

$$\tilde{y}' - \tilde{y} = 2ax + b - ax^2 - bx - c = x^2$$

ovvero

$$-a = 1, \quad 2a - b = 0, \quad b - c = 0 \implies a = -1, \quad b = -2, \quad c = -2,$$

da cui segue che

$$\tilde{y}(x) = -x^2 - 2x - 2$$

In conclusione, la soluzione generale dell'equazione è

$$y(x) = ce^x - x^2 - 2x - 2.$$

[Alternativamente, si cerca subito le soluzione generale dell'equazione non omogenea nella forma

$$y(x) = e^{A(x)} \left( C + \int e^{-A(x)} x^2 dx \right) = e^x \left( C + \int e^{-x} x^2 dx \right), \quad (*)$$

dove  $C$  è una costante arbitraria, e, applicando due volte la formula di integrazione per parti

$$\int g'(x)f(x) dx = g(x)f(x) - \int g(x)f'(x) dx,$$

prima con  $f(x) = x^2$  e  $g'(x) = e^{-x}$  ( $\Rightarrow f'(x) = 2x$  e  $g(x) = -e^{-x}$ ), poi con  $f(x) = x$  e  $g'(x) = e^{-x}$  ( $\Rightarrow f'(x) = 1$  e  $g(x) = -e^{-x}$ ), l'ultimo integrale in (\*) si riscrive

$$\begin{aligned} \int e^{-x}x^2 dx &= -e^x x^2 + 2 \int e^{-x}x dx = -e^x x^2 - 2e^{-x}x + 2 \int e^{-x} dx \\ &= -e^x x^2 - 2e^{-x}x - 2e^{-x} + c_0, \end{aligned}$$

dove  $c_0$  è una costante arbitraria, così che, ponendo  $c = C + c_0$ , si trova

$$y(x) = e^x (c - e^x x^2 - 2e^{-x}x - 2e^{-x}) = e^x c - x^2 - 2x - 2.$$

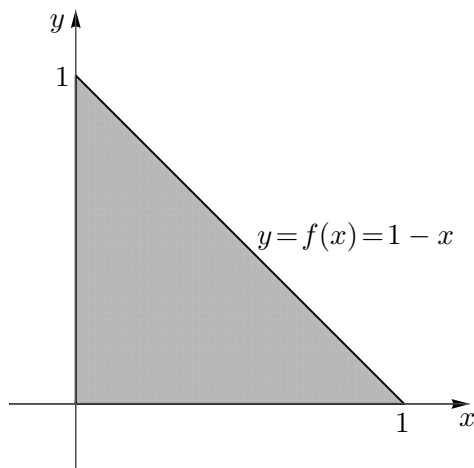
in accordo con la formula precedente.]

(2) Il dominio  $\Omega$  è la regione del piano costituita dai punti  $(x, y)$  nel primo quadrante  $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\}$  tali che

$$0 \leq y \leq f(x) = 1 - x.$$

Per  $x \in [0, 1]$  la funzione  $f(x)$  è decrescente, poiché  $f'(x) = -1 < 0$ , in  $x = 0$  vale  $f(0) = 1$ , in  $x = 1$  vale  $f(1) = 0$ . Il dominio  $\Omega$  è della forma (cfr. la figura)

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq f(x)\}.$$



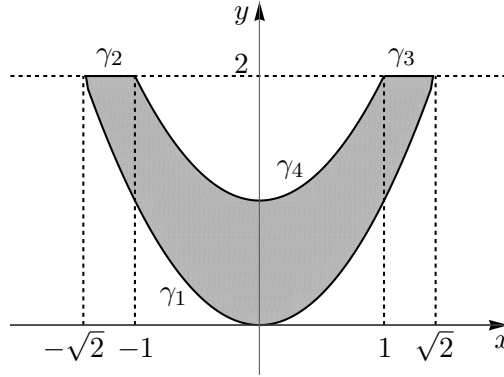
Il dominio  $\Omega$  è normale rispetto all'asse  $x$  (come del resto anche rispetto all'asse  $y$ ), quindi l'integrale doppio si può riscrivere

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} xy dx dy &= \int_0^1 x dx \int_0^{1-x} y dy = \int_0^1 x \frac{y^2}{2} \Big|_0^{1-x} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x(1-x)^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x(1-2x+x^2) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (x-2x^2+x^3) dx = \frac{1}{2} \left( \frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \right) = \frac{6-8+3}{24} = \frac{1}{24}. \end{aligned}$$

(3) La parabola  $y = x^2$  interseca la retta  $y = 2$  in  $x = \pm\sqrt{2}$ . Si ha inoltre

$$\min\{1 + x^2, 2\} = \begin{cases} 1 + x^2, & |x| \leq 1, \\ 2, & |x| > 1, \end{cases}$$

quindi il dominio  $D$  si trova al di sopra della parabola  $y = x^2$  e si trova al di sotto della parabola  $1 + x^2$  per  $x \in [-1, 1]$  e al di sotto della retta  $y = 2$  per  $x \in [-\sqrt{2}, -1] \cup [1, \sqrt{2}]$  (cfr. la figura).



Per trovare i punti critici interni si considerano le derivate parziali

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2x^2y,$$

da cui si vede che le due derivate si annullano entrambe sia per  $x = 0$  sia per  $y = 0$ : quindi tutti i punti lungo il segmento  $\gamma_0$  che unisce l'origine  $P_0 = (0, 0)$  al punto  $P_1 = (0, 2)$ , estremi esclusi, sono punti critici interni (mentre la retta  $y = 0$  non è all'interno del dominio). Dal momento che  $f(x, y) \geq 0$  e  $f(0, y) = 0$ , si può concludere che tutti i punti di  $\gamma_0$  sono punti di minimo per la funzione  $f(x, y)$ .

La frontiera di  $\Omega$  è costituita tra quattro curve, due segmenti e due parabole. Più precisamente si ha

$$\partial\Omega = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4,$$

dove

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}], y = x^2\}, \\ \gamma_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-\sqrt{2}, -1], y = 2\}, \\ \gamma_3 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [1, \sqrt{2}], y = 2\}, \\ \gamma_4 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1, 1], y = 1 + x^2\}. \end{aligned}$$

Lungo la curva  $\gamma_1$  si ha  $g_1(x) = f(x, x^2) = x^6$ , che ha un punto di minimo in  $x = 0$  (dal momento che  $g_1'(x) = 6x^5$  è positiva per  $x > 0$  e negativa per  $x < 0$ ), dove  $g_1(0) = 0$ , e un punto di massimo agli estremi dell'intervallo  $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ , dove  $g_1(\pm\sqrt{2}) = 2^3 = 8$ .

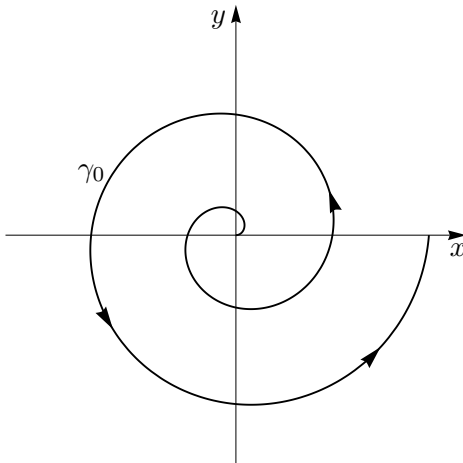
Lungo la curva  $\gamma_2$  si ha  $g_2(x) = f(x, 2) = 2x^2$ , che è decrescente in  $[-\sqrt{2}, -1]$  (dal momento che  $g_2'(x) = 4x < 0$  per  $x < -1 < 0$ ), ha un punto di minimo in  $x = -1$ , dove  $g_2(-1) = 2$ , e un punto di massimo in  $x = -\sqrt{2}$ , dove  $g_2(-\sqrt{2}) = 4$ .

Lungo la curva  $\gamma_3$  si ha  $g_3(x) = g_2(x) = f(x, 2) = 2x^2$ , che è crescente in  $[1, \sqrt{2}]$  (dal momento che  $g'_3(x) = 4x > 0$  per  $x > 1 > 0$ ), ha un punto di minimo in  $x = 1$ , dove  $g_3(1) = 2$ , e un punto di massimo in  $x = \sqrt{2}$ , dove  $g_3(\sqrt{2}) = 4$ .

Lungo la curva  $\gamma_4$  si ha  $g_4(x) = f(x, 1 + x^2) = x^2(1 + x^2)^2 = x^2 + 2x^4 + x^6$ , che ha un punto di minimo in  $x = 0$  (dal momento che  $g'_4(x) = 2x + 8x^3 + 6x^5 = 2x(1 + 4x^2 + 3x^4)$  è positiva per  $x > 0$  e negativa per  $x < 0$ ), dove  $g_4(0) = 0$ , e un punto di massimo agli estremi dell'intervallo  $[-1, 1]$ , dove  $g_4(\pm 1) = 4$ .

In conclusione, la funzione  $f(x, y)$  ha punti di minimo lungo il segmento che unisce i punti  $P_0$  e  $P_1$ , estremi inclusi, e in corrispondenza di tali punti essa assume valore 0, mentre i punti di massimo di  $f(x, y)$  sono i punti  $P_2 = (\sqrt{2}, 2)$  e  $P_3 = (-\sqrt{2}, 2)$ , dove la funzione assume il valore 8. In particolare, in  $\Omega$ , il minimo di  $f(x, y)$  vale  $m = 0$ , mentre il suo massimo vale  $M = 8$ .

(4) La spirale  $\gamma$  è una curva che, mentre ruota intorno all'origine, se ne allontana linearmente. Per  $t$  piccolo si ha  $\gamma(t) = (t + O(t^2), t^2 + O(t^3))$ , quindi la spirale vicino all'origine ha un profilo parabolico a meno di correzioni; inoltre la spirale interseca il semiasse  $y > 0$  per  $t = \pi/2 + 2k\pi$ , con  $k \in \mathbb{N}$ , il semiasse  $y < 0$  per  $t = 3\pi/2 + 2k\pi$ , con  $k \in \mathbb{N}$ , il semiasse  $x > 0$  per  $t = 2\pi + 2k\pi$ , con  $k \in \mathbb{N}$ , e il semiasse  $x < 0$  per  $t = \pi + 2k\pi$ , con  $k \in \mathbb{N}$ . In particolare si ha  $\gamma(0) = (0, 0)$  e  $\gamma(4\pi) = (4\pi, 0)$  (cfr. la figura).



Scrivendo  $\omega = f_1(x, y)dx + f_2(x, y)dy$ , dove  $f_1(x, y) = y^2 - x^2$  e  $f_2(x, y) = 2xy$ , si ha

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = 2y = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y),$$

da cui si evince che la forma differenziale  $\omega$  è chiusa. Poiché le due funzioni  $f_1$  e  $f_2$  sono regolari, la forma  $\omega$  è definita in  $\mathbb{R}^2$ , che è un insieme semplicemente connesso. Quindi la forma differenziale  $\omega$  è esatta e, di conseguenza, il valore dell'integrale non dipende dal cammino  $\gamma_0$  ma solo dai suoi estremi  $P_0 = (0, 0)$  e  $P_1 = (4\pi, 0)$ .

Si calcola facilmente il potenziale  $U(x, y)$  della forma differenziale, richiedendo che

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x, y) = f_1(x, y) = y^2 - x^2, \quad \frac{\partial U}{\partial y}(x, y) = f_2(x, y) = 2xy,$$

Integrando la prima espressione rispetto a  $x$  si trova

$$U(x, y) = xy^2 - \frac{1}{3}x^3 + c_1(y),$$

dove  $c_1(y)$  è una funzione della sola  $y$ , mentre, integrando la seconda rispetto a  $y$ , si trova

$$U(x, y) = xy^2 + c_2(x),$$

dove  $c_2(x)$  è una funzione della sola  $x$ . Le due espressioni trovate per  $U(x, y)$  sono uguali se scegliamo  $c_1(y) = 0$  e  $c_2(x) = -x^3/3$ , così che si ottiene

$$U(x, y) = xy^2 - \frac{1}{3}x^3.$$

Si ha allora

$$\int_{\gamma_0} \omega = U(P_1) - U(P_0) = U(4\pi, 0) - U(0, 0) = -\frac{(4\pi)^3}{3} - 0 = -\frac{64\pi^3}{3}.$$

[Alternativamente, si può scegliere come cammino di integrazione, invece di  $\gamma_0$  il segmento  $\gamma_1$ , parametrizzato da

$$\gamma_1(t) = (x(t), y(t)) = (t, 0), \quad t \in [0, 4\pi],$$

così che

$$\int_{\gamma_0} \omega = \int_0^{4\pi} (f_1(t, 0) + f_2(t, 0) 0) dt = \int_0^{4\pi} (-t^2) dt = -\frac{t^3}{3} \Big|_0^{4\pi} = -\frac{(4\pi)^3}{3} - 0 = -\frac{64\pi^3}{3},$$

dove si è usato che  $dx = 1 dt$  e  $dy = 0 dt$  lungo  $\gamma_1$ .]

ESERCIZIO 1. Riscrivendo l'equazione nella forma

$$\frac{y'}{e^{-y} + 1} = \frac{x^2 + x}{x^2 + 1}$$

si procede per separazione di variabili:

$$\int \frac{dy}{e^{-y} + 1} = \int \frac{x^2 + x}{x^2 + 1} dx. \quad (*)$$

Scrivendo

$$\frac{1}{e^{-y} + 1} = \frac{1}{e^{-y}(1 + e^y)} = \frac{e^y}{1 + e^y}$$

e

$$\frac{x^2 + x}{x^2 + 1} = \frac{x^2 + 1 + x - 1}{x^2 + 1} = \frac{x^2 + 1}{x^2 + 1} + \frac{x - 1}{x^2 + 1} = 1 + \frac{x}{x^2 + 1} - \frac{1}{x^2 + 1} = 1 + \frac{1}{2} \frac{2x}{x^2 + 1} - \frac{1}{x^2 + 1},$$

il primo integrale in  $(*)$  si risolve per sostituzione, ponendo  $t = 1 + e^y$  ( $\implies dt = e^y dy$ ), così che

$$\int \frac{dy}{e^{-y} + 1} = \int \frac{e^y dy}{1 + e^y} = \int \frac{dt}{t} = \log t + c_1 = \log(1 + e^y) + c_1,$$

dove  $c_1$  è una costante arbitraria, mentre il secondo integrale si riscrive

$$\int \frac{x^2 + x}{x^2 + 1} dx = \int dx + \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 + 1} dx - \int \frac{dx}{x^2 + 1},$$

dove il primo e il terzo integrale sono immediati e il secondo si risolve per sostituzione con  $t = 1 + x^2$  ( $\Rightarrow dt = 2x dx$ ), così che si trova

$$\int \frac{x^2 + x}{x^2 + 1} dx = x + \frac{1}{2} \log(x^2 + 1) - \arctan x + c_2,$$

dove  $c_2$  è una costante arbitraria. Si ha quindi

$$\log(1 + e^y) = f(x) = x + \frac{1}{2} \log(x^2 + 1) - \arctan x + c = x + \log \sqrt{x^2 + 1} - \arctan x + c, \quad (**)$$

dove  $c = c_2 - c_1$  è una costante arbitraria, che va fissata imponendo la condizione iniziale. Richiedendo che si abbia  $y = 0$  per  $x = 0$ , si trova

$$\log 2 = f(0) = c.$$

Esponenziando entrambi i membri in  $(**)$  si ottiene

$$\begin{aligned} 1 + e^y &= e^{f(x)} = e^{x + \log \sqrt{x^2 + 1} - \arctan x + \log 2} \\ &= e^{x + \log \sqrt{x^2 + 1} - \arctan x} e^{\log 2} \\ &= e^{x - \arctan x} e^{\log \sqrt{x^2 + 1}} e^{\log 2} = 2e^{x - \arctan x} \sqrt{x^2 + 1} \end{aligned}$$

e quindi

$$e^y = 2e^{x - \arctan x} \sqrt{x^2 + 1} - 1 \Rightarrow y = \log \left( 2e^{x - \arctan x} \sqrt{x^2 + 1} - 1 \right).$$

ESERCIZIO 2. Gli autovalori di  $A$  sono le radici del polinomio caratteristico

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbb{1}) = \det \begin{pmatrix} 5 - \lambda & 4 \\ 4 & 5 - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 10\lambda + 25 - 16 = \lambda^2 - 10\lambda + 9,$$

quindi sono

$$\lambda_1 = 5 + \sqrt{25 - 9} = 5 + \sqrt{16} = 5 + 4 = 9, \quad \lambda_2 = 5 - \sqrt{25 - 9} = 5 - \sqrt{16} = 5 - 4 = 1.$$

Poiché gli autovalori sono distinti, la matrice  $A$  è diagonalizzabile. Se  $v_1 = (v_{11}, v_{12})$  indica l'autovettore associato all'autovalore  $\lambda_1 = 9$ , l'equazione  $Av_1 = 9v_1 = 0$  dà

$$5v_{11} + 4v_{12} = 9v_{11}, \quad -4v_{11} + 4v_{12} = 0 \Rightarrow v_{11} = v_{12} \Rightarrow v_1 = (1, 1).$$

Analogamente, se  $v_2 = (v_{21}, v_{22})$  è l'autovettore associato a  $\lambda_2 = 1$ , l'equazione  $Av_2 = 1v_2$  dà

$$5v_{21} + 4v_{22} = v_{21}, \quad 4v_{21} + 4v_{22} = 0 \Rightarrow v_{21} = -v_{22} \Rightarrow v_2 = (-1, 1).$$

Se definiamo

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Q^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

possiamo scrivere

$$\begin{aligned} B(x) = e^{Ax} &= Q \begin{pmatrix} e^{9x} & 0 \\ 0 & e^x \end{pmatrix} Q^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{9x} & 0 \\ 0 & e^x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{9x} & e^{9x} \\ -e^x & e^x \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{9x} + e^x & e^{9x} - e^x \\ e^{9x} - e^x & e^{9x} + e^x \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

In corrispondenza della condizione iniziale  $\bar{y} = (1, 0)$  si ha

$$y(x) = e^{Ax}\bar{y} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{9x} + e^x & e^{9x} - e^x \\ e^{9x} - e^x & e^{9x} + e^x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \end{pmatrix}.$$

In conclusione la soluzione è data da

$$y_1(x) = \frac{e^{9x} + e^x}{2}\bar{y}_1 + \frac{e^{9x} - e^x}{2}\bar{y}_2, \quad y_2(x) = \frac{e^{9x} - e^x}{2}\bar{y}_1 + \frac{e^{9x} + e^x}{2}\bar{y}_2.$$

[Alternativamente, una volta trovati gli autovalori, si cerca la soluzione  $y(x) = (y_1(x), y_2(x))$  nella forma

$$y_1(x) = Ae^{9x} + Be^x, \quad y_2(x) = Ce^{9x} + De^x,$$

che inserita in  $y' = Ay$ , dà

$$\begin{cases} 9Ae^{9x} + Be^x = 5Ae^{9x} + 5Be^x + 4Ce^{9x} + 4De^x, \\ 9Ce^{9x} + De^x = 4Ae^{9x} + 4Be^x + 5Ce^{9x} + 5De^x, \end{cases}$$

così che, uguagliando i coefficienti delle funzioni  $e^{9x}$  e  $e^x$ , si trova

$$\begin{cases} 9A = 5A + 4C, \\ B = 5B + 4D, \\ 9C = 4A + 5C, \\ D = 4B + 5D, \end{cases} \implies \begin{cases} 4A = 4C, \\ 4B + 4D = 0, \\ 4C = 4A, \\ 4B + 4D = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} C = A, \\ D = -B \end{cases}$$

ovvero

$$y_1(x) = Ae^{9x} + Be^x, \quad y_2(x) = Ae^{9x} - Be^x,$$

Imponendo la condizione iniziale si ha

$$y_1(0) = A + B = \bar{y}_1, \quad y_2(0) = A - B = \bar{y}_2 \implies A = \frac{1}{2}(\bar{y}_1 + \bar{y}_2), \quad B = \frac{1}{2}(\bar{y}_1 - \bar{y}_2),$$

da cui segue che

$$y_1(x) = \frac{e^{9x} + e^x}{2}\bar{y}_1 + \frac{e^{9x} - e^x}{2}\bar{y}_2, \quad y_2(x) = \frac{e^{9x} - e^x}{2}\bar{y}_1 + \frac{e^{9x} + e^x}{2}\bar{y}_2, \quad (*)$$

Infine scrivendo

$$y(x) = B(x)\bar{y}, \quad B(x) = \begin{pmatrix} B_{11}(x) & B_{12}(x) \\ B_{21}(x) & B_{22}(x) \end{pmatrix}, \quad \bar{y} = \begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \end{pmatrix},$$

si trova

$$y_1(x) = B_{11}(x)\bar{y}_1 + B_{12}(x)\bar{y}_2, \quad y_2(x) = B_{21}(x)\bar{y}_1 + B_{22}(x)\bar{y}_2,$$

che, confrontata con (\*), implica

$$B_{11}(x) = \frac{e^{9x} + e^x}{2}, \quad B_{12}(x) = \frac{e^{9x} - e^x}{2}, \quad B_{21}(x) = \frac{e^{9x} - e^x}{2}, \quad B_{22}(x) = \frac{e^{9x} + e^x}{2},$$

in accordo con la formula precedente. ]

---



---

---

**ESERCIZIO 3.** L'equazione omogenea  $y'' + 2y' + 2y = 0$  si risolve studiando il polinomio caratteristico associato  $P(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 2$ . Le radici di  $P(\lambda)$  sono

$$\lambda = -1 \pm \sqrt{1-2} = -1 \pm i \implies \lambda = \lambda_1 = -1 + i, \quad \lambda = \lambda_2 = -1 - i,$$

quindi la soluzione generale dell'equazione omogenea associata è

$$y_0(x) = e^{-x} (c_1 \cos x + c_2 \sin x).$$

dove  $c_1$  e  $c_2$  sono due costanti arbitrarie.

Scrivendo l'equazione non omogenea nella forma

$$y'' + 2y' + 2y = e^{-x} \cos x = e^{\lambda x} (A_n(x) \cos \mu x + B_n(x) \sin \mu x),$$

si ottiene

$$\lambda = -1, \quad \mu = 1, \quad n = 0, \quad A_0(x) = 1, \quad B_0(x) = 0,$$

così che, dal momento che  $\lambda + i\mu = -1 + i$  è una soluzione dell'equazione caratteristica, la soluzione particolare  $\tilde{y}(x)$  dell'equazione non omogenea ha la forma

$$\tilde{y}(x) = x e^{-x} (A \cos x + B \sin x) = e^{-x} P(x), \quad P(x) = xA \cos x + xB \sin x.$$

Tenendo conto che

$$\tilde{y}'(x) = e^{-x} (-P(x) + P'(x)), \quad \tilde{y}''(x) = e^{-x} (P(x) - 2P'(x) + P''(x))$$

dove

$$\begin{aligned} P'(x) &= A \cos x + B \sin x + x(-A \sin x + B \cos x), \\ P''(x) &= -2A \sin x + 2B \cos x + x(-A \cos x - B \sin x), \end{aligned}$$

si ottiene

$$\begin{aligned} \tilde{y}'' + 2\tilde{y}' + 2\tilde{y} &= e^{-x} (P(x) - 2P'(x) + P''(x) - 2P(x) + 2P'(x) + 2P(x)) \\ &= e^{-x} (P(x) + P''(x)) = e^{-x} \cos x, \end{aligned}$$

ovvero

$$xA \cos x + xB \sin x - 2A \sin x + 2B \cos x + x(-A \cos x - B \sin x) = \cos x,$$

che, semplificando, dà

$$-2A \sin x + 2B \cos x = \cos x \implies A = 0, \quad B = \frac{1}{2}.$$

In conclusione, si ha

$$\tilde{y}(x) = \frac{1}{2} x e^{-x} \sin x$$

e, di conseguenza,

$$y(x) = e^{-x} \left( c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{x}{2} \sin x \right).$$

*[Alternativamente, la soluzione particolare dell'equazione non omogenea si trova per variazione delle costanti, nella forma*

$$y'(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x),$$

dove  $y_1(x) = e^{-x} \cos x$  e  $y_2(x) = e^{-x} \sin x$ . Le due funzioni  $c_1$  e  $c_2$  si determinano risolvendo il sistema

$$\begin{cases} c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0, \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' = e^x \log x. \end{cases}$$

Dal momento che si ha

$$y_1'(x) = e^{-x}(-\cos x - \sin x), \quad y_2'(x) = e^{-x}(-\sin x + \cos x),$$

possiamo riscrivere il sistema nella forma

$$\begin{cases} c_1' e^{-x} \cos x + c_2' e^{-x} \sin x = 0, \\ c_1' e^{-x}(-\cos x - \sin x) + c_2' e^{-x}(-\sin x + \cos x) = e^{-x} \cos x, \end{cases}$$

che si semplifica in

$$\begin{cases} c_1' \cos x + c_2' \sin x = 0, \\ -c_1'(\cos x + \sin x) - c_2'(\sin x - \cos x) = \cos x. \end{cases}$$

Introducendo la prima equazione nella seconda e semplificando si ottiene

$$-c_1' \sin x + c_2' \cos x = \cos x \implies -c_1' \tan x + c_2' = 1$$

e, riutilizzando la prima equazione per scrivere  $c_1' = -c_2' \tan x$ , si arriva a

$$c_2' = \frac{1}{1 + \tan^2 x} = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \cos^2 x.$$

Integrando per parti

$$\begin{aligned} \int \cos^2 x \, dx &= \int \cos x (\sin x)' = \sin x \cos x - \int (\cos x)' (\sin x) \, dx \\ &= \sin x \cos x + \int \sin^2 x \, dx = \sin x \cos x + \int (1 - \cos^2 x) \, dx \\ &= \sin x \cos x + x - \int \cos^2 x \, dx \implies \int \cos^2 x \, dx = \frac{x + \sin x \cos x}{2}, \end{aligned}$$

si trova

$$c_2 = \frac{x + \sin x \cos x}{2},$$

dal momento che la costante additiva generata dall'integrazione si può trascurare in quanto se ne tiene conto attraverso la soluzione  $c_2 y_2$  dell'omogenea. Poiché  $c_1' = -c_2' \tan x$ , si ha

$$c_1' = -\frac{\cos^2 x \sin x}{\cos x} = -\sin x \cos x,$$

che si integra mediante la sostituzione  $t = \cos x$  ( $\implies dt = -\sin x \, dx$ ):

$$c_1 = -\int \sin x \cos x \, dx = \int t \, dt = \frac{t^2}{2} = \frac{\cos^2 x}{2},$$

dove al solito si trascura la costante di integrazione. Si ha quindi

$$\begin{aligned}\tilde{y}(x) &= c_1(x)e^x + c_2(x)xe^x = e^{-x} \left( \cos x \left( \frac{\cos^2 x}{2} \right) + \sin x \left( \frac{x + \sin x \cos x}{2} \right) \right) \\ &= \frac{e^{-x}}{2} \left( \cos x (\cos^2 x + \sin^2 x) + x \sin x \right) = \frac{e^{-x}}{2} (\cos x + x \sin x),\end{aligned}$$

e quindi la soluzione generale dell'equazione è

$$y(x) = e^{-x} \left( c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{x}{2} \sin x \right),$$

dal momento che il termine  $e^{-x} \cos x/2$  può essere inglobato in  $c_1 e^{-x} \cos x$ .]

ESERCIZIO 4. Usando coordinate polari

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta,$$

possiamo riscrivere

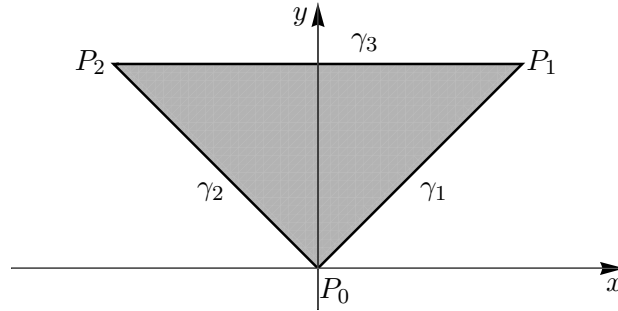
$$f(x, y) = \frac{\rho^4 \cos^4 \theta - \rho^3 \sin^3 \theta}{\rho^2 \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta} = \rho^3 \frac{\rho \cos^2 \theta - \sin^3 \theta}{\rho^2} = \rho(\rho \cos^2 \theta - \sin^3 \theta).$$

Per  $(x, y) \in B_\delta(0, 0)$  si ha

$$|f(x, y)| \leq \delta(\delta + 1).$$

Ne segue che, fissato  $\varepsilon > 0$ , si può individuare  $\delta > 0$  tale che se  $(x, y) \in B_\delta(0, 0)$ , allora  $f(x, y) \in B_\varepsilon(0) \implies$  quindi  $f(x, y)$  è continua in  $(0, 0)$ .

La condizione  $|x| \leq y$  implica che deve essere  $y > 0$  e, per ogni  $y > 0$ , si ha  $-y \leq x \leq y$ : quindi  $(x, y)$  si deve trovare nel cono di ampiezza  $\pi/2$  il cui asse coincide con l'asse  $y$ , mentre la condizione  $y \leq 2$  assicura che il dominio  $D$  è al di sotto della retta  $y = 2$  (cfr. la figura).



Si cercano innanzitutto i punti critici interni di  $f(x, y)$ , ovvero i punti  $(x, y)$  all'interno di  $\Omega$  in cui si annullano le derivate

$$\begin{aligned}f_x(x, y) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{4x^3(x^2 + y^2) - 2x(x^4 - y^3)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2x(x^4 + 2x^2y^2 + y^3)}{(x^2 + y^2)^2}, \\ f_y(x, y) &= \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{-3y^2(x^2 + y^2) - 2y(x^4 - y^3)}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{y(2x^4 + 3x^2y + y^3)}{(x^2 + y^2)^2}.\end{aligned}$$

Poiché  $x^4 + 2x^2y^2 + y^3 > 0$  e  $2x^4 + 3x^2y + y^3 > 0$  per  $x \in \mathbb{R}$  e  $y > 0$ , si ha  $f_y(x, y) = 0$  se e solo se  $x = y = 0$ , che non è tuttavia un punto interno. Quindi non esistono punti critici interni

al dominio e, di conseguenza, i punti di minimo e di massimo di  $f(x, y)$  devono appartenere alla frontiera  $\partial\Omega = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$ , dove

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 2], y = x\}, \\ \gamma_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-2, 0], y = -x\}, \\ \gamma_3 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-2, 2], y = 2\}.\end{aligned}$$

Lungo  $\gamma_1$  si ha

$$g_1(x) = f(x, x) = \frac{x^4 - x^3}{2x^2} = \frac{x^2 - x}{2},$$

così che

$$g'_1(x) = \frac{2x - 1}{2} = x - \frac{1}{2} = 0$$

se e solo se  $x = 1/2$ . A  $x = 1/2$  corrisponde il punto  $P_1 = (1/2, 1/2)$ : si ha  $g_1(1/2) = -1/8$ . Inoltre agli estremi di  $\gamma_1$  si ha

$$g_1(0) = f(0, 0) = 0, \quad g_1(2) = f(2, 2) = 1.$$

Lungo  $\gamma_2$  si ha

$$g_2(x) = f(x, -x) = \frac{x^4 + x^3}{2x^2} = \frac{x^2 + x}{2},$$

così che

$$g'_2(x) = \frac{2x + 1}{2} = x + \frac{1}{2} = 0$$

se e solo se  $x = -1/2$ . A  $x = -1/2$  corrisponde il punto  $P_2 = (-1/2, 1/2)$ : si ha  $g_2(-1/2) = -1/8$ . Inoltre agli estremi di  $\gamma_2$  si ha

$$g_2(0) = f(0, 0) = 0, \quad g_2(-2) = f(-2, 2) = 1.$$

Infine, lungo  $\gamma_3$ , si ha

$$g_3(x) = f(x, 2) = \frac{x^4 - 8}{x^2 + 4},$$

così che

$$g'_3(x) = \frac{4x^3(x^2 + 4) - 2x(x^4 - 8)}{(x^2 + 4)^2} = \frac{4x^5 + 16x^3 - 2x^5 + 16x}{(x^2 + 4)^2} = \frac{2x(x^4 + 8x^2 + 8)}{(x^2 + 4)^2}$$

si annulla se e solo se  $x = 0$ . A  $x = 0$  corrisponde il punto  $(0, 2)$ : si ha  $g_3(0) = -2$ . Inoltre agli estremi di  $\gamma_3$  si ha

$$g_3(-2) = f(-2, 2) = 1, \quad g_3(2) = f(2, 2) = 1.$$

Confrontando i valori trovati e notando che

$$f(0, 0) = 0, \quad f(2, 2) = f(-2, 2) = 1, \quad f(P_1) = f(P_2) = -\frac{1}{8}, \quad f(0, 2) = -2,$$

concludiamo che il massimo  $M = 2$  della funzione è raggiunto in corrispondenza degli spigoli  $(2, 2)$  e  $(-2, 2)$ , mentre il minimo  $m = -2$  è raggiunto in corrispondenza del punto  $(0, 2)$ .

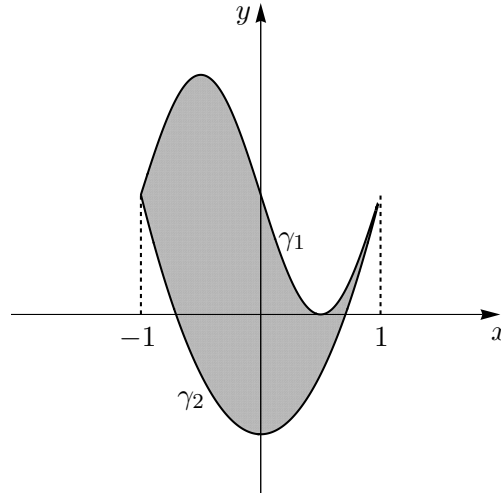
---

---

ESERCIZIO 5. Il dominio  $\Omega$  è costituito dai punti  $(x, y)$  del piano tali che

$$x \in \mathcal{I} = [-1, 1]$$

e, per ogni  $x \in \mathcal{I}$ ,  $y$  si trova al di sopra della parabola  $\gamma_2$  di equazione  $y = x^2$  e al di sotto della curva  $\gamma_1$  data dal grafico della funzione  $f(x) = 1 - \sin \pi x$  (cfr. la figura).



Si ha allora

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} y \, dx \, dy &= \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^{1-\sin \pi x} y \, dy = \int_{-1}^1 dx \left. \frac{y^2}{2} \right|_{2x^2-1}^{1-\sin \pi x} \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1 + \sin^2(\pi x) - 2 \sin(\pi x) - 4x^4 - 1 + 4x^2) \, dx \\ &= \frac{1}{2} \left( \int_{-1}^1 \sin^2(\pi x) \, dx - 2 \int_{-1}^1 \sin(\pi x) \, dx - 4 \int_{-1}^1 x^4 \, dx + 4 \int_{-1}^1 x^2 \, dx \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2\pi} (\pi x - \sin(\pi x) \cos(\pi x)) - \frac{2 \cos(\pi x)}{\pi} - \frac{4x^5}{5} + \frac{4x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^1, \end{aligned}$$

dove si è tenuto conto che, a meno di una costante di integrazione,

$$\begin{aligned} \int \sin^2(\pi x) \, dx &= \frac{1}{\pi} \int \sin^2 t \, dt = \frac{1}{2\pi} (t - \sin t \cos t) = \frac{1}{2\pi} (\pi x - \sin(\pi x) \cos(\pi x)), \\ \int \sin(\pi x) \, dx &= \frac{1}{\pi} \int \sin t \, dt = -\frac{\cos t}{\pi} = -\frac{\cos(\pi x)}{\pi}, \\ \int x^2 \, dx &= \frac{x^3}{3}, \\ \int x^4 \, dx &= \frac{x^5}{5}. \end{aligned}$$

In particolare, per il primo integrale, si è usato che, integrando per parti,

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x \, dx &= \int \sin x (-\cos x)' = -\sin x \cos x + \int (\sin x)' (\cos x) \, dx \\ &= -\sin x \cos x + \int \cos^2 x \, dx = -\sin x \cos x + \int (1 - \cos^2 x) \, dx \\ &= -\sin x \cos x + x - \int \sin^2 x \, dx \quad \Longrightarrow \quad \int \sin^2 x \, dx = \frac{x - \sin x \cos x}{2}.\end{aligned}$$

In conclusione si ha

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega} y \, dx \, dy &= \frac{1}{2} \left( \left( \frac{1}{2\pi} (\pi) - \frac{2 \cos(\pi)}{\pi} - \frac{4}{5} + \frac{4}{3} \right) - \left( -\frac{1}{2\pi} (-\pi) - \frac{2 \cos(\pi)}{\pi} - \frac{4}{5} + \frac{4}{3} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{8}{5} + \frac{8}{3} \right) = \frac{15 - 24 + 40}{30} = \frac{31}{30}.\end{aligned}$$

**ESERCIZIO 6.** L'insieme  $\Omega_1$  è il cerchio di raggio  $R = 2$  e centro in  $C_1 = (1, -1)$ , mentre l'insieme  $\Omega_2$  è il cerchio di raggio  $R = 2$  e centro in  $C_2 = (-1, 1)$ . Le circonferenze  $\gamma_1 = \partial\Omega_1$  e  $\gamma_2 = \partial\Omega_2$ , che costituiscono le frontiere dei due cerchi, si intersecano nei punti  $(x, y)$  tali che

$$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = (x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 4.$$

Sviluppando i quadrati si ha

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 = x^2 + 2x + 1 + y^2 - 2y + 1,$$

che, dopo aver semplificato, si riduce a

$$-2x + 2y = 2x - 2y \quad \Longrightarrow \quad 4x = 4y \quad \Longrightarrow \quad x = y.$$

Quindi le due circonferenze si intersecano in corrispondenza della bisettrice  $y = x$  del primo e terzo quadrante. I punti di intersezione si determinano imponendo che si abbia

$$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 4, \quad y = x,$$

ovvero

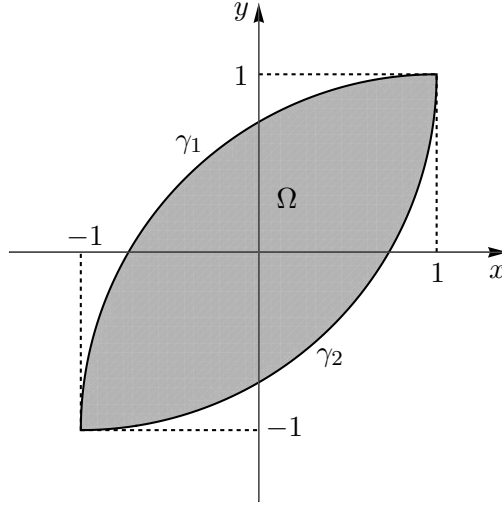
$$(x - 1)^2 + (x + 1)^2 = 4 \quad \Longrightarrow \quad x^2 - 2x + 1 + x^2 + 2x + 1 = 4 \quad \Longrightarrow \quad 2x^2 + 2 = 4 \quad \Longrightarrow \quad x^2 = 1,$$

da cui si ricavano i valori  $x = \pm 1$ , che corrispondono ai punti  $P_1 = (1, 1)$  e  $P_2 = (-1, 1)$ .

L'intersezione tra i due cerchi è quindi costituito dall'insieme

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, g_2(x) \leq y \leq g_1(x)\},$$

dove  $(x, g_1(x))$  è l'arco della circonferenza  $\gamma_1$  che si ottiene al variare di  $x \in [-1, 1]$  e  $(x, g_2(x))$  è l'arco della circonferenza  $\gamma_2$  che si ottiene al variare di  $x \in [-1, 1]$  (cfr. la figura).



Le curve  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  si possono parametrizzare nella forma

$$\begin{aligned}\gamma_1(t) &= \{1 + 2 \cos t, -1 + \sin t\}, & t \in [\pi/2, \pi], \\ \gamma_2(t) &= \{-1 + 2 \cos t, 1 + \sin t\}, & t \in [3\pi/2, 2\pi],\end{aligned}$$

così che  $\|\gamma_1'(t)\| = \|\gamma_2'(t)\| = 2$ .

Possiamo quindi scrivere

$$\int_{\gamma} f ds = \int_{\gamma_1} f ds + \int_{\gamma_2} f ds,$$

dove

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_1} f ds &= 2 \int_{\pi/2}^{\pi} (1 + 2 \cos t)(-1 + \sin t) dt \\ &= 2 \int_{\pi/2}^{\pi} (-1 - 2 \cos t + 2 \sin t + 4 \sin t \cos t) dt \\ &= 2 \left( -t - 2 \sin t - 2 \cos t + 2 \sin^2 t \right) \Big|_{\pi/2}^{\pi} \\ &= 2 \left( (-\pi + 0 + 2 + 0) - \left( -\frac{\pi}{2} - 2 + 0 + 2 \right) \right) = 2 \left( 2 - \frac{\pi}{2} \right) = 4 - \pi, \\ \int_{\gamma_2} f ds &= 2 \int_{3\pi/2}^{2\pi} (-1 + 2 \cos t)(1 + \sin t) dt \\ &= 2 \int_{3\pi/2}^{2\pi} (-1 + 2 \cos t - 2 \sin t + 4 \sin t \cos t) dt \\ &= 2 \left( -t + 2 \sin t + 2 \cos t + 2 \sin^2 t \right) \Big|_{3\pi/2}^{2\pi} \\ &= 2 \left( (-2\pi + 0 + 2 + 0) - \left( -\frac{3\pi}{2} - 2 + 0 + 2 \right) \right) = 2 \left( 2 - \frac{\pi}{2} \right) = 4 - \pi.\end{aligned}$$

In conclusione si ha

$$\int_{\gamma} f ds = \int_{\gamma_1} f ds + \int_{\gamma_2} f ds = 8 - 2\pi.$$