

Analisi Matematica per le Applicazioni - Analisi Matematica II

CdL in Ingegneria Meccanica – Anno Accademico 2025/2026

Prova scritta - Sesto appello (08-09-2026)

ESERCIZIO 0. [4*]

1. Si determini la soluzione generale dell'equazione differenziale del primo ordine $y' - y = x^2$.
2. Si disegni il dominio $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x, 0 \leq y \leq 1 - x\}$ e si calcoli l'integrale doppio $\iint_{\Omega} xy \, dx dy$.
3. Si disegni il dominio $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq \min\{1 + x^2, 2\}\}$ e si determinino massimi e di minimi in D della funzione $f(x, y) = x^2 y^2$.
4. Sia γ_0 l'arco di spirale $\gamma(t) = (t \cos t, t \sin t)$, $t \geq 0$, che collega l'origine $P_0 = \gamma(0)$ al punto $P = \gamma(4\pi)$. Si disegni la curva γ_0 e si calcoli l'integrale curvilineo di seconda specie

$$\int_{\gamma_0} \omega, \quad \omega = (y^2 - x^2) dx + 2xy dy.$$

ESERCIZIO 1. [6] Si risolva il problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = \frac{(e^{-y} + 1)(x^2 + x)}{x^2 + 1}, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

ESERCIZIO 2. [6] Si consideri il sistema di equazioni differenziali lineari in $\mathbb{R}^2$

$$y' = Ay, \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

(2.1) Si trovi la soluzione $y(x)$ con condizioni iniziali arbitrarie $\bar{y} = (\bar{y}_1, \bar{y}_2) \in \mathbb{R}^2$.

(2.2) Si determini la matrice $B(x) = e^{Ax}$ tale che $y(x) = B(x)\bar{y}$.

ESERCIZIO 3. [6] Si determini la soluzione generale dell'equazione $y'' + 2y' + 2y = e^{-x} \cos x$.

ESERCIZIO 4. [6] Si consideri la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 - y^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

(4.1) Si dimostri che la funzione $f(x, y)$ è continua in $(0, 0)$.

(4.3) Si disegni l'insieme $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq y \leq 2\}$.

(4.2) Si determinino massimi e minimi della funzione $f(x, y)$ nel dominio D .

ESERCIZIO 5. [6] Si disegni il dominio $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, 2x^2 - 1 \leq y \leq 1 - \sin(\pi x)\}$ e si calcoli l'integrale doppio

$$\iint_{\Omega} y \, dx dy.$$

ESERCIZIO 6. [6] Si consideri l'insieme $\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2$, dove

$$\Omega_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 1)^2 + (y + 1)^2 \leq 4\}, \quad \Omega_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x + 1)^2 + (y - 1)^2 \leq 4\}.$$

(6.1) Si disegnino l'insieme Ω e la curva $\gamma = \partial\Omega$.

(6.2) Si calcoli l'integrale di prima specie $\int_{\gamma} xy \, ds$.