Esercizi - seconda settimana (29 settembre - 3 ottobre 2025)
Corso di Analisi 1 per Ingegneria Biomedica

1. Si considerino le seguenti funzioni:

- $f(x) = e^{x^2+x}$
- $f(x) = \frac{1}{\ln(x+1)}$
- $f(x) = |\sin(x - \frac{\pi}{3})|$

Per ognuna di esse:

1. riscrivere f come composizione di due o tre funzioni elementari (esponenziali, logaritmi, polinomi, potenze, modulo, funzioni trigonometriche elementari, ...)
2. identificare il dominio e il codominio (scelto come immagine del dominio sotto l'azione di f)
3. usando l'interpretazione di f come funzione composta, disegnarne il grafico qualitativo
4. identificarne una restrizione a un intervallo (finito o infinito) che sia strettamente monotona, e quindi invertibile
5. scrivere analiticamente l'espressione della funzione inversa, specificandone dominio e codominio
6. disegnare qualitativamente il grafico della funzione inversa

2. Determinare estremo superiore ed inferiore (eventualmente massimo e minimo) dei seguenti insiemi

- $\{(-1)^n n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$
- $\{\frac{n-3}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup (-1, 1)$
- $\{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 2\}$
- $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 2\}$
- $\{\frac{x+1}{x-2} : x \in \mathbb{R}, x > 2\}$
- $\{|x| : x \in \mathbb{R}, x^2 + x < 2\}$

3. Dimostrare le seguenti uguaglianze per ogni $n \in \mathbb{N}$

- $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$
- $1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $1 + 2^3 + 3^3 + \ldots n^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2$

4. Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ il numero $n + n^2$ è pari.

5. Per $n \in \mathbb{N}$ si definisca $n!!$ come

$$0!! = 1 \qquad 1!! = 1 \qquad (n+2)!! = n!!(n+2)$$

Dimostrare che $(2n)!! = n!2^n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$