Corso di Analisi 1 per Ingegneria Biomedica

Primo esonero, 7 novembre 2025

Regolamento: l'esercizio 0 è di sbarramento: dovete rispondere correttamente ad almeno 2 domande su 3, altrimenti il compito verrà considerato automaticamente insufficiente e non proseguiremo nella correzione. Avrete 2 ore a disposizione. Non potrete avere a disposizione né calcolatrice né nessun tipo di dispositivo elettronico. Se qualcuno verrà trovato con un dispositivo elettronico in tasca, sul banco etc, anche se inutilizzato, gli/le verrà annullato il compito. Potrete avere con voi un formulario preparato da voi con l'elenco dei risultati che possono servirvi per questa prima parte di corso: criteri di convergenza/divergenza, enunciati di teoremi, definizioni, elenco dei limiti notevoli, etc. Non c'è un vincolo di pagine al formulario, ma non potete inserire esercizi già svolti.

Nome e Cognome: _____

Matricola: _____

Esercizio	Punteggio totale	Punteggio ricevuto
0	3	
1	5	
2	5	
3	5	
4	5 + 2	
5	5	
6	5 + 2	
Totale	37	

0. Esercizo di sbarramento

- A quale numero intero è uguale l'espressione $2^7 \cdot 8^{-2} - \log_{10} \frac{1}{100}$?
- Si determini il dominio di definizione D della funzione $f(x) = \sqrt{1 - e^{1-x^2}}$
- Si calcoli $\lim_{x\to\infty} f(x)$, per la f del punto precedente.

1. Si consideri ancora la funzione $f(x) = \sqrt{1 - e^{1-x^2}}$ dell'esercizio precedente.

- Si determini l'immagine I del dominio D di f.
- Si stabilisca se $f : D \to I$ è invertibile; se sì, se ne calcoli l'inversa $f^{-1} : I \to D$; se no, si determini $D' \subset D$ tale che la restrizione di f a D' sia invertibile, e si calcoli l'inversa di tale restrizione.

2. Si stabilisca quale delle due seguenti affermazioni è corretta:

$$(1)\ \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2, \quad \forall n \geq 1,$$
$$(2)\ \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{2}n^3(n+1), \quad \forall n \geq 1,$$

e la si dimostri per induzione.

3. Si stabilisca qual è il carattere della serie

$$\sum_{n\geq 1} \frac{2^{n-1}3^{n+2}}{n!}$$

dimostrando se è convergente, divergente o indeterminata.

4. Calcolare uno dei seguenti limiti di successione:

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(e^{(n+1)/n^2} - e^{-1/n}\right), \qquad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4n+3}{4n}\right)^{5n}$$

[**Facoltativo.** Calcolare l'altro limite.]

5. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita come:

$$f(x) = \begin{cases} b^2 + 2x\ln(1+x^2) + 1 & \text{se } x \leq 0, \\ \frac{\sin(2bx)}{x+a^2} & \text{se } x > 0, \end{cases}$$

dove $a, b \in \mathbb{R}$.

- In generale, per valori qualsiasi di a e b, qual è il più grande sottoinsieme di $\mathbb{R}$ su cui f è continua? Qual è quindi l'insieme dei punti di discontinuità, e che tipo di discontinuità ha f su tale insieme?
- Si determinino i valori di a e b per cui f è continua su tutto $\mathbb{R}$

6. Dimostrare che l'equazione

$$x^3 \sin\left(\tfrac{\pi}{2}x\right) = 4$$

ammette almeno una soluzione $x_0 \in \mathbb{R}$. [**Facoltativo.** Mostrare che in effetti le soluzioni sono infinite.]