Corso di Analisi 1 per Ingegneria Biomedica

Primo esonero, 7 novembre 2025

Regolamento: l'esercizio 0 è di sbarramento: dovete rispondere correttamente ad almeno 2 domande su 3, altrimenti il compito verrà considerato automaticamente insufficiente e non proseguiremo nella correzione. Avrete 2 ore a disposizione. Non potrete avere a disposizione né calcolatrice né nessun tipo di dispositivo elettronico. Se qualcuno verrà trovato con un dispositivo elettronico in tasca, sul banco etc, anche se inutilizzato, gli/le verrà annullato il compito. Potrete avere con voi un formulario preparato da voi con l'elenco dei risultati che possono servirvi per questa prima parte di corso: criteri di convergenza/divergenza, enunciati di teoremi, definizioni, elenco dei limiti notevoli, etc. Non c'è un vincolo di pagine al formulario, ma non potete inserire esercizi già svolti.

Nome e Cognome: _____

Matricola: _____

Esercizio	Punteggio totale	Punteggio ricevuto
0	3	
1	5	
2	5	
3	5	
4	5 + 2	
5	5	
6	5 + 2	
Totale	37	

0. Esercizo di sbarramento

- A quale numero intero è uguale l'espressione $4^4 \cdot 2^{-5} - \log_3 27$?
- Si determini il dominio di definizione D della funzione $f(x) = \ln(x^4 - 1)$
- Si calcoli $\lim_{x\to\infty} f(x)$, per la f del punto precedente.

1. Si consideri ancora la funzione $f(x) = \ln(x^4 - 1)$ dell'esercizio precedente.

- Si determini l'immagine I del dominio D di f.
- Si stabilisca se $f : D \to I$ è invertibile; se sì, se ne calcoli l'inversa $f^{-1} : I \to D$; se no, si determini $D' \subset D$ tale che la restrizione di f a D' sia invertibile, e si calcoli l'inversa di tale restrizione.

2. Si stabilisca quale delle due seguenti affermazioni è corretta:

$$(1)\ \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}, \quad \forall n \geq 1,$$
$$(2)\ \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{n-1}{2^{n-1}}, \quad \forall n \geq 1,$$

e la si dimostri per induzione.

3. Si stabilisca qual è il carattere della serie

$$\sum_{n\geq 1} \frac{n^n}{n^n + n!}$$

dimostrando se è convergente, divergente o indeterminata.

4. Calcolare uno dei seguenti limiti di successione:

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(e^{n/(n^2+1)} - e^{-2/n}\right), \qquad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n-5}{2n}\right)^{3n-1}$$

[**Facoltativo.** Calcolare l'altro limite.]

5. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita come:

$$f(x) = \begin{cases} e^{a-\sqrt{-x}} & \text{se } x \leq 0, \\ \frac{\ln(b^2+x)}{x+b^2x^2} & \text{se } x > 0, \end{cases}$$

dove $a, b \in \mathbb{R}$.

- In generale, per valori qualsiasi di a e b, qual è il più grande sottoinsieme di $\mathbb{R}$ su cui f è continua? Qual è quindi l'insieme dei punti di discontinuità, e che tipo di discontinuità ha f su tale insieme?
- Si determinino i valori di a e b per cui f è continua su tutto $\mathbb{R}$

6. Dimostrare che l'equazione

$$\ln x = e^{-x}$$

ammette almeno una soluzione $x_0 \in (0, +\infty)$. [**Facoltativo.** Mostrare che la soluzione è unica.]