Esercizi - terza settimana (6 - 10 ottobre 2025)
Corso di Analisi 1 per Ingegneria Biomedica

1. Siano $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni tali che:

- $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$
- $|b_n| < 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Dimostrare o confutare le seguenti affermazioni:

1. Esiste $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n)$.
2. Esiste N tale che $2a_b - b_n > 0$ per ogni $n > N$.
3. Esiste N tale che $a_n + b_n > 0$ per ogni $n > N$.
4. Esiste K tale che $Ka_n + b_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

2. Calcolare i seguenti limiti

- $\lim_{n\to+\infty} n((n+2)^{1/3} - n^{1/3})$
- $\lim_{n\to+\infty}(\frac{n}{n-1})^{n/(n+1)}$
- $\lim_{n\to+\infty}(2^n + 3^n)^{1/n}$
- $\lim_{n\to+\infty}(1 - 1/n^2)^{1/n}$
- $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2+2}{n} - \sqrt{n^2+4}\right)$
- $\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}$

3. Mostrare che la successione definita da

$$a_1 = 2, \qquad a_{n+1} = \frac{1}{3 - a_n}$$

soddisfa $0 < a_n \leq 2$ ed è decrescente. Calcolare inoltre il limite di a_n.

4. Usando la definizione di limite dimostrare le seguenti affermazioni

- $\lim_{n\to+\infty}\frac{5n+2}{2n-1} = 5/2$
- $\lim_{n\to+\infty}(2^n - n) = +\infty$
- $\lim_{n\to+\infty}(n + 1/n) = +\infty$
- $\lim_{n\to+\infty} n\cos(n\pi)$ non esiste
- $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$