LIMITI DI SUCCESSIONI 2.

1. Calcolare i seguenti limiti:
   (a) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{2n^3 - n + 12}{2n + 5}$.
   (b) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n^3} + 3n^2 - 2n + 2}{2\sqrt{n} + 5n^3}$.
   (c) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1} + n}$.
   (d) $\lim_{n\to+\infty} n[\sqrt{n^2+1} - n]$.
   (e) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}[\sqrt{n+1} - n]$.
   (f) $\lim_{n\to+\infty} n^4 - n^2\sqrt{n^4 - 9}$.

2. Calcolare i seguenti limiti:
   (a) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{2^n + 1}{3^n - 5^n}$.
   (b) $\lim_{n\to+\infty} (-1)^n \dfrac{n}{n^2+5}$.
   (c) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{(n+3)! - n!}{n^2(n+1)!}$, (Si ricorda che $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-2)(n-1)n$ è il *fattoriale* di n).
   (d) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\operatorname{sen}(n^2)}{\sqrt{n^2+1}}$.
   (e) $\lim_{n\to+\infty} 3^n + 4^n - 5^n$.

3. Calcolare i seguenti limiti
   (a) $\lim_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n^2 - 3n + 1}{n^2 + 5}\right)^n = \dfrac{1}{e^3}$
   (b) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n^2 + 2n + 3}{3n + 1} \operatorname{sen} \dfrac{2n + 1}{n^2 + 3n - 1} = \dfrac{2}{3}$.
   (c) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{e^{n+\log n} + n^{\frac{1}{n}}}{e^{n+1} + n^2} \left(\sqrt{n^2+1} - n\right) = \dfrac{1}{2e}$.
   (d) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{(2n)^n - n^{(2n)}}{(n-1)^{2n} + (n+2)!} = -e^2$.

(e) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{(n+1)^{n+1}+(n+1)!}{3-n^n} sen\dfrac{1}{n} = -e$

(f) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{(n+1)!-n!}{(n-1)!+3^{n-1}} \left(1-\cos\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{2}.$

4. Calcolare i seguenti limiti

   (a) Calcolare il limite della successione

   $$a_n = \frac{\sqrt{n^3-2n^2+1}-\sqrt{n^3+n}}{n^\alpha}$$

   al variare di α

   (b) Calcolare il limite della successione

   $$a_n = \frac{\sqrt{n^2+n^{\frac{3}{2}}}-\sqrt{n^2-2}}{n^\alpha+\sqrt{n}}$$

   al variare di α

   (c) Stabilire per quali valori di α la successione

   $$a_n = \frac{\left(n^2-n\right)^\alpha}{1+n^3}$$

   è infinitesima.

1. Calcolare i seguenti limiti:

   (a) Mettendo in evidenza i termini di grado massimo, sia al numeratore che al denominatore, si ha:

   $$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n^3 - n + 12}{2n + 5} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3(2 - \frac{1}{n^2} + \frac{12}{n^3})}{n(2 + \frac{5}{n})} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2(2 - \frac{1}{n^2} + \frac{12}{n^3})}{(2 + \frac{5}{n})} = +\infty.$$

   (b) Mettendo in evidenza i termini di grado massimo, sia al numeratore che al denominatore, si ha:

   $$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n^3} + 3n^2 - 2n + 2}{2\sqrt{n} + 5n^3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2(\frac{\sqrt{n^3}}{n^2} + 3 - \frac{2}{n} + \frac{2}{n^2})}{n^3(\frac{2\sqrt{n}}{n^3} + 5)} =$$

   $$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}} + 3 - \frac{2}{n} + \frac{2}{n^2}}{n(\frac{2}{n^2\sqrt{n}} + 5)} = 0.$$

   (c) Mettendo in evidenza i termini di grado massimo, sia al numeratore che al denominatore, si ha:

   $$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1} + n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n(\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + 1)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + 1} = \frac{1}{2}.$$

   (d) Razionalizzando si ha:

   $$\lim_{n\to+\infty} n[\sqrt{n^2+1} - n] = \lim_{n\to+\infty} \frac{n[\sqrt{n^2+1} - n][\sqrt{n^2+1} + n]}{\sqrt{n^2+1} + n} =$$

   $$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n[n^2 + 1 - n^2]}{\sqrt{n^2+1} + n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1} + n} = \frac{1}{2}.$$

   (e) Razionalizzando si ha:

   $$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}[\sqrt{n+1} - n] = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}[\sqrt{n+1} - n][\sqrt{n+1} + n]}{\sqrt{n+1} + n} =$$

   $$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}[n + 1 - n^2]}{\sqrt{n+1} + n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2\sqrt{n}[\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} - 1]}{n(\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + 1)} = -\infty.$$

   (f) Razionalizzando si ha:

   $$\lim_{n\to+\infty} n^4 - n^2\sqrt{n^4 - 9} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n^4 - n^2\sqrt{n^4 - 9})(n^4 + n^2\sqrt{n^4 - 9})}{n^4 + n^2\sqrt{n^4 - 9}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^8 - n^4(n^4-9)}{n^4 + n^2\sqrt{n^4-9}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^8 - n^8 + 9n^4}{n^4(1+\sqrt{1-\frac{9}{n^4}})} = \frac{9}{2}.$$

2. Calcolare i seguenti limiti:

   (a) Mettendo in evidenza i termini di grado massimo, sia al numeratore che al denominatore, si ha:

   $$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n+1}{3^n-5^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^n(1+\frac{1}{2^n})}{5^n(\frac{3^n}{5^n}-1)} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n \frac{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\frac{3}{5}\right)^n - 1} = 0.$$

   (b) $\lim_{n\to+\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+5} = \lim_{n\to+\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2(1+\frac{5}{n^2})} = \lim_{n\to+\infty} (-1)^n \frac{1}{n(1+\frac{5}{n^2})} = 0,$
   perché la successione $(-1)^n$ è limitata e $\dfrac{1}{n(1+\frac{5}{n^2})}$ è infinitesima.

   (c) Scrivendo esplicitamente i fattoriali (si ricorda che il *fattoriale* di n è $n! = 1\cdot 2\cdot 3\ldots(n-2)(n-1)n$), si ha:

   $$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+3)!-n!}{n^2(n+1)!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+3)(n+2)(n+1)n! - n!}{n^2(n+1)n!} =$$

   $$= \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+3)(n+2)(n+1)-1}{n^2(n+1)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3}{n^3} = 1.$$

   (d) $\lim_{n\to+\infty} \frac{\operatorname{sen}(n^2)}{\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n\to+\infty} \operatorname{sen}(n^2) \frac{1}{n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = 0,$
   perché la successione $\operatorname{sen}(n^2)$ è limitata (compresa tra -1 e 1) e $\dfrac{1}{n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}$ è infinitesima.

   (e) $\lim_{n\to+\infty} 3^n + 4^n - 5^n = \lim_{n\to+\infty} 5^n \left(\frac{3^n}{5^n} + \frac{4^n}{5^n} - 1\right) = \lim_{n\to+\infty} 5^n \left(\left(\frac{3}{5}\right)^n + \left(\frac{4}{5}\right)^n - 1\right) = -\infty.$

3. Calcolare i seguenti limiti:

   (a) $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n^2-3n+1}{n^2+5}\right)^n = \frac{1}{e^3}$
   Infatti

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2-3n+1}{n^2+5}\right)^n=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{n^2-3n+1}{n^2+5}-1\right)^n=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{-3n-4}{n^2+5}\right)^n$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{-3n-4}{n^2+5}\right)^{\frac{n^2+5}{-3n-4}}\right]^{\frac{n(-3n-4)}{n^2+5}}$$

infatti per un limite fondamentale

$$\left(1+\frac{-3n-4}{n^2+5}\right)^{\frac{n^2+5}{-3n-4}}\longrightarrow e$$

e

$$\frac{n(-3n-4)}{n^2+5}\longrightarrow -3$$

(b) $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+2n+3}{3n+1}\operatorname{sen}\frac{2n+1}{n^2+3n-1}=\frac{2}{3}.$

Infatti

$$\frac{n^2+2n+3}{3n+1}\sim\frac{n^2}{3n}=\frac{n}{3}$$

$$\operatorname{sen}\frac{2n+1}{n^2+3n-1}\sim\frac{2n+1}{n^2+3n-1}\sim\frac{2n}{n^2}=\frac{2}{n}=e^{-3}$$

(c) $\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{n+\log n}+n^{\frac{1}{n}}}{e^{n+1}+n^2}\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)=\frac{1}{2e}.$

Infatti

$$\sqrt{n^2+1}-n=\frac{n^2+1-n^2}{\sqrt{n^2+1}+n}=\frac{1}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1\right)}\sim\frac{1}{2n}$$

$$\frac{e^{n+\log n}+n^{\frac{1}{n}}}{e^{n+1}+n^2}=\frac{ne^n}{e^{n+1}}\frac{1+\frac{\sqrt[n]{n}}{ne^n}}{1+\frac{n^2}{e^{n+1}}}\sim\frac{n}{e}$$

allora

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{n+\log n}+n^{\frac{1}{n}}}{e^{n+1}+n^2}\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2n}\frac{n}{e}=\frac{1}{2e}.$$

(d) $\lim_{n\to+\infty}\frac{(2n)^n-n^{2n}}{(n-1)^{2n}+(n+2)!}=-e^2.$

Infatti

$$\frac{(2n)^n-n^{2n}}{(n-1)^{2n}+(n+2)!}=-\frac{n^{2n}}{(n-1)^{2n}}\frac{1-\frac{(2n)^n}{n^{2n}}}{1+\frac{(n+2)!}{(n-1)^{2n}}}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(2n)^n}{n^{2n}}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n}{n^2}\right)^n=0\quad\text{e}\quad\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+2)!}{(n-1)^{2n}}=0$$

per il confronto tra infiniti e quindi

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(2n)^n-n^{2n}}{(n-1)^{2n}+(n+2)!}=-\lim_{n\to+\infty}\frac{n^{2n}}{(n-1)^{2n}}$$

$$=-\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{2n}=-\lim_{n\to+\infty}\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right]^{-2}=-e^2$$

(e) $\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^{n+1}+(n+1)!}{3-n^n}\operatorname{sen}\frac{1}{n}=-e$

Infatti

$$\frac{(n+1)^{n+1}+(n+1)!}{3-n^n}=-\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}\frac{1+\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{1-\frac{3}{n^n}}$$

$$\operatorname{sen}\frac{1}{n}\sim\frac{1}{n}$$

$$\text{e}\quad\lim_{n\to+\infty}\frac{1+\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{1-\frac{3}{n^n}}=1\quad\text{per il confronto tra infiniti}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^{n+1}+(n+1)!}{3-n^n}\operatorname{sen}\frac{1}{n}=-\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\frac{n+1}{n}=-e$$

(f) $\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)!-n!}{(n-1)!+3^{n-1}}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}.$

Infatti

$$\frac{(n+1)!-n!}{(n-1)!+3^{n-1}}=\frac{(n+1)!}{(n-1)!}\frac{1-\frac{n!}{(n+1)!}}{1+\frac{3^{n-1}}{(n-1)!}}=n(n+1)\frac{1-\frac{1}{n+1}}{1+\frac{3^{n-1}}{(n-1)!}}$$

$$1-\cos\frac{1}{n}\sim\frac{1}{2n^2}$$

quindi

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)!-n!}{(n-1)!+3^{n-1}}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to+\infty}n(n+1)\frac{1}{2n^2}=\frac{1}{2}$$

4. Calcolare i seguenti limiti:

   (a) Calcolare il limite della successione

$$a_n=\frac{\sqrt{n^3-2n^2+1}-\sqrt{n^3+n}}{n^\alpha}$$

al variare di α

Razionalizzando e usando il principio di cancellazione degli infiniti:

$$a_n = \frac{(\sqrt{n^3-2n^2+1}-\sqrt{n^3+n})(\sqrt{n^3-2n^2+1}+\sqrt{n^3+n})}{n^\alpha(\sqrt{n^3-2n^2+1}+\sqrt{n^3+n})} =$$

$$= \frac{n^3-2n^2+1-n^3-n}{n^\alpha(\sqrt{n^3-2n^2+1}+\sqrt{n^3+n})} = \frac{-2n^2-n+1}{n^\alpha(\sqrt{n^3-2n^2+1}+\sqrt{n^3+n})} \sim \frac{-2n^2}{n^\alpha 2\sqrt{n^3}}$$

Dunque

$$a_n \sim -\frac{n^{\frac{1}{2}}}{n^\alpha} \longrightarrow \begin{cases} -1, & \text{se } \alpha = \frac{1}{2}, \\ -\infty, & \text{se } \alpha < \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{se } \alpha > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

(b) Calcolare il limite della successione

$$a_n = \frac{\sqrt{n^2+n^{\frac{3}{2}}}-\sqrt{n^2-2}}{n^\alpha+\sqrt{n}}$$

al variare di α

Risolto nella lezione 15.

(c) Stabilire per quali valori di α la successione

$$a_n = \frac{\left(n^2-n\right)^\alpha}{1+n^3}$$

è infinitesima.

Poiché

$$n^2-n \sim n^2 \quad \text{e} \quad 1+n^3 \sim n^3$$

si ha

$$a_n \sim \frac{n^{2\alpha}}{n^3} = \frac{1}{n^{3-2\alpha}}$$

e dunque

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0 \quad \text{se} \quad 3-2\alpha > 0$$

cioé $\alpha < \frac{3}{2}$.