Elementi di ANALISI MATEMATICA I
Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica
A.A. 2026-2027

Guido Gentile

Ultima versione: 10 ottobre 2026

Nota introduttiva

Le parti contrassegnate con un asterisco ($*$) – in particolare i complementi – costituiscono un approfondimento degli argomenti affrontati nel corso della trattazione e possono essere omessi, specialmente a una prima lettura, senza compromettere la comprensione del resto.

Indice

1 Numeri reali e numeri complessi **1**

1.1 Notazioni ed elementi di teoria degli insiemi 1

1.2 Numeri naturali 4

1.2.1 Elementi di calcolo combinatorio 5

1.2.2 Formula del binomio 5

1.3 Numeri interi 7

1.4 Numeri razionali 8

1.5 Numeri reali 13

1.6 Definizione assiomatica dei numeri reali (∗) 14

1.7 Sottoinsiemi dei numeri reali 16

1.7.1 Intervalli 16

1.7.2 Estremo superiore ed estremo inferiore 19

1.8 Numeri complessi 21

1.8.1 Radici di un polinomio a coefficienti complessi 23

1.8.2 Radici di un polinomio a coefficienti reali 24

1.8.3 Fattorizzazione di un polinomio (∗) 25

1.8.3 Calcolo delle radici di un polinomio 26

2 Funzioni reali di variabile reale **29**

2.1 Piano cartesiano 29

2.2 Modulo di un numero reale 31

2.3 Funzione reale di variabile reale 33

2.4 Grafico di una funzione reale di variabile reale 36

3 Funzioni elementari principali **39**

3.1 Funzioni elementari principali 39

3.2 Domini e grafici delle funzioni potenze 39

3.3 Equazioni di primo e secondo grado 42
3.3.1 Equazione di primo grado $ax + b = 0$, $a \neq 0$ 42
3.3.2 Equazione di secondo grado $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ 42
3.4 Disequazioni di primo grado 44
3.4.1 Disequazione di primo grado $ax + b \geq 0$, $a \neq 0$ 44
3.4.2 Disequazione di primo grado $ax + b \leq 0$, $a \neq 0$ 44
3.5 Disequazioni di secondo grado 45
3.5.1 Disequazione di secondo grado $ax^2 + bx + c \geq 0$, $a \neq 0$ 45
3.5.2 Disequazione di secondo grado $ax^2 + bx + c > 0$, $a \neq 0$ 46
3.5.3 Disequazione di secondo grado $ax^2 + bx + c \leq 0$, $a \neq 0$ 46
3.5.4 Disequazione di secondo grado $ax^2 + bx + c < 0$, $a \neq 0$ 46
3.6 Domini e grafici delle funzioni trigonometriche 48
3.6.1 Seno e coseno 48
3.6.2 Tangente e cotangente 49
3.6.3 Secante e cosecante 50
3.6.4 Formule trigonometriche 50
3.7 Dominio e grafico della funzione esponenziale 55
3.8 Dominio e grafico della funzione logaritmo 57
3.9 Simmetrie e parità 59
3.10 Esercizi 62

4 Funzioni composte e inverse **67**
4.1 Alcune proprietà delle funzioni 67
4.2 Composizione di funzioni 68
4.3 Funzione inversa 69
4.4 Funzioni trigonometriche inverse 71
4.5 Funzioni elementari 73
4.6 Esercizi 75

5 Limiti **79**
5.1 Funzione distanza 79
5.2 Limite 80
5.3 Limite destro e sinistro 83
5.4 Funzioni limitate e funzioni illimitate 84
5.5 Teoremi sui limiti 86
5.6 Alcuni esempi e alcuni limiti notevoli 89

5.7 Un limite notevole: il numero di Nepero 92
5.7.1 Calcolo del limite: prima parte (∗) 93
5.7.2 Calcolo del limite: seconda parte (∗) 95
5.8 Esercizi 96

6 Funzioni continue **101**
6.1 Definizione ed esempi 101
6.2 Proprietà delle funzioni continue 103
6.3 Funzioni discontinue 104
6.4 Teoremi sulle funzioni continue 106
6.5 Infinitesimi 109
6.6 Esercizi 110

7 Funzioni derivabili **113**
7.1 Derivata 113
7.2 Proprietà della derivata 114
7.2.1 Interpretazione grafica della derivata 115
7.2.2 Regole di derivazione 116
7.3 Derivata di una funzione composta 117
7.4 Derivata della funzione inversa 119
7.5 Derivate di ordine superiore 120
7.5.1 Derivata seconda 120
7.5.2 Derivate di ordine superiore 120
7.6 Esercizi 121

8 Teoremi sulle funzioni derivabili **125**
8.1 Teoremi di Rolle, Lagrange e Cauchy 125
8.2 Forme indeterminate 127
8.3 Teoremi di de l'Hôpital 129
8.3.1 Forme indeterminate della forma $0/0$ 129
8.3.2 Forme indeterminate della forma ∞/∞ 131
8.4 Esercizi 132

9 Studio del grafico di una funzione **135**
9.1 Asintoti 135
9.2 Funzioni crescenti e decrescenti 139

9.3 Massimi e minimi assoluti di una funzione . . . 142
9.4 Primo studio del grafico di una funzione . . . 144
9.5 Studio della derivata seconda . . . 146
9.6 Funzioni convesse e funzioni concave . . . 147
9.7 Schema per lo studio del grafico di una funzione . . . 149
9.8 Esercizi . . . 151

10 Integrali **207**
10.1 Integrali definiti . . . 207
10.2 Proprietà degli integrali definiti . . . 210
10.3 Integrali indefiniti . . . 212
10.4 Tabella di integrali indefiniti . . . 214

11 Metodi di integrazione **217**
11.1 Integrazione per sostituzione . . . 217
11.2 Integrazione per parti . . . 220
11.3 Integrazione di funzioni razionali . . . 222
11.4 Esercizi . . . 227

12 Formula di Taylor **235**
12.1 Approssimazioni di funzioni con polinomi . . . 235
12.2 Formula di MacLaurin di funzioni elementari . . . 239
14.2.1 Formula di MacLaurin per la funzione e^x . . . 239
14.2.2 Formula di MacLaurin per la funzione $\sin x$ . . . 239
14.2.3 Formula di MacLaurin per la funzione $\cos x$ . . . 241
14.2.4 Formula di MacLaurin per la funzione $1/(1-x)$ . . . 241
14.2.5 Formula di MacLaurin per la funzione $1/(1+x)$ . . . 242
14.2.6 Formula di MacLaurin per la funzione $1/(1-x^2)$ . . . 242
14.2.7 Formula di MacLaurin per la funzione $1/(1+x^2)$ . . . 242
14.2.8 Formula di MacLaurin per la funzione $\ln(1+x)$ . . . 243
14.2.9 Formula di MacLaurin per la funzione $\operatorname{arctg} x$ . . . 243
14.2.10 Formula di MacLaurin per altre funzioni elementari . . . 244
12.3 Calcolo di limiti mediante la formula di Taylor . . . 245
12.4 Esercizi . . . 249

Indice analitico **255**

1 | Numeri reali e numeri complessi

1.1 Notazioni ed elementi di teoria degli insiemi

Un *insieme* è una qualsiasi collezione di oggetti, che prendono il nome di *elementi* dell'insieme. Noi saremo prevalentemente interessati a *insiemi numerici*, ovvero insiemi i cui elementi sono numeri.

Se x è un elemento dell'insieme X, diciamo che x appartiene ad X. Se gli elementi di X sono $x_1, x_2, x_3, \ldots$, scriviamo $X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$. Se Y è un *sottoinsieme* di X, i.e. una collezione di elementi che appartengono ad X, diciamo che Y è contenuto in X. Per costruzione, il sottoinsieme di un insieme è a sua volta un insieme. Un sottoinsieme Y di X può essere costituito da un unico elemento x di X : in tal caso scriviamo $Y = \{x\}$.

Introduciamo le seguenti notazioni:

1. Il simbolo $\in$ significa "appartiene a", mentre $\notin$ significa "non appartiene a". Quindi, dato un insieme X, la notazione $x \in X$ significa che x è un elemento di X, ovvero che x appartiene a X, mentre la notazione $y \notin X$ significa che X non contiene l'elemento y.
2. Il simbolo $\subset$ significa "è contenuto in", mentre $\not\subset$ significa "non è contenuto in". Quindi, dato un insieme X, se Y è un sottoinsieme di X, ovvero se Y è contenuto in X, scriviamo $Y \subset X$.
3. Dati due insiemi A e B, l'insieme $A \cup B$, chiamato *unione* di A e B, indica l'insieme i cui elementi appartengono ad A o a B o a entrambi A e B, i.e.
$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ o } x \in B\}.$$
4. Dati due insiemi A e B, l'insieme $A \cap B$, chiamato *intersezione* di A e B, indica l'insieme i cui elementi appartengono sia ad A sia a B, i.e.
$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\}.$$
5. Dati due insiemi X e Y, indichiamo con $X \setminus Y$ (*differenza* tra X e Y) l'insieme dei punti di X che non appartengono a Y, i.e.
$$X \setminus Y = \{x \in X : x \notin Y\}.$$

6. La notazione $\forall x$ significa "per ogni x".
7. La notazione $\exists x$ significa "esiste x", mentre $\exists!\ x$ significa "esiste un unico x".
8. Indichiamo con $\emptyset$ l'*insieme vuoto* (l'insieme che non contiene alcun elemento).
9. Dato un sottoinsieme $Y \subset X$, si dice *complementare* di Y in X l'insieme Y^{c} dei punti di X che non appartengono a Y, i.e.
$$Y^{\mathrm{c}} = \{x \in X : x \notin Y\}.$$
Per costruzione si ha $Y \cup Y^{\mathrm{c}} = X$, $Y \cap Y^{\mathrm{c}} = \emptyset$ e $(Y^{\mathrm{c}})^{\mathrm{c}} = Y\ \forall Y \subset X$.
10. Dati due insiemi X e Y, l'insieme $X \times Y$, che prende il nome di *prodotto cartesiano* di X e Y, indica l'insieme ottenuto prendendo tutte le coppie ordinate (x, y), con $x \in X$ e $y \in Y$, i.e.
$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}.$$

Un esempio di unione e intersezione di insiemi nel piano è dato nelle Figura 1.1 e 1.2.

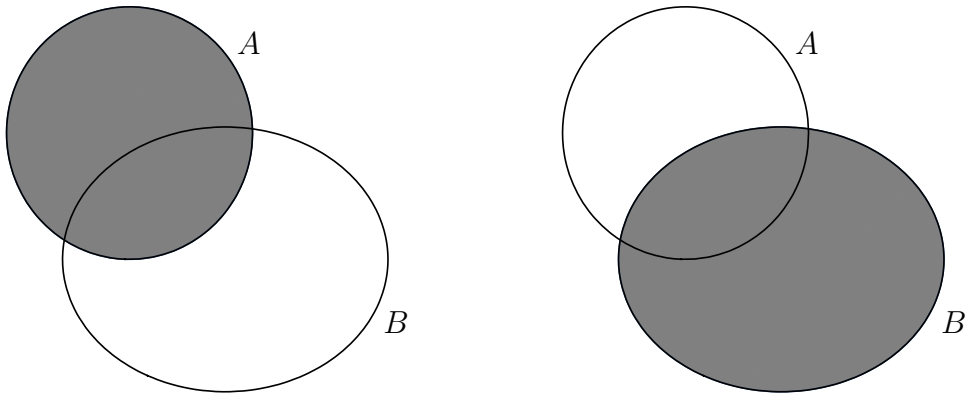


Figura 1.1: Due insiemi A e B nel piano: è evidenziato a destra A, a sinistra B.

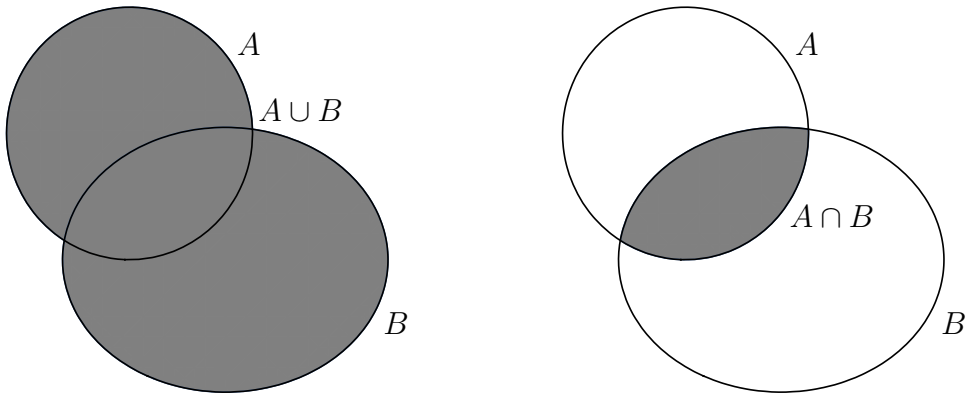


Figura 1.2: Unione e intersezione degli insiemi A e B della Figura 1.1.

Osservazioni:

1. Un sottoinsieme $Y \subset X$ può coincidere con l'insieme X (ovvero, i sottoinsiemi di un insieme X comprendono anche insieme X). Un sottoinsieme $Y \subset X$ che non sia X costituisce un *sottoinsieme proprio* dell'insieme X.
2. A volte si distingue, come notazione, $Y \subset X$ e $Y \subseteq X$, dove $Y \subseteq X$ indica che il sottoinsieme Y può essere lo stesso X, mentre $Y \subset X$ indica che Y è un sottoinsieme proprio di X. Noi non useremo questa notazione.
3. Si noti che, nella definizione di unione, la disgiunzione "o" ha carattere inclusivo, non esclusivo: un elemento appartiene all'unione di due insiemi anche nel caso in cui appartenga a entrambi.
4. Confrontando le definizioni ai punti 5 e 9, si vede subito che se $Y \subset X$ si ha $X \setminus Y = X \cap Y^{\mathrm{c}}$. Se invece Y non è un sottoinsieme di X, si ha $X \setminus Y = X \setminus (Y \cap X)$.

Esercizi:

1. Si determino gli elementi e i sottoinsiemi dell'insieme $X = \{1, 2, 3\}$.
2. Si determinino l'unione, l'intersezione e le differenze dei due insiemi $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{2, 3, 4, 5\}$.
3. Si determinino l'unione, l'intersezione e le differenze dei due insiemi $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 10\}$ e $B = \{1, 5, 6, 9\}$.
4. Si determinino l'unione, l'intersezione e le differenze dei due insiemi $A = \{0, 2, 6, 8, 10\}$ e $B = \{1, 2, 5, 7, 9\}$.
5. Dato l'insieme $A = \{0, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, si determino due insiemi B e C tali che $B \cup C = A$ e $B \cap C = \emptyset$, e si calcolino $A \setminus B$ e $A \setminus C$.
6. Siano A e B come nell'esercizio 1: si determini l'insieme $A \times B$.
7. Si dimostri che, dati due insiemi A, B, si ha $A^{\mathrm{c}} \cup B^{\mathrm{c}} = (A \cap B)^{\mathrm{c}}$.
8. Si dimostri che, dati due insiemi A, B, si ha $A^{\mathrm{c}} \cap B^{\mathrm{c}} = (A \cup B)^{\mathrm{c}}$.

Soluzioni:

1. Gli elementi di X sono i numeri 1 2 e 3, mentre i sottoinsiemi di X sono gli insiemi $\{1, 2, 3\}$ (che coincide con X), $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$, $\{1\}$, $\{2\}$ e $\{3\}$. Si noti la differenza tra $1 \in X$, visto come elemento di X, e il sottoinsieme $\{1\}$, visto come l'insieme costituito dall'unico elemento 1.
2. $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A \cap B = \{2, 3\}$, $A \setminus B = A = \{1\}$, $B \setminus A = \{4, 5\}$.
3. $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10\}$, $A \cap B = \{1, 6\}$, $A \setminus B = A = \{2, 3, 4, 8, 10\}$, $B \setminus A = \{5, 9\}$.
4. $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10\}$, $A \cap B = \emptyset$, $A \setminus B = A$, $B \setminus A = B$. Si noti che l'insieme $\{0\}$ è ben diverso dall'insieme nullo $\emptyset$: l'insieme nullo non contiene elementi, mentre $\{0\}$ contiene l'elemento 0.

5. Per esempio $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ e $C = \{1, 5, 7, 9\}$. Si ha $A \setminus B = C$ e $A \setminus C = B$.
6. Si ha $A \times B = \{(1,1),(2,1),(3,1),(4,1),(6,1),(8,1),(10,1),(1,5),(2,5),(3,5),(4,5),(6,5),(8,5),(10,5),(1,6),(2,6),(3,6),(4,6),(6,6),(8,6),(10,6),(1,9),(2,9),(3,9),(4,9),(6,9),(8,9),(10,9)\}$. Si noti che $(1,6) \neq (6,1)$ e che, mentre $(3,1) \in A \times B$, invece $(1,3) \notin A \times B$.
7. Se $x \in A^c \cup B^c$, allora $x \in A^c$ o $x \in B^c$, ovvero $x \notin A$ o $x \notin B$. Quindi si possono avere tre casi: $x \notin A$ e $x \notin B$ oppure $x \notin A$ e $x \in B$ oppure $x \in A$, $x \notin B$. In altre parole non si può avere $x \in A$ e $x \in B$ simultaneamente, da cui segue che si ha $x \notin A \cap B$, ovvero che x appartiene al complementare di $A \cap B$.
8. Segue dall'esercizio 5, se definiamo $A' = A^c$ e $B' = B^c$ e utilizziamo la proprietà che per ogni sottoinsieme X si ha $(X^c)^c = X$.

1.2 Numeri naturali

L'insieme dei *numeri naturali* è l'insieme $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$. I numeri naturali sono i numeri più intuitivi: si utilizzano per contare gli oggetti (la cassa contiene 10 mele, il libro ha 286 pagine, ecc.) o per definire un ordinamento tra oggetti (questo è il terzo libro che ho letto questo mese, ecc.).

Sui numeri naturali si definiscono un'operazione di *addizione* o *somma* $(+)$ e un'operazione di *moltiplicazione* o *prodotto* $(\cdot)$: $\forall p, q \in \mathbb{N}$ si possono considerare la loro somma $p + q \in \mathbb{N}$ e il loro prodotto $p \cdot q \in \mathbb{N}$. L'elemento 0 (*zero*) prende il nome di *elemento neutro dell'addizione*: si ha $p + 0 = p$ $\forall p \in \mathbb{N}$. Analogamente, l'elemento 1 prende il nome di *elemento neutro del prodotto*: si ha $p \cdot 1 = p$ $\forall p \in \mathbb{N}$.

Proprietà dei numeri naturali:

1. Proprietà commutativa dell'addizione: $\forall p, q \in \mathbb{N}$ si ha $p + q = q + p$.
2. Proprietà associativa dell'addizione: $\forall p, q, m \in \mathbb{N}$ si ha $p + (q + m) = (p + q) + m$.
3. Proprietà commutativa della moltiplicazione: $\forall p, q \in \mathbb{N}$ si ha $p \cdot q = q \cdot p$.
4. Proprietà associativa della moltiplicazione: $\forall p, q, m \in \mathbb{N}$ si ha $p \cdot (q \cdot m) = (p \cdot q) \cdot m$.
5. Proprietà distributiva: $\forall p, q, n \in \mathbb{N}$ si ha $p \cdot (q + n) = p \cdot q + p \cdot n$.

Osservazioni:

1. A volte l'insieme dei numeri naturali è definito escludendo lo zero: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Noi non segueremo questa convenzione.
2. Nel seguito il prodotto di due numeri qualsiasi x, y sarà indicato indifferentemente come $x \cdot y$ oppure, più semplicemente, come xy, omettendo il punto tra i due numeri.

1.2.1 Elementi di calcolo combinatorio

Dato un numero $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, il prodotto dei primi n numeri interi $1, 2, \ldots, n$ si chiama *fattoriale* di n e si indica con il simbolo $n!$. Si ha $1! = 1$, $2! = 1 \cdot 2 = 2$, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$, $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 24 \cdot 5 = 120$, e così via. Si pone per definizione $0! = 1$. Si vede immediatamente che $n! = n \cdot (n-1)!$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Dati $n, k \in \mathbb{N}$, con $k \leq n$, si definisce *coefficiente binomiale* il numero

$$C_{n,k} := \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Si ha per esempio

$$\binom{n}{n} = 1, \quad \binom{n}{n-1} = n, \quad \binom{n}{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}, \quad \ldots, \quad \binom{n}{1} = n, \quad \binom{n}{0} = 1.$$

Si verifica facilmente che

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

1.2.2 Formula del binomio

Ricordiamo infine la *formula del binomio* (o *formula di Newton*): per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ tale che $n \geq 1$ si ha

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \\ &= \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \ldots + \binom{n}{n-1} a\, b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n,\end{aligned}$$

dove il simbolo $\sum$ prende il nome di *sommatoria*. La sommatoria costituisce, in generale, un modo compatto per scrivere una somma di termini che si possono identificare tramite un indice, ovvero un numero naturale k che assume più valori. Nel caso che stiamo considerando, per n fissato, si considerano gli $n+1$ addendi della forma

$$\binom{n}{k} a^{n-k} b^k,$$

ottenuti al variare di $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$, e si sommano. Per esempio, per $n = 2$ si ha la formula del *quadrato del binomio*

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

per $n = 3$ si ha la formula del *cubo del binomio*

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3,$$

per $n = 4$ si ha

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4,$$

per $n = 5$ si ha

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5,$$

e così via. Per la dimostrazione della formula del binomio cfr. i complementi del §1.4.

Osservazioni:

1. Dato un insieme di n elementi, $n!$ rappresenta il numero di *permutazioni* degli elementi dell'insieme: in altre parole $n!$ esprime in quanti modi diversi si possano ordinare n elementi. Per esempio, se $A = \{1, 2, 3\}$, allora ci sono 3! modi di ordinare i tre elementi di A: (1,2,3), (1,3,2), (2,1,3), (2,3,1), (3,1,2) e (3,2,1).
2. Dato un insieme di n elementi, il coefficiente binomiale $C_{n,k}$ indica il numero di *combinazioni* degli n elementi presi k alla volta, che rappresenta il numero di modi di scegliere k elementi nell'insieme, ovvero il numero di sottoinsiemi costituiti da k elementi. Per esempio se $A = \{1, 2, 3\}$, ci sono $C_{3,2} = 3$ sottoinsiemi costituiti da due elementi, dati da $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$ e $\{2, 3\}$, $C_{3,1} = 3$ sottoinsiemi costituiti da un solo elemento, dati da $\{1\}$, $\{2\}$ e $\{3\}$.

Esercizi:

1. Si scriva esplicitamente e si calcoli la somma $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} k^2$.
2. Si scriva esplicitamente e si calcoli la somma $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} (1 + 2k)$.
3. Si dimostri che per ogni $k, n \in \mathbb{N}$, $k \leq n$, si ha $\displaystyle\binom{n}{k} \leq 2^n$.
4. Si sviluppi la formula del binomio $(a+b)^n$ per $n = 5$ e $n = 6$.
5. Si riscriva utilizzando le notazioni introdotte in §1.1 la seguente affermazione: comunque siano presi un elemento dell'insieme A e un elemento dell'insieme B la somma dei loro quadrati è minore o uguale a 13.
6. Si determino due sottoinsiemi A e B di $\mathbb{N}$ per cui valga l'affermazione dell'esercizio 5.
7. Si riscriva utilizzando le notazioni introdotte in §1.1 la seguente affermazione: per ogni elemento dell'insieme A esiste un elemento dell'insieme B tale che la somma dei due elementi è uguale al loro prodotto.
8. Si mostri che, se $A, B \subset \mathbb{N}$, i.e. se A e B sono sottoinsiemi di $\mathbb{N}$, l'affermazione dell'esercizio 7 può valere solo se $A = B = \{2\}$ oppure $A = B = \{0\}$.

Soluzioni:

1. $\sum_{k=1}^{5} k^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55.$
2. $\sum_{k=1}^{5} (1 + 2k) = 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 35.$
3. $\binom{n}{k} \leq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n.$
4. Si ha
$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5,$$
$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6.$$
5. $\forall (a, b) \in A \times B \; a^2 + b^2 \leq 13.$
6. Per esempio $A = \{0, 1, 2\}$ e $B = \{1, 3\}$.
7. $\forall a \in A \; \exists b \in B : \; a + b = a \cdot b.$
8. Siano $a, b \in \mathbb{N}$ tali che $a + b = a \cdot b$. Se $a = 1$ si ha $1 + b = 1 \cdot b = b$, che non è mai soddisfatta. Se $a \neq 1$ si ha $(a-1) \cdot b = a$ e dividendo per $a - 1 \neq 0$ si trova $b = a/(a-1)$, che può essere intero solo se $a = 0$ o $a - 1 = 1$; corrispondentemente si ha $b = 0$ se $a = 0$ e $b = 2/1 = 2$ se $a = 2$. Quindi sono possibili solo due casi: $a = b = 0$ oppure $a = b = 2$.

1.3 Numeri interi

Un'equazione di primo grado $x + p = q$, con $p, q \in \mathbb{N}$, non sempre ammette soluzione in $\mathbb{N}$. Per esempio l'equazione $x + 2 = 1$ non ammette soluzione in $\mathbb{N}$. Da qui la necessità di ampliare l'insieme dei numeri, che porta a introdurre l'insieme dei *numeri interi* $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Si ha $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

Un numero intero p si dice *positivo* se $p \in \mathbb{N}$ e $p \neq 0$ (i.e. $p = 1, 2, 3, \ldots$), *non negativo* se $p \in \mathbb{N}$, (i.e. $p = 0, 1, 2, 3, \ldots$), *negativo* se $-p \in \mathbb{N}$ e $p \neq 0$ (i.e. $p = -1, -2, -3, \ldots$) e *non positivo* se $-p \in \mathbb{N}$ (i.e. $p = 0, -1, -2, -3, \ldots$). In particolare, se p è un numero positivo o negativo, allora p non è mai nullo (i.e. $p \neq 0$), mentre, se p è un numero non positivo o non negativo, allora può essere nullo. Si noti che i numeri interi non negativi non sono altro che i numeri naturali.

Le operazioni di addizione e di moltiplicazione introdotte per i numeri naturali si estendono all'insieme dei numeri interi, i quali ereditano le stesse proprietà (commutativa, associativa e distributiva). In particolare esiste l'*elemento neutro dell'addizione*: l'elemento 0 è tale che per ogni $p \in \mathbb{Z}$ si ha $p + 0 = 0 + p = p$. Inoltre, per ogni $p \in \mathbb{Z}$, esiste un unico $q \in \mathbb{Z}$ tale che $p + q = 0$; l'elemento q si chiama l'*elemento opposto* di p. Si noti che se $p \in \mathbb{Z}$ è positivo, il suo opposto è negativo e, viceversa, se p è negativo il suo opposto è positivo, mentre l'opposto di 0 è 0.

1.4 Numeri razionali

Un'equazione di primo grado $px = q$, con $p, q \in \mathbb{Z}$, $p \neq 0$, in generale non ammette soluzione in $\mathbb{Z}$, a meno che q non sia divisibile per p. Per esempio l'equazione $2x = 3$ non ammette soluzione in $\mathbb{Z}$. Da qui la necessità di ampliare ulteriormente l'insieme dei numeri, introducendo un altro insieme numerico: l'insieme dei *numeri razionali* $\mathbb{Q} = \{p/q : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$. Si ha $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. La rappresentazione di un numero razionale non è unica: per esempio $2/3$, $4/6$, $(-10)/(-15)$ rappresentano lo stesso numero. Tuttavia diventa unica se imponiamo che i due numeri siano *primi tra loro* (i.e. che non abbiano divisori comuni a parte 1) e che q sia positivo; per esempio per tutti i numeri considerati prima scegliamo la rappresentazione $2/3$. Dati due numero interi p e q si chiama *massimo comun divisore* di p e q – e si indica con $\mathrm{MCD}(p, q)$ – il numero intero più grande che divide p e q senza lasciare resto; per esempio $\mathrm{MCD}(6, 4) = 2$, $\mathrm{MCD}(15, 5) = 5$, $\mathrm{MCD}(12, 36) = 12$, $\mathrm{MCD}(11, 13) = 1$. Per indicare che due numeri interi p e q sono primi tra loro si scrive $\mathrm{MCD}(p, q) = 1$, che esprime il fatto che il *massimo comun divisore* (MCD) di p e q è 1, ovvero che 1 è l'unico divisore comune dei due numeri p e q.

Possiamo quindi scrivere

$$\mathbb{Q} = \{p/q : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\} = \{p/q : p, q \in \mathbb{Z},\ q > 0 \text{ e } \mathrm{MCD}(p, q) = 1\}.$$

I numeri razionali ereditano le proprietà commutativa, associativa e distributiva dei numeri interi, oltre all'esistenza dell'elemento neutro dell'addizione e dell'elemento neutro della moltiplicazione. Inoltre l'elemento 1 è tale che per ogni $p \in \mathbb{Q}$ si ha $p \cdot 1 = 1 \cdot p = p$ e, se $p \neq 0$, esiste un unico $q \in \mathbb{Q}$ tale che $p \cdot q = 1$. L'elemento q si chiama l'*elemento inverso* (o *reciproco*) di p ed è dato da $q = 1/p$.

L'operazione di divisione tra numeri razionali può essere ricondotta all'operazione di moltiplicazione: infatti dividere un numero razionale p/q per un numero razionale $m/n \neq 0$ significa moltiplicare p/q per il numero razionale n/m. Si noti che invece, all'interno dell'insieme dei numeri interi (e dei naturali come sottocaso), la divisione per un numero diverso da ± 1 produce un numero che non appartiene allo stesso insieme, dal momento che si tratta appunto di un numero razionale.

Osservazioni:

1. Il coefficiente binomiale è stato introdotto in §1.2 come rapporto di due numeri naturali, quindi come numero razionale. Si può tuttavia dimostrare che in realtà è sempre un numero naturale: il numeratore del rapporto è sempre divisibile per il denominatore (cfr. i complementi alla fine del paragrafo).
2. Un numero razionale p/q, con $p, q \neq 0$, è positivo se p e q sono entrambi positivi o entrambi negativi ed è negativo se p e q hanno segno opposto (i.e. sono uno positivo e l'altro negativo). Non è quindi restrittivo supporre che sia $q > 0$; infatti, se $q < 0$, si può scrivere $p/q = (-p)/(-q)$, con $-q > 0$.

Complementi (∗):

1. *Principio di induzione.* Il principio di induzione è una tecnica utilizzata per dimostrare la validità di un enunciato P_n che dipende da un indice $n = 1, 2, 3, \ldots$ Per dimostrare che l'enunciato P_n è vero per ogni n occorre verificare che

   (1) P_1 è vero,

   (2) se si assume che P_n è vero allora anche P_{n+1} è vero.

   Infatti, una volta verificate le proprietà (1) e (2), se $P_{n'}$ fosse falso per qualche $n' > 1$, allora dovrebbe essere falso anche $P_{n'-1}$ (altrimenti, per la proprietà (2), se $P_{n'-1}$ fosse vero anche $P_{n'}$ dovrebbe essere vero), e, ragionando allo stesso modo, dovrebbe essere falso anche $P_{n'-2}, P_{n'-3}, \ldots$: iterando l'argomento $n' - 1$ volte si trova alla fine, che anche P_1 dovrebbe essere falso, ma questo non è possibile per la proprietà (1).

2. Esiste una versione alternativa del principio di induzione (nota come *versione forte*, mentre quella del punto precedente è chiamata *versione debole*) in cui, per dimostrare che l'enunciato P_n è vero per ogni n, si può verificare che

   (1) P_1 è vero,

   (2) se si assume che $P_{n'}$ è vero per ogni $n' = 1, 2, \ldots, , n$, allora anche P_{n+1} è vero.

   Infatti, una volta verificate le proprietà (1) e (2), se P_n fosse falso per qualche $n > 1$, allora dovrebbe essere falso $P_{n'}$ per qualche $n' < n$ (altrimenti, per la proprietà (2) anche P_n sarebbe vero), e, ragionando allo stesso modo, dovrebbe essere falso $P_{n''}$ per qualche $n'' < n'$: iterando l'argomento si trova alla fine, al più dopo n passi, che anche P_1 dovrebbe essere falso, ma di nuovo questo non è possibile per la proprietà (1).

3. *Diseguaglianza di Bernouilli.* Per ogni $x \in \mathbb{R}$ tale che $x \geq -1$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ tale che $n \geq 1$ si ha
$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$
   Si procede per induzione. Per $n = 1$ la relazione vale con il segno $=$. Se la diseguaglianza è vera per qualche n allora, si ha
$$\begin{aligned}(1 + x)^{n+1} &= (1 + x)^n(1 + x) \geq (1 + nx)(1 + x) = 1 + nx + x + nx^2 \\ &\geq 1 + nx + x = 1 + (n + 1)x,\end{aligned}$$
   dove si è tenuto conto che $1 + x \geq 0$ (e quindi se $A \geq B$ risulta $A(1 + x) \geq B(1 + x)$) e che $nx^2 \geq 0$. Ne segue che la diseguaglianza è vera anche per $n + 1$.

4. *Somma geometrica.* Si chiama *somma geometrica* di ragione x la somma
$$\sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n.$$
   Si dimostra per induzione che, per $x \neq 1$, vale la formula
$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

Per $n = 1$ si verifica immediatamente che

$$\frac{1-x^2}{1+x} = \frac{(1+x)(1-x)}{1-x} = 1 + x = \sum_{k=0}^{1} x^k.$$

Se la formula vale per n, allora per $n+1$ si trova

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} x^k &= \sum_{k=0}^{n} x^k + x^{n+1} = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + x^{n+1} = \frac{1-x^{n+1}+(1-x)x^{n+1}}{1-x} \\ &= \frac{1-x^{n+1}+x^{n+1}-x^{n+2}}{1-x} = \frac{1-x^{n+2}}{1-x},\end{aligned}$$

e quindi la formula vale anche per $n+1$.

5. *Dimostrazione della formula del binomio.* La formula del binomio vista nel §1.2.2 si può dimostrare utilizzando il principio di induzione. Si verifica immediatamente che la formula è valida per $n = 1$, dal momento che

$$(a+b)^1 = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^{1-k} b^k = \binom{1}{0} a + \binom{1}{1} b = \frac{1!}{0!1!} a + \frac{1!}{1!0!} b = a + b.$$

Assumiamo che la formula sia vera per qualche n. Si ha allora, per $n+1$,

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= (a+b)\,(a+b)^n = (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1}.\end{aligned}$$

Se riordiniamo le somme nel secondo contributo scrivendo $k+1 = i$, così che $i = 1, \ldots, n+1$, nella forma

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} = \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n}{i-1} a^{n+1-i}\, b^i = b^{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i-1} a^{n+1-i}\, b^i,$$

dove abbiamo isolato il termine corrispondente a $i = n+1$, e riscriviamo

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n+1-i}\, b^i = a^{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} a^{n+1-i}\, b^i,$$

dove abbiamo isolato il termine corrispondente a $i = 0$, otteniamo

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= a^{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \left[\binom{n}{i} + \binom{n}{i-1} \right] a^{n+1-i} b^i + b^{n+1} \\ &= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] a^{n+1-k} b^k + b^{n+1},\end{aligned}$$

dove, per ottenere la seconda riga, abbiamo semplicemente richiamato k l'indice della sommatoria. D'altra parte vale la seguente identità (nota come *formula di Pascal*)

$$\begin{aligned}\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!}+\frac{n!}{(k-1)!(n+1-k)!}\\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{n+1-k}\right)\\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\left(\frac{n+1}{k(n+1-k)}\right)\\ &= \frac{n!(n+1)}{(k-1)!k(n-i)|(n+1-k)} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k},\end{aligned}$$

che ci permette di riscrivere

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}a^{n+1-i}b^k+b^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^{n+1-k}b^k+b^{n+1},$$

dove abbiamo reinserito nella sommatoria i termini corrispondenti a $k=0$ e $k=n+1$. Quindi la formula, se è vera per n, è vera anche per $n+1$.

6. *Il coefficiente binomiale è un numero naturale.* Si dimostra per induzione che è vero per ogni $n=1,2,3,\ldots$ il seguente enunciato

   P_n: il coefficiente binomiale $C_{n,k}$ è un numero naturale per ogni $k=0,1,\ldots,n$.

   Per $n=1$ si ha

   $$C_{1,0} = \binom{1}{0} = \frac{1!}{0!1!} = 1, \qquad C_{1,1} = \binom{1}{1} = \frac{1!}{1!0!} = 1,$$

   quindi l'enunciato P_1 è vero. Assumiamo che l'enunciato $P_{n'}$ sia vero per $n'=1,\ldots,n$ e mostriamo allora che è vero anche P_{n+1}: si ha, per ogni $k\le n$,

   $$\begin{aligned}C_{n+1,k} &= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \frac{n!(n+1)}{(k-1)!k(n-k)!(n-k+1)}\\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\frac{n+1}{k(n-k+1)} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\left(\frac{1}{n-k+1}+\frac{1}{k}\right)\\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}+\frac{n!}{k!(n-k)!}\\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-(k-1))!}+\frac{n!}{k!(n-k)!} = C_{n,k-1}+C_{n,k},\end{aligned}$$

   dove $C_{n,k-1}$ e $C_{n,k}$ sono numeri naturali per l'ipotesi induttiva. D'altra parte, per $k=n+1$, si ha

   $$C_{n+1,n+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1)!0!} = 1,$$

   cosí che concludiamo che $C_{n+1,k}$ è un numero naturale per ogni $k=0,1,\ldots,k+1$, ovvero che P_{n+1} è vero.

Osservazioni:

1. Nella formula del binomio, possiamo scegliere $a = 0$ o $b = 0$ se adottiamo la convenzione $0^0 = 1$ (per dare significato ai fattori a^0 e b^0). Con la stessa convenzione, sia la diseguaglianza di Bernouilli che la somma geometrica sono valide banalmente anche per $n = 0$.
2. È importante comunque sottolineare che, mentre in algebra tale convenzione si usa abitualmente, al contrario in analisi matematica l'espressione 0^0 è priva di significato (cfr. §3.7) e, nel calcolo dei limiti, costituisce una forma indeterminata (cfr. §8.2).

Esercizi:

1. Si dimostri che la somma dei primi n numeri naturali è $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.
2. Si dimostri che la somma dei primi n quadrati è $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Soluzioni:

1. Si procede per induzione. Per $n = 1$ la formula è valida poiché si ha $n(n+1)/2 = 1\cdot 2/2 = 1$. Assumendo che la formula sia verificata per qualche n, si ha, per $n+1$,

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

2. Si procede sempre per induzione. Per $n = 1$ si verifica immediatamente che la formula è valida poiché si ha $n(n+1)(2n+1)/6 = 1\cdot 2\cdot 3/6 = 1$. Assumendo che la formula sia verificata per qualche n, si ha, per $n+1$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= (n+1)\left(\frac{n(2n+1)}{6} + n + 1\right) = (n+1)\frac{n(2n+1)+6n+6}{6} \\ &= (n+1)\frac{2n^2+7n+6}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6},\end{aligned}$$

così che la formula è verificata anche per $n+1$.

1.5 Numeri reali

Un'equazione di secondo grado $ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$, anche nel caso in cui i coefficienti a, b, c siano sono numeri razionali, non necessariamente ammette soluzioni in $\mathbb{Q}$. Per esempio l'equazione $x^2 - 2 = 0$ non ammette soluzione in $\mathbb{Q}$: le soluzioni dell'equazione sono $x = \pm\sqrt{2}$, dove il numero $\sqrt{2}$ (*radice quadrata* di 2) non è un numero razionale; infatti si può dimostrare che $\sqrt{2}$ non si può scrivere come rapporto di due numeri interi (cfr. i complementi alla fine del paragrafo).

Da qui la necessità di ampliare ancora una volta l'insieme dei numeri, con l'introduzione dell'insieme dei *numeri irrazionali*, ovvero dei numeri che non possono essere scritti sotto forma di frazione p/q, con $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$. L'insieme dei numeri razionali e dei numeri irrazionali costituisce l'insieme dei *numeri reali* $\mathbb{R}$. Si ha quindi $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Su $\mathbb{R}$ si possono ancora definire le operazioni di addizione $(+)$ e moltiplicazione $(\cdot)$, che continuano a godere delle proprietà commutativa, associativa e distributiva. Inoltre, l'insieme $\mathbb{R}$ è quello che si definisce un insieme *totalmente ordinato*, ovvero $\forall x, y \in \mathbb{R}$ solo una delle tre possibilità può verificarsi: $x > y$, $x = y$, $x < y$ (si noti che tale proprietà vale anche per i numeri razionali).

Osservazioni:

1. Come si vedrà al §1.8, un'equazione di secondo grado può non avere soluzioni reali.
2. In realtà, non tutti i numeri reali appaiono come soluzioni di equazioni di secondo grado: in numeri reali si suddividono in *numeri reali algebrici*, che sono soluzioni d equazioni algebriche, i.e. di equazioni della forma $P_n(x) = 0$, dove $P_n(x)$ è un polinomio di grado n per qualche $n \in \mathbb{N}$, e *numeri reali trascendenti*, che al contrario non risolvono alcuna equazione polinomiale: esempi di numeri reali trascendenti sono π ed e (cfr. pag. 92).

La definizione di numero reale data fin qui non è davvero soddisfacente: infatti, mentre i numeri interi e i numeri razionali sono stati definiti in termini di numeri noti (gli interi sono i naturali a meno eventualmente di un segno, e i razionali sono rapporti di interi), non è chiaro che tipo di numeri siano i numeri irrazionali e che proprietà abbiano. È possibile, tuttavia, dare una definizione assiomatica dell'insieme dei numeri reali, ovvero una definizione che ne caratterizza in modo completo e rigoroso tutte le proprietà (cfr. il §1.6). Senza addentraci nei dettagli, ci limitiamo qui a sottolineare una proprietà fondamentale dell'insieme dei numeri reali: la proprietà di *continuità*, che lo caratterizza e contraddistingue dall'insieme dei numeri razionali e che può essere illustrata nel modo seguente. Si chiama *asse reale* una retta sulla quale si siano fissati:

- un punto O, chiamato *origine*,
- un senso positivo, indicato da una freccia,
- un'unità di misura

Se si traccia la retta in direzione orizzontale, usualmente si assume che l'orientamento sia da sinistra a destra. Si identifica allora 0 (zero) con il punto O, così che i numeri *positivi* sono a destra di O e i numeri *negativi* alla sua sinistra (cfr. la Figura 1.3).

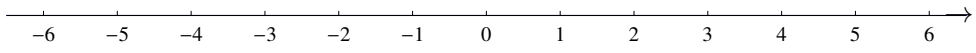


Figura 1.3: Asse reale.

A ogni punto della retta è associato un numero reale e viceversa: esiste quindi un *corrispondenza biunivoca* tra i punti della retta e i numeri reali. Tale proprietà implica che i numeri reali si possano rappresentare come un insieme continuo ed è perciò indicata come *proprietà di continuità dei numeri reali.*

Complementi (∗):

1. *Dimostrazione per assurdo.* Si chiama dimostrazione per assurdo un ragionamento in cui, per dimostrare che vale una proprietà, si assume che la proprietà sia falsa e si fa vedere, attraverso una serie di passaggi logico-deduttivi, che questo porta a una contraddizione.
2. *Irrazionalità del numero* $\sqrt{2}$. Si dimostra per assurdo, assumendo che esistano $p, q \in \mathbb{Z}$, primi tra loro, tali $\sqrt{2} = p/q$. Si avrebbe allora $2 = p^2/q^2$, ovvero $2q^2 = p^2$: ne segue che p^2, e quindi p, dovrebbe essere divisibile per 2, i.e. si dovrebbe avere $p = 2m$, con $m \in \mathbb{Z}$, da cui si otterrebbe $2q^2 = 4m^2 \implies q^2 = 2m^2$, così che anche q^2, e quindi q, dovrebbe essere divisibile per 2, contro l'ipotesi che p e q siano primi tra loro.

1.6 Definizione assiomatica dei numeri reali (∗)

L'insieme dei numeri reali può essere caratterizzato astrattamente, in modo rigoroso e autocontenuto, attraverso una serie di *assiomi*, da cui discendono tutte le proprietà.

Definizione 1.1. *I* numeri reali *sono un insieme* $\mathbb{R}$ *con la seguente struttura:*

1. $\forall x, y \in \mathbb{R}$ *è definito* $x + y \in \mathbb{R}$ *(*somma *o* addizione*);*
2. $\forall x, y \in \mathbb{R}$ *è definito* $x \cdot y \in \mathbb{R}$ *(*prodotto*);*
3. $\forall x, y \in \mathbb{R}$ *si ha* $x + y = y + x$ *(*proprietà commutativa *di* $+$*)*
4. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ *si ha* $x + (y + z) = (x + y) + z$ *(*proprietà associativa *di* $+$*)*
5. $\forall x, y \in \mathbb{R}$ *si ha* $x \cdot y = y \cdot x$ *(*proprietà commutativa *di* $\cdot$*)*
6. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ *si ha* $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ *(*proprietà associativa *di* $\cdot$*)*
7. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ *sia ha* $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ *(*proprietà distributiva*);*
8. $\exists!\ 0 \in \mathbb{R}$ *tale che* $x + 0 = 0 + x = x\ \forall x \in \mathbb{R}$ *(*elemento neutro *di* $+$*);*
9. $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists!\ y = -x$ *tale che* $x + y = 0$ *(*opposto*)*
10. $\exists!\ 1 \in \mathbb{R}$ *tale che* $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x\ \forall x \in \mathbb{R}$ *(*elemento neutro *di* $\cdot$*);*

11. $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, $\exists!\ y = 1/x$ *tale che* $y \cdot x = x \cdot y = 1$ *(*inverso *o* reciproco*);*
12. *esiste un* ordinamento totale*, i.e. una relazione tra coppie di elementi che goda delle seguenti proprietà:*
    - $\forall x, y \in \mathbb{R}$ *si ha* $x \leq y$ *oppure* $x \geq y$ *(*dicotomia*);*
    - $x \leq y$ *e* $y \leq z \Longrightarrow x \leq z$ *(*proprietà transitiva*)*
    - $x \leq y$ *e* $y \leq x \Longrightarrow x = y$ *(*proprietà antisimmetrica*)*
    - $\forall x \in \mathbb{R}$ *si ha* $x \leq x$ *(*proprietà riflessiva*);*
13. $x \leq y \Longrightarrow x + z \leq y + z\ \forall z \in \mathbb{R}$*;*
14. $0 \leq x$ *e* $0 \leq y \Longrightarrow 0 \leq x \cdot y$.

Osservazione: Dalle proprietà sopra seguono proprietà interessanti, e.g.

- $\forall x \in \mathbb{R}$ si ha $x \cdot 0 = 0$.
  Dimostrazione: $x \cdot 0 = x \cdot (1 - 1) = x \cdot 1 - x \cdot 1 = x - x = 0$.
- Se $x > 0$ allora $-x < 0$.
  Dimostrazione: $x > 0 \Longrightarrow x - x > -x \Longrightarrow 0 > -x$.
- Se $x, y \geq 0$ e $z \geq 0$ allora $x > y \Longrightarrow x \cdot z > y \cdot z$.
  Dimostrazione: se $x > y$ si ha $x - y > 0$, quindi $0 < (x-y) \cdot z = x \cdot z - y \cdot z \Longrightarrow x \cdot z > y \cdot z$.
- Se $x, y \geq 0$ e $z < 0$ allora $x > y \Longrightarrow x \cdot z < y \cdot z$.
  Dimostrazione: se $w > 0$ allora $x \cdot w > y \cdot w$ [per 1.5]; se $w = -z > 0$ [per 1.5] allora $x \cdot (-z) > y \cdot (-z) \Longrightarrow -x \cdot z > -y \cdot z \Longrightarrow y \cdot z - x \cdot z > 0$ [sommando $y \cdot z$] $\Longrightarrow y \cdot z > x \cdot z$ [sommando $x \cdot z$].
- $\forall a \in \mathbb{R}$ si ha $a^2 \geq 0$.
  Dimostrazione: se $a \geq 0$ si ha $a^2 = a \cdot a \geq a \cdot 0 = 0$ [per 1.5]; se $a < 0$ si ha $-a > 0$ [per 1.5], quindi usando 1.5 con $x = -a$, $y = 0$, $z = a$ si trova $-a^2 = (-a) \cdot a = x \cdot z < y \cdot z = a \cdot 0 = 0$ [per 1.5] $\Longrightarrow a^2 > 0$ [per 1.5].

In realtà gli assiomi della Definizione 1.1 non sono sufficienti a caratterizzare completamente l'insieme dei numeri reali, in particolare ad assicurarne la continuità sull'asse reale: occorre un ulteriore assioma. Diamo alcune definizioni preliminari.

Definizione 1.2. *Siano* A *e* B *due sottoinsiemi non vuoti di* $\mathbb{R}$*. Diciamo che* (A, B) *è una* sezione *di* $\mathbb{R}$ *se*

- $A \cup B = \mathbb{R}$ *e* $A \cap B = \emptyset$
- $\forall a \in A$ *e* $\forall b \in B$ *si ha* $a \leq b$.

Definizione 1.3. *Data una sezione* (A, B) *di* R *diciamo che* $\ell \in \mathbb{R}$ *è un* elemento separatore *della sezione se* $a \leq \ell \leq b\ \forall a \in A$ *e* $\forall b \in B$.

Agli assiomi della Definizione 1.1 bisogna allora aggiungere un ultimo assioma, che completa la caratterizzazione dell'insieme dei numeri reali.

Definizione 1.4. *I* numeri reali *costituiscono un insieme, indicato con* $\mathbb{R}$*, che è completamente caratterizzato dagli assiomi della Definizione 1.1 e dal seguente assioma (*assioma di Dedekind*):*

15. *per ogni sezione* (A, B) *di* $\mathbb{R}$ *esiste un unico elemento separatore della sezione.*

L'assioma di Dedekind (detto anche *assioma di continuità* o *assioma di completezza*) garantisce che i numeri reali sono *continui*. In particolare è l'assioma di Dedekind che implica che i numeri reali sono in corrispondenza biunivoca con i punti di una retta.

Osservazioni:

1. I numeri razionali non soddisfano l'assioma di Dedekind. Si consideri infatti la sezione (A, B), con $A = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0 \text{ o } x^2 < 2\}$ e $B = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0, x^2 \geq 2\}$. Non esiste allora un elemento separatore $\ell \in \mathbb{Q}$. Infatti, se ℓ è razionale, non si può avere $\ell^2 = 2$ (poiché $\sqrt{2}$ è irrazionale) e, di conseguenza, si ha o $\ell \in A$ o $\ell \in B$. Supponiamo che si abbia $\ell \in A$. Ovviamente si deve avere $\ell > 0$ altrimenti ℓ non può essere un elemento separatore: infatti ℓ deve essere maggiore di qualsiasi $x > 0$ contenuto in A. Si ha allora
$$\left(\ell + \frac{1}{n}\right)^2 = \ell^2 + \frac{2\ell}{n} + \frac{1}{n^2} < \ell^2 + \frac{2\ell + 1}{n} < 2$$
se n è sufficientemente grande: basta prendere $n > 5/(2 - \ell^2)$, dal momento che, tenuto conto che $1 < \ell^2 < 2$
$$\frac{2\ell + 1}{n} < \frac{2\ell^2 + 1}{n} < \frac{4 + 1}{n} < \frac{5}{n}.$$
Ne discende che $\ell + (1/n) \in A$ e, quindi, ℓ non può essere un elemento separatore.
2. In sostanza, la differenza tra numeri reali e numeri razionali consiste nel fatto che, se consideriamo un qualsiasi intervallo $I = [a, b]$ dell'asse reale, i numeri razionali contenuti in I riempiono densamente l'intervallo I (cfr. 1.7.1), mentre i numeri reali lo riempiono completamente, senza "lasciare buchi".

1.7 Sottoinsiemi dei numeri reali

1.7.1 Intervalli

Un *intervallo* I è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$, formato da tutti i punti compresi tra due estremi a e b, dove $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$.

Un intervallo I si dice *chiuso* se $I = [a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ e *aperto* se $I = (a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$. Esistono anche intervalli che non sono né aperti né chiusi: intervalli *aperti a sinistra*, ovvero della forma $I = (a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$, e intervalli *aperti a destra*, ovvero della forma $I = [a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$.

Gli intervalli possono essere *limitati* (se sia a che b sono finiti) o *illimitati*: $[a, +\infty)$, $(a, +\infty)$, $(-\infty, b]$, $(-\infty, b)$, con a, b finiti, oppure $(-\infty, +\infty)$ se né a né b sono finiti. In particolare $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$.

Osservazioni:

1. Dato un qualsiasi intervallo limitato $I \subset \mathbb{R}$, il suo complementare I^c non è un intervallo, ma è unione disgiunta di due intervalli. Per esempio se $I = [1, 2)$ si ha $I^c = (-\infty, 1) \cup [2, +\infty)$. Si ha in ogni caso $I \cup I^c = \mathbb{R}$ e $I \cap I^c = \emptyset$.
2. Come mostra l'osservazione precedente, si possono considerare anche sottoinsiemi di $\mathbb{R}$, che non siano intervalli. Altri esempi sono sottoinsiemi discreti, ovvero costituiti da un numero finito di punti, o unioni di intervalli disgiunti e insiemi discreti.

Esempi:

1. L'unione di due intervalli disgiunti, quali $(-2, -1)$ e $(2, 4)$, non è un intervallo.
2. Né è un intervallo l'insieme costituito da un insieme discreto di punti, quali $\{0\}$, $\{1\}$ e $\{4\}$.

La nozione di insieme aperto e insieme chiuso in $\mathbb{R}$ è in realtà più generale di quella data sopra, e non è confinata al caso in cui l'insieme sia un intervallo. Si definisce *intorno* di centro c e raggio r l'insieme

$$B_r(c) := \{x \in \mathbb{R} : c - r < x < c + r\} = (c - r, c + r).$$

Un insieme $A \subset \mathbb{R}$ si dice *aperto* se per ogni $x \in A$ esiste un intorno di centro x contenuto in A. Un insieme $C \subset \mathbb{R}$ si dice *chiuso* se il suo complementare C^c è aperto. L'insieme vuoto $\emptyset$ è aperto per definizione.

Esempi:

1. L'insieme $(1, 2) \cup (3, 4)$ non è un intervallo, ma è un insieme aperto.
2. L'insieme $I = [2, 5)$ non è né aperto né chiuso: infatti, se si sceglie $c = 2$, per ogni $r > 0$ l'intorno $B_r(2)$ non è contenuto in I; d'altra parte neanche l'insieme $J := (-\infty, 1) \cup [5, +\infty)$, che è il complementare di I, è aperto (perché qualsiasi intorno di 5 contiene punti x non appartenenti a J), quindi I non è chiuso.
3. L'insieme $A = [1, 3] \cup [6, 7] \cup \{8\}$ è chiuso: infatti il suo complementare, i.e. l'insieme $A^c = (-\infty, 1) \cup (3, 6) \cup (7, 8) \cup (8, +\infty)$, è aperto.
4. Un insieme discreto di punti costituisce un insieme chiuso. Per esempio, l'insieme $\{1, 2, 3\}$ è chiuso perché il suo comlementare è $(-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (3, +\infty)$, che è un insieme aperto, in quanto unione di intervalli aperti.
5. Dato l'intorno $B_r(c)$, l'insieme $B_r(c) \cup \{c - r, c + r\} = [c - r, c + r]$ è chiuso, in quanto il suo comlemenetare è $(-\infty, c - r) \cup (c + r, +\infty)$, che è l'unione di due intervalli aperti.
6. L'insieme $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ riveste un ruolo particolare perché è sia aperto che chiuso. Infatti $\mathbb{R}$ è aperto perché soddisfa la definizione di insieme aperto, d'altra parte è chiuso perché il suo complementare è l'insieme vuoto. Ovviamente, per lo stesso motivo, anche $\emptyset$ (l'insieme vuoto) è sia aperto che chiuso.

I numeri razionali sono *densi* sulla retta; questo significa che, comunque si fissi un intervallo in $\mathbb{R}$, si trova un numero razionale dentro quell'intervallo (cfr. i complementi alla fine del paragrafo). Tuttavia, i numeri razionali sono tanti quanti i naturali, nel senso che si possono mettere in corrispondenza biunivoca con i naturali (cfr. i complementi alla fine del paragrafo): tale proprietà si esprime dicendo che i numeri razionali sono *numerabili*.

Esercizi:

1. Si determinino l'unione e l'intersezione di $I_1 = [-1, 3)$ e $I_2 = (2, 5)$.
2. Si determinino l'unione e l'intersezione di $I_1 = [-2, 0)$ e $I_2 = (1, 4)$.
3. Si determinino l'unione e l'intersezione di $I_1 = (-4, 3)$ e $I_2 = (-3, 0)$.
4. Si determinino l'unione e l'intersezione di $I_1 = [-4, 3]$ e $I_2 = [3, 5]$.
5. Si determinimo l'unione e l'intersezione di $I_1 = [0, +\infty)$ e $I_2 = (-\infty, 1)$
6. Si determinimo l'unione e l'intersezione di $I_1 = (-\infty, +\infty)$ e $I_2 = (-\infty, 0)$.
7. Si determinimo l'unione e l'intersezione di $I_1 = (-5, 4)$ e $I_2 = [4, 6)$.
8. Si determinimo l'unione e l'intersezione di $I_1 = [-2, -1]$ e $I_2 = [-1, 7)$.
9. Si determinimo l'unione e l'intersezione di $I_1 = [-2, -1]$, $I_2 = [-1, 4]$ e $I_3 = [-3, 0]$.
10. Si determinimo l'unione e l'intersezione di $I_1 = (-\infty, 1)$, $I_2 = (-1, 2)$ e $I_3 = [1, 2)$.
11. Si determinimo l'unione e l'intersezione di $I_1 = (-4, -1)$, $I_2 = (-1, 1)$ e $I_3 = [1, 2)$.
12. Si determinimo l'unione e l'intersezione di $I_1 = (1, 6)$, $I_2 = (3, 8)$ e $I_3 = (2, 5)$.

Soluzioni:

1. $I_1 \cup I_2 = [-1, 5)$, $I_1 \cap I_2 = (2, 3)$.
2. $I_1 \cup I_2 = [-2, 0) \cup (1, 4)$, $I_1 \cap I_2 = \emptyset$.
3. $I_1 \cup I_2 = I_1 = (-4, 3)$, $I_1 \cap I_2 = I_2 = (-3, 0)$.
4. $I_1 \cup I_2 = [-4, 5]$, $I_1 \cap I_2 = \{3\}$.
5. $I_1 \cup I_2 = (-\infty, +\infty)$, $I_1 \cap I_2 = [0, 1)$.
6. $I_1 \cup I_2 = (-\infty, +\infty) = I_1$, $I_1 \cap I_2 = (-\infty, 0) = I_2$.
7. $I_1 \cup I_2 = (-5, 6) = \mathbb{R}$, $I_1 \cap I_2 = \emptyset$.
8. $I_1 \cup I_2 = [-2, 7)$, $I_1 \cap I_2 = \{-1\}$.
9. $I_1 \cup I_2 \cup I_3 = [-3, 4]$, $I_1 \cap I_2 \cap I_3 = \{-1\}$.
10. $I_1 \cup I_2 \cup I_3 = (-\infty, 2)$, $I_1 \cap I_2 \cap I_3 = \emptyset$.
11. $I_1 \cup I_2 \cup I_3 = (-4, -1) \cup (-1, 2)$, $I_1 \cap I_2 \cap I_3 = \emptyset$.
12. $I_1 \cup I_2 \cup I_3 = (1, 8)$, $I_1 \cap I_2 \cap I_3 = (3, 5)$.

1.7.2 Estremo superiore ed estremo inferiore

Definizione 1.5. *Dato un insieme $A \subset \mathbb{R}$ diciamo che un elemento $M \in A$ è il* massimo *di A se $a \leq M$ $\forall a \in A$. Se il massimo di A esiste si indica con* $\max A$.

Definizione 1.6. *Dato un insieme $A \subset \mathbb{R}$ diciamo che un elemento $m \in A$ è il* minimo *di A se $a \geq m$ $\forall a \in A$. Se il minimo di A esiste si indica con* $\min A$.

Definizione 1.7. *Dato un insieme $A \subset \mathbb{R}$ diciamo che un elemento $L \in \mathbb{R}$ è un* maggiorante *di A se $a \leq L$ $\forall a \in A$. Se esiste un maggiorante di A diciamo che A è* superiormente limitato

Definizione 1.8. *Dato un insieme $A \subset \mathbb{R}$ diciamo che un elemento $\ell \in \mathbb{R}$ è un* minorante *di A se $a \geq \ell$ $\forall a \in A$. Se esiste un minorante di A diciamo che A è* inferiormente limitato.

Definizione 1.9. *Diciamo che S è l'*estremo superiore *di A se è il minimo dei maggioranti di A. Si indica con* $\sup A$.

Definizione 1.10. *Diciamo che s è l'*estremo inferiore *di A se è il massimo dei minoranti di A. Si indica con* $\inf A$.

Esempi:

1. Se $A = [0, 1]$ si ha $\max A = 1$ e $\min A = 0$.
2. Se $A = (0, 1]$ si ha $\max A = 1$, mentre non esiste minimo; tuttavia $\inf A = 0$.
3. Se $A = (-1, 1)$ si ha $\inf A = -1$ e $\sup A = 1$ (massimo e minimo non esistono).
4. Se $A = (0, +\infty)$, si ha $\inf A = 0$; tuttavia A non è limitato superiormente.
5. Se $A = (-\infty, 1]$, si ha $\max A = \sup A = 1$; tuttavia A non è limitato inferiormente.
6. Se $A = (-1, 2] \cup [5, 8)$, si ha $\inf A = -1$ e $\sup A = 8$; minimo e massimo non esistono.

Teorema 1.11. *Se un insieme $A \subset \mathbb{R}$ è limitato superiormente, allora esiste* $\sup A$. *Se un insieme $A \subset \mathbb{R}$ è limitato inferiormente, allora esiste* $\inf A$.

Omettiamo la dimostrazione del teorema. Ci limitiamo a osservare che essa consiste nel far vedere (1) che l'insieme dei maggioranti di A e il suo complementare in $\mathbb{R}$ formano una sezione di $\mathbb{R}$ e (2) che l'elemento separatore della sezione appartiene all'insieme dei maggioranti.

Osservazioni:

1. Non è detto che l'estremo superiore di un insieme A esista (e.g. l'insieme $A = (1, +\infty)$ non ha estremo superiore). Tuttavia l'estremo superiore, se esiste, è unico.
2. Non è detto che esista il massimo di un insieme A (e.g. $A = [0, 1)$). Tuttavia, se un insieme A ammette massimo, allora $\max A = \sup A$. Quindi, in particolare, se esiste il massimo è unico.
3. Analoghe considerazioni valgono per minimo ed estremo inferiore: l'estremo inferiore, se esiste, è unico e il minimo, se esiste, coincide con l'estremo inferiore.

4. A volte, se un insieme A è illimitato superiormente, si scrive $\sup A = +\infty$; analogamente si può scrivere $\inf A = -\infty$ se A è illimitato inferiormente. Se si segue tale convenzione, si può rienunciare il teorema 1.11 dicendo che esistono sempre l'estremo superiore e l'estremo inferiore di qualsiasi insieme $A \subset \mathbb{R}$.

Complementi (∗):

1. *Proprietà archimedea.* Vale la seguente proprietà:

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N} \text{ tale che } n > x.$$

   La dimostrazione procede per assurdo. Supponiamo che l'affermazione sia falsa: allora $\exists x \in \mathbb{R}$ tale che $\forall n \in \mathbb{N}$ si ha $n \leq x$ (cfr. il punto successivo). Tuttavia, se questo fosse vero, allora ogni numero naturale n dovrebbe essere minore di x e quindi x sarebbe un maggiorante dell'insieme dei numeri naturali. Definendo $L = \sup \mathbb{N}$, si avrebbe perciò $n \leq L \leq x\ \forall n \in L$, dal momento che L dovrebbe essere il più piccolo dei maggioranti. D'altra parte, anche il numero $n + 1 \in \mathbb{N}$, in quanto naturale, dovrebbe essere minore di L: si dovrebbe quindi avere $n + 1 < L$ ovvero $n < L - 1$, ma quindi, data l'arbitrarietà di n, il numero L non sarebbe il più piccolo dei maggioranti dell'insieme dei numeri naturali, in contraddizione con la definizione di estremo superiore. In conclusione non è possibile che esista $x \in \mathbb{R}$ talec che $n \leq x\ \forall n \in \mathbb{N}$.

2. Si noti che, nella dimostrazione della proprietà arhcimedea si è utilizzato il fatto che la negazione della frase

   "Per ogni $a \in A$ esiste $b \in B$ tale che vale la proprietà P"

   è data da

   "Esiste $a \in A$ tale che per ogni $b \in B$ *non* vale le proprietà P".

3. *Densità dei numeri razionali.* Sia $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervallo, con $b > a$. Sia $q \in \mathbb{N}$ tale che $q(b - a) > 1$ (tale q esiste per la proprietà archimedea poiché $\delta := 1/(b - a) > 0$ è in $\mathbb{R}$). Si ha quindi $qb > qa + 1$. Sia p il più piccolo intero strettamente maggiore di qa, i.e. tale che $p - 1 \leq qa < p$. Si ha $qa < p \leq qa + 1 < qb$, da cui, dividendo per q, si ottiene $a < p/q < b$: quindi il numero razionale q/p è all'interno dell'intervallo I. Data l'arbitrarietà di I, ne concludiamo che i numeri razionali sono densi sull'intero asse reale.

4. L'argomento del punto precedente mostra che, dato un qualsiasi intervallo $I = [a, b]$, per q sufficientemente grande esiste un intero p tale che il numero razionale q/p appartiene all'intervallo I. Infatti, perché l'argomento funzioni, è sufficiente che si abbia $q > 1/(b-a)$. In particolare, questo implica che in qualsiasi intervallo $I = [a, b]$ di ampiezza finita, per quanto piccola, cadono infiniti numeri razionali: infatti si può applicare l'argomento a tutti i valori $q \in \mathbb{N}$ tali che $q > 1/(b - a)$.

5. Alternativamente, si può dimostrare che un qualsiasi intervallo I di ampiezza finita contiene infiniti numeri razionali applicando il risultato del punto 1 iterativamente fissando di volta in volta un sottointervallo contenuto nell'intervallo trovato al passo precedente imponendo che sia contenuto in I e non contenga i punti trovati fino a quel passo.

6. *Numerabilità dei numeri razionali.* I numeri razionali siscrivono nella forma p/q, con $q, p \in \mathbb{Z}$ primi tra loro. Senza perdita di generalità si può supporre che sia $q > 0$: infatti, se $q < 0$, basta scrivere $p/q = (-p)/(-q)$. Se definisce *altezza* del numero razionale p/q il numero
$$h(p/q) = |p| + q.$$
Per costruzione $h(p/q)$ è un numero naturale e i numeri razionali con altezza fissata sono finiti e possono essere ordinati, per esempio sulla base del valore crescente del numeratore p. I numeri razionali x possono allora essere ordinati fissando prima l'altezza $h(x) = n \in \mathbb{N}$ e poi l'ordine di x tra i numeri razionali che hanno altezza n. In questo modo si stabilisce una corrispondenza biunivoca tra i numeri razionali e i numeri naturali.

1.8 Numeri complessi

Un'equazione di secondo grado $ax^2 + bx + c = 0$, anche nel caso che si assuma che i numeri a, b, c (i.e. i *coefficienti* dell'equazione) siano reali, non necessariamente ammette soluzioni reali. Per esempio l'equazione $x^2 + 1 = 0$ non ammette soluzioni reali poiché $x^2 \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$. Da qui la necessità di introdurre l'insieme dei *numeri complessi* $\mathbb{C}$, quale estensione dell'insieme dei numeri reali.

I numeri complessi sono numeri della forma $z = x + \mathrm{i}y$, con x e y reali, dove i prende il nome di *unità immaginaria* ed è definita richiedendo che $\mathrm{i}^2 = -1$. Chiamiamo x e y la *parte reale* e la *parte immaginaria* di z, rispettivamente, e scriviamo $x = \mathrm{Re}(z)$ e $y = \mathrm{Im}(z)$. I numeri reali si ottengono prendendo $y = 0$: i numeri reali sono i numeri complessi con parte immaginaria nulla. Si ha quindi $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Si dicono *immaginari puri* i numeri complessi della forma $z = \mathrm{i}y$, con y reale.

Dato un numero complesso $z = x + \mathrm{i}y$ si definisce il suo *complesso coniugato* come il numero $\bar{z} := x - \mathrm{i}y$. Si ha $z\bar{z} = (x + \mathrm{i}y)(x - \mathrm{i}y) = x^2 - \mathrm{i}xy + \mathrm{i}xy - \mathrm{i}^2y^2 = x^2 + y^2$.

Osservazioni:

1. Si verifica facilmente che le soluzioni di un'equazione di secondo grado a coefficienti reali sono o numeri reali o numeri complessi coniugati (cfr. i complementi alla fine del paragrafo). In particolare le due soluzioni possono coincidere solo se sono reali.
2. Anche nel caso in cui i coefficienti dell'equazione siano complessi, le due soluzioni sono numeri complessi (cfr. di nuovo i complementi alla fine del paragrafo).

I numeri complessi si possono rappresentare come coppie ordinate (x, y) di numeri reali nel piano (*piano complesso*). L'asse reale è individuato dai punti $(x, 0)$, mentre i numeri individuati dai punti $(0, y)$ sono numeri immaginari puri. In generale, il numero complesso $z = x + \mathrm{i}y$ è rappresentato dal punto che ha coordinata x lungo l'asse orizzontale, ovvero l'asse reale, e coordinata y lungo l'asse verticale (cfr. la Figura 1.4). Si può quindi identificare un numero complesso $z = x + \mathrm{i}y$ con la coppia ordinata (x, y) e, di conseguenza, il piano complesso $\mathbb{C}$ con il prodotto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (cfr. il §1.1).

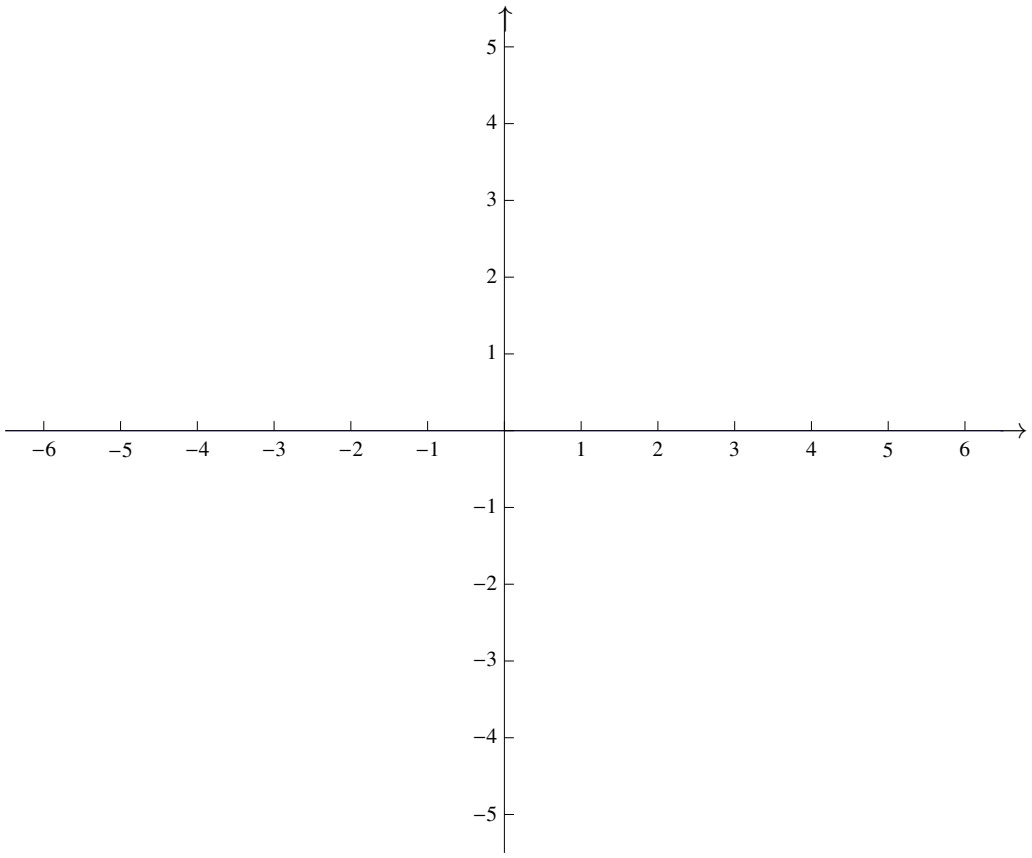


Figura 1.4: Piano complesso.

Complementi (∗):

1. *Soluzioni dell'equazione di secondo grado a coefficienti reali.* Le soluzioni dell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, sono $z_\pm$, date da

$$z_+ = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \qquad z_- = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a},$$

dove $\Delta = b^2 - 4ac$ pende il nome di *discriminante*. Se $\Delta \geq 0$, le due soluzioni sono reali (distinte se $\Delta > 0$ e coincidenti se $\Delta = 0$). Se invece $\Delta > 0$, si può scrivere

$$\Delta = (-1) \cdot (-\Delta) \Longrightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{(-1) \cdot (-\Delta)} = \sqrt{(-1)} \cdot \sqrt{-\Delta} = \mathrm{i}\sqrt{-\Delta},$$

dove $-\Delta$ è positivo e quindi $\sqrt{-\Delta}$ è un numero reale ben definito. Di conseguenza si ha

$$z_+ = -\frac{b}{2a} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}, \qquad z_- = -\frac{b}{2a} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

In altre parole $z_\pm$ sono della forma $z_\pm = x \pm \mathrm{i}y$, dove $x = -b/2a$ e $y = \sqrt{-\Delta}/2a$ sono numeri reali. Si noti che $z_- = \bar{z}_+$, i.e. le due soluzioni sono l'una la complessa coniugata dell'altra.

2. *Soluzioni dell'equazione di secondo grado a coefficienti complessi.* Nel caso in cui i coefficienti dell'equazione siano complessi, le due radici sono ancora della forma $z_+ = x_+ + \mathrm{i}y_+$ e $z_- = x_- + \mathrm{i}y_-$, con $x_\pm$ e $y_\pm$ reali. Infatti, le soluzioni sono sempre date da

$$z_+ = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}, \qquad z_- = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a},$$

con $\Delta = b^2 - 4a \in \mathbb{C}$. Ora, se A e $B \neq 0$ sono due numeri complessi, sia il rapporto A/B che $\sqrt{A}$ sono numeri complessi; infatti, se $A = A_1 + \mathrm{i}A_2$ e $B = B_1 + \mathrm{i}B_2$, si ha

$$\begin{aligned}\frac{A}{B} &= \frac{A_1+\mathrm{i}A_2}{B_1+\mathrm{i}B_2} = \frac{A_1+\mathrm{i}A_2}{B_1+\mathrm{i}B_2}\frac{B_1-\mathrm{i}B_2}{B_1-\mathrm{i}B_2} = \frac{A_1B_1 - A_2B_2 + \mathrm{i}(A_2B_1+A_1B_2)}{B_1^2+B_2^2} \\ &= \frac{A_1B_1-A_2B_2}{B_1^2+B_2^2} + \mathrm{i}\frac{A_2B_1+A_1B_2}{B_1^2+B_2^2},\end{aligned}$$

e

$$\pm\sqrt{A_1+\mathrm{i}A_2} = \pm(\alpha+\mathrm{i}\beta),$$

dove, come si verifica facilmente richiedendo che

$$A_1 + \mathrm{i}A_2 = \alpha^2 - \beta^2 + \mathrm{i}2\alpha\beta,$$

ovvero

$$\alpha^2 - \beta^2 = A_1, \qquad 2\alpha\beta = A_2,$$

si ha

$$\alpha = \sqrt{\frac{A_1+\sqrt{A_1^2+A_2^2}}{2}}, \qquad \beta = \frac{2A_2}{\alpha}.$$

Se ne conclude che $\pm\sqrt{\Delta}$ è un numero complesso ed entrambi i rapporti $-b/2a$ e $\pm\sqrt{\Delta}/2a$ sono numeri complessi, e quindi tali sono anche le loro somme.

1.8.1 Radici di un polinomio a coefficienti complessi

Si è visto che, passando dalle equazioni di primo grado a quelle di secondo grado, se si vuole che le soluzioni appartengano allo stesso insieme numerico dei coefficienti, occorre estendere l'insieme dei numeri che si intende considerare. Nel caso di equazioni di primo grado $ax+b=0$, con $a \neq 0$, si devono prendere $a, b \in \mathbb{Q}$ se si cercano soluzioni in $\mathbb{Q}$, mentre, nel caso di equazioni di secondo grado $ax^2+bx+c=0$, con $a \neq 0$, si devono prendere $a, b, c \in \mathbb{C}$ se si cercano soluzioni che siano sempre in $\mathbb{C}$. Si potrebbe pensare che, considerando equazioni di grado sempre più elevato, sia necessario di volta in volta ampliare l'insieme dei numeri da considerare. Invece, non è questo il caso: le soluzioni di equazioni di grado arbitrario sono sempre e solo numeri complessi.

Infatti, il *teorema fondamentale dell'algebra* assicura che, per qualsiasi equazione algebrica di grado n a coefficienti complessi

$$a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0, \qquad a_n \neq 0,$$

esistono n soluzioni nel campo complesso (quando si considerano equazioni algebriche a coefficienti complessi, si è soliti indicare la variabile con la lettera z anziché con la lettera x). Anche nel caso di coefficienti reali, in generale le soluzioni sono complesse. Dato il polinomio

$$P_n(z) := a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0, \qquad a_n \neq 0,$$

le soluzioni $z_1, z_2, \ldots, z_n$ dell'equazione $P_n(z) = 0$ si chiamano *radici* o *zeri* dell'equazione. Si dice anche che $z_1, z_2, \ldots, z_n$ sono le *radici del polinomio* $P_n(z)$. Alcune radici possono essere uguali tra loro; se z_0 è una radice del polinomio $P_n(z)$ diciamo che z_0 ha *molteplicità* k se possiamo scrivere $P_n(z) = (z - z_0)^k Q_{n-k}(z)$, dove $Q_{n-k}(z)$ è un polinomio di grado $n - k$ tale che $Q_{n-k}(z_0) \neq 0$ (in altre parole $Q_{n-k}(z)$ non ammette z_0 come radice).

Esempi:

1. Il polinomio di secondo grado $z^2 + \mathrm{i}z$ ha due radici, di cui una reale $z = 0$ e una immaginaria pura $z = -\mathrm{i}$.
2. Il polinomio di terzo grado $z^2(z - 1)$ ha 3 radici reali: $z = 0$ con molteplicità 2 e $z = 1$ con molteplicità 1.
3. Il polinomio di terzo grado $(z - 5)(z - 1 - \mathrm{i})(z + 2 - 4\mathrm{i})$ ha tra radici reali, di cui una reale $z = 5$ e due complesse $z = 1 + \mathrm{i}$ e $z = -2 + 4\mathrm{i}$.
4. Il polinomio di quinto grado $6z(z^2 + 1)^2$ ha 5 radici: di esse $z = 0$ è reale e ha molteplicità 1, mentre $z = \mathrm{i}$ e $z = -\mathrm{i}$ sono complesse coniugate e hanno entrambe molteplicità 2.

1.8.2 Radici di un polinomio a coefficienti reali

Se i coefficienti $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ del polinomio $P_n(z)$ sono reali, allora le soluzioni dell'equazione $P_n(z) = 0$ che non sono reali si presentano in coppie di numeri complessi coniugati. In particolare, un'equazione di secondo grado ha o due soluzioni reali, eventualmente coincidenti, o due soluzioni complesse coniugate (cfr. il §1.8).

Esempi:

1. $x^2 - 3x + 2 = 0$ ha due soluzioni reali distinte $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$.
2. $7(x - 1)^2 = 0$ ha due soluzioni reali coincidenti $x_1 = z_2 = 1$.
3. $3x^2 + 3 = 0$ ha due soluzioni complesse coniugate $x_1 = -\mathrm{i}$ e $x_2 = \mathrm{i}$.
4. $x^6 - 7x^2 - 6 = 0$ ha le sei soluzioni $x_1 = -3$, $x_2 = 3$, $x_3 = -\mathrm{i}$, $x_4 = \mathrm{i}$, $x_5 = -2\mathrm{i}$ e $x_6 = 2\mathrm{i}$.
5. $x^3 + 5x = 0$ ha una soluzioni reale $x_1 = 0$ e due complesse coniugate $x_2 = -\sqrt{5}\mathrm{i}$ e $x_3 = \sqrt{5}\mathrm{i}$.
6. $x^{10} + 12x^8 + 48x^6 + 64x^4 = 0$ ha quattro soluzioni reali coincidenti $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$ e sei soluzioni complesse $x_5 = x_6 = x_7 = -2\mathrm{i}$ e $x_8 = x_9 = x_{10} = 2\mathrm{i}$ (dove le ultime tre sono le complesse coniugate delle prime tre).

1.7.3 Fattorizzazione di un polinomio (∗)

Il polinomio $P_n(z)$ di grado n a coefficienti complessi si può sempre scrivere nella forma, (che prende il nome di *fattorizzazione* del polinomio,

$$P_n(z) = a_n(z - z_1)^{m_1} \dots (z - z_s)^{m_s} = a_n \prod_{i=1}^{s} (z - z_i)^{m_i},$$

dove

- $z_1, \dots, z_s$ sono le radici (complesse) distinte del polinomio,
- $m_1, \dots, m_s$ sono le corrispondenti *molteplicità algebriche*, tali che $m_1 + \dots + m_s = n$.

Le radici complesse z_i si possono scrivere nella forma $z_i = x_i + \mathrm{i}y$, con $x_i, y_i \in \mathbb{R}$. Se il polinomio $P_n(z)$ è a coefficient reali, allora, tenendo conto che

- se $x_i + \mathrm{i}y_i$ è una radice, anche $x_i - \mathrm{i}y_i$ è una radice (cfr. il §1.8.2),
- $(z - (x_i + \mathrm{i}y))\,(z - (x_i - \mathrm{i}y)) = z^2 - 2x_i z + x_i^2 + y_i^2$,

se si definisce $p_i = -2x_i$ e $q_i = x_i^2 + y_i^2$, così che

$$z^2 - 2x_i z + x_i^2 + y_i^2 = z^2 + p_i z + q_i,$$

la fattorizzazione di $P_n(z)$ si può scrivere anche nella forma (*fattorizzazione reale*)

$$\begin{aligned} P_n(z) &= a_n(z - z_1)^{m_1} \dots (z - z_r)^{m_r}(z^2 + p_{r+1}z + q_{r+1})^{m_{r+1}} \dots (z + p_{r+t}z + q_{r+t})^{m_{r+t}} \\ &= a_n \left(\prod_{i=1}^{r} (z - z_i)^{m_i} \right) \left(\prod_{i=r+1}^{r+t} (z^2 + p_i z + q_i)^{m_i} \right), \end{aligned}$$

dove

1. $z_1, \dots, z_r$ sono le r radici reali distinte;
2. $z_{r+1}, \dots, z_{r+t}, \overline{z}_{r+1}, \dots, \overline{z}_{r+t}$ sono le $2t$ radici complesse distinte,
3. $p_i = -2x_i$ e $q_i = x_i^2 + y_i^2$ per $i = r+1, \dots, r+t$,
4. m_i è la molteplicità algebrica della radice z_i per $i = 1, \dots, r+t$.

I polinomi di secondo grado che compaiono nella fattorizzazione reale di un polinomio prendono il nome di *polinomi irriducibili*, dal momento che non possono essere ulteriormente fattorizzati a meno di non introdurre polinomi di primo grado a coefficienti complessi.

Esempi:

1. $x^3 + 4x = x(x - 2\mathrm{i})(x + 2\mathrm{i}) = x(x^2 + 4)$ ha una radice reale ($x_1 = 0$) e due radici complesse coniugate ($x_2 = 2\mathrm{i}$ e $x_3 = -2\mathrm{i}$).
2. $x^4 - 5x^3 + x^2 + 21x - 18 = (x - 1)(x - 3)^2(x + 2)$ ha quattro radici reali $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_2 = 3$ e $x_4 = -2$, di cui due coincidenti.

Esercizi:

1. Si fattorizzi il polinomio $P_2(x) = x^2 + x - 6$.
2. Si fattorizzi il polinomio $P_2(x) = 5x^2 - 3x - 2$.
3. Si fattorizzi il polinomio $P_2(x) = x^2 - 4x + 5$.
4. Si fattorizzi il polinomio $P_3(x) = 3x^3 + x^2 + x$.
5. Si fattorizzi il polinomio $P_6(x) = x^6 - 7x^2 - 6$ dell'esempio 4 del §1.8.2.
6. Si fattorizzi il polinomio $P_{10} = x^{10} + 12x^8 + 48x^6 + 64x^4$ dell'esempio 6 del §1.8.2.

Soluzioni:

1. Si ha $P_2(x) = (x-2)(x+3)$.
2. Si ha $P_2(x) = 5\big(x-1\big)\Big(x+\dfrac{2}{5}\Big)$.
3. Si ha $P_2(x) = (x-2-\mathrm{i})(x-2+\mathrm{i})$.
4. Si ha $P_2(x) = 3x\Big(x+\dfrac{1}{6}-\dfrac{\sqrt{11}}{6}\mathrm{i}\Big)\Big(x+\dfrac{1}{6}+\dfrac{\sqrt{11}}{6}\mathrm{i}\Big)$.
5. Si ha $P_6(x) = (x+3)(x-3)(x+\mathrm{i})(x-\mathrm{i})(x+2\mathrm{i})(x-2\mathrm{i})$.
6. Si ha $P_{10}(x) = x^4(x-2\mathrm{i})^3(x+2\mathrm{i})^3$.

1.8.3 Calcolo delle radici di un polinomio

Per quanto il teorema fondamentale dell'algebra assicuri l'esistenza di tante radici quanto è il grado del polinomio, e quindi la possibilità in teoria di fattorizzare il polinomio, in pratica trovare le radici può essere molto complicato se non impossibile.

Esclusi i casi $n = 1$ (banale: il polinomio è gia fattorizzato) e $n = 2$ (che sarà discusso a pag. 42), già nei casi $n = 3$ e $n = 4$ formule risolutive per le radici (dovute rispettivamente a Cardano e a Ferrari) esistono ma sono abbastanza complicate e non sempre di applicazione immediata. Per $n > 5$ si può dimostrare (*teorema di Abel-Ruffini*) che non esistono formule risolutive esprimibili tramite radici.

Complementi (∗):

1. Ogni equazione di terzo grado

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \qquad a \neq 0,$$

può essere portata nella forma

$$y^3 + py + q = 0$$

attraverso un opportuno cambio di variabile. Innanzitutto, dividendo l'equazione per a, si ottiene l'equazione

$$x^3 + b'x^2 + c'x + d' = 0,$$

dove $b' = b/a$, $c' = c/a$ e $d' = d/a$. Scrivendo $x = y + x_0$, con x_0 da determinare, si trova

$$(y + x_0)^3 + b'(y + x_0)^2 + c'(y + x_0) + d' = 0,$$

che, sviluppando le potenze e utilizzando la formula del cubo del binomio (cfr. il §1.2), dà

$$y^3 + 3y^2x_0 + 3yx_0^2 + x_0^3 + b'(y^2 + 2yx_0 + x_0^2) + c'(y + x_0) + d' = 0,$$

così che, scegliendo $x_0 = -b'/3$, si trova $y^3 + py + q = 0$, dove

$$p = -\frac{(b')^2}{3} + c' = -\frac{b^2}{3a^2} + \frac{c}{a}, \qquad q = \frac{(2b')^3}{27} - \frac{b'c'}{3} + d' = \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a}.$$

In conclusione il cambio di variabile richiesto è dato da $y = x - x_0 = x + (b/3a)$.

2. *Formula risolutiva di Cardano.* Le radici dell'equazione di terzo grado $y^3 + py + q = 0$ sono data dalla *formula di Cardano*:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Questo si può dimostrare ragionando come segue. Se si scrive $y = u + v$, si vede che

$$y^3 = (u + v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 = u^3 + 3uv(u + v) + v^3 = (3uv)\, y + (u^3 + v^3),$$

così che, se u e v sono tali che

$$uv = -\frac{p}{3}, \qquad u^3 + v^3 = -q,$$

allora $y = u + v$ risolve l'equazione

$$y^3 + py + q = 0.$$

Se definiamo $U = u^3$ e $V = v^3$, dal momento che $u^3v^3 = -p^3/27$, allora U e V devono soddisfare le condizioni

$$UV = -\frac{p^3}{27}, \qquad U + V = -q.$$

Esplicitando V in funzione di U nella prima equazione, ovvero scrivendo $V = -q - u$, otteniamo l'equazione di secondo grado in U

$$U(-q - U) = -\frac{p^3}{27} \quad \Longrightarrow \quad U^2 + qU - \frac{p^3}{27} \quad \Longrightarrow \quad U = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}},$$

da cui si ricava anche

$$V = -q - U = -\frac{q}{2} \mp \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}.$$

Tornando alla variabile y, dal momento che scambiando il ruolo di u e v il valore di y non cambia, possiamo assumere senza perdita di generalità che si abbia

$$U = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}, \qquad V = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}},$$

e ricordando infine che $y = u + v = \sqrt[3]{U} + \sqrt[3]{V}$ si ottiene la formula di Cardano.

3. La formula di Cardano individua sempre tre radici complesse. Definiti U e V come al punto 2, ciascuna delle due equazioni $v^3 = V$ e $u^3 = U$ ammette 3 radici complesse, di cui una reale e due complesse coniugate, quindi ci sono in principio 9 valori per $y = u + v$. Tuttavia u e v devono soddisfare la condizione $uv = -p/3$. Pertanto se u è reale anche v deve essere reale, mentre se u è complesso allora v deve essere la radice complessa di $v^3 = V$ che rende il prodotto uv reale: quindi u e v devono essere della forma $u = \rho_1 z$ e $v = \rho_2 \bar{z}$, con $\rho_1, \rho_2 \in \mathbb{R}$ e $z \in \mathbb{C}$. In conclusione, per ogni radice u di $u^3 = U$, la radice v di $v^3 = V$ è fissata in modo univoco dalla condizione $uv = -p/3$.

4. È utile osservare che se un'equazione di terzo grado $x^3 + px + q = 0$ ha tre radici reali allora necessariamente
$$\Delta_0 := \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$$
deve essere negativo. Infatti, se fosse $\Delta_0 > 0$ allora U e V sarebbero reali e distinti, quindi le due equazioni $u^3 = U$ e $v^3 = V$ ammetterebbero ciascuna una sola soluzione reale: di conseguenza le altre due radici sarebbero complesse della forma $u = \rho_1 z$ e $v = \rho_2 \bar{z}$, con $\rho_1 \neq \rho_2$ (altrimenti si avrebbe $U = V$), da cui seguirebbe che il corrispondente valore di y non può essere reale. Per esempio l'equazione $x^3 - 7x + 6 = 0$ ammette le tre radici reali 1, 2 e -3 (come è facile verificare per calcolo diretto) e, corrispondentemente, $\Delta_0 < 0$. Invece, nel caso dell'equazione $x^3 + x = 0$ (che ammette le tre radici 0 e $\pm i$), si ha $\Delta_0 > 0$.

2 | Funzioni reali di variabile reale

2.1 Piano cartesiano

Si definisce $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\}$. Quindi $\mathbb{R}^2$ è il *prodotto cartesiano* di $\mathbb{R}$ con se stesso, i.e. l'insieme di tutte le possibili coppie ordinate (x, y) con $x, y \in \mathbb{R}$.

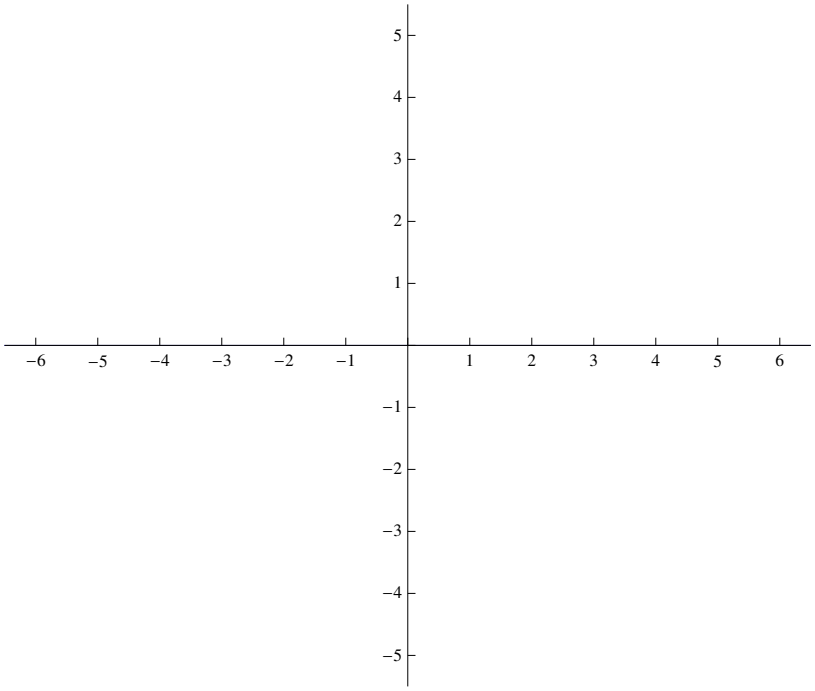


Figura 2.1: Piano cartesiano.

Se si considera un sistema di assi ortogonali nel piano sui quali sia stata introdotta la stessa unità di misura (*sistema di riferimento*), si ha una corrispondenza biunivoca tra i punti del piano e gli elementi di $\mathbb{R}^2$ (cfr. la Figura 2.1). In particolare possiamo supporre che una delle due rette sia orizzontale e l'altra verticale: chiameremo *asse x* o *asse delle ascisse* la retta orizzontale e *asse y* o *asse delle ordinate* la retta verticale. Il punto in cui l'asse x e l'asse y si incontrano si

chiama *origine*. Il piano reale in cui sia stato introdotto un sistema di riferimento si chiama *piano cartesiano* e gli assi delle ascisse e delle ordinate si chiamano *assi cartesiani* o *assi coordinati*. Si chiamano *coordinate* le coppie (x, y), dove x è l'*ascissa* e y è l'*ordinata*: ogni punto è identificato dalla coppia delle sue coordinate e *vice versa*.

Esercizi:

1. Si considerino nel piano xy le rette di equazione $y = x$ e $y = 1$: se ne trovi l'intersezione e si caratterizzi analiticamente l'insieme A che sta al di sotto di entrambe le rette.
2. Si considerino nel piano xy il cerchio di raggio unitario e centro nell'origine e la retta di equazione $y = 0$: se ne trovi l'intersezione e si caratterizzino analiticamente i due sottoinsiemi in cui la retta divide il cerchio.
3. Si considerino gli insiemi

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}, \qquad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 0\}.$$

   Si determinino $A \cup B$ e $A \cap B$, e si disegnino i quattro insiemi. Si verifichi in particolare che $A \cap B$ è costituito da due quadrati e se ne calcoli l'area.
4. Si considerino gli insiemi

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > x^2 - 1\}, \qquad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < 1 - x^2\}.$$

   Si determinino $A \cup B$ e $A \cap B$ e si disegnino i quattro insiemi.

Soluzioni:

1. Si ha $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 1, y \leq x\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1, y \leq 1\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq \min\{x, 1\}$.
2. L'intersezione del cerchio e della retta individua il segmento che collega i punti $(-1, 0)$ e $(1, 0)$. La retta divide il cerchio nei due semicerchi $C_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, y > 0\}$ e $C_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, y < 0\}$.
3. I quattro insiemi sono disegnati nella Figura 2.2. L'insieme $A \cap B$ è costituito da due quadrati di lato 1, quindi hanno entrambi area 1.

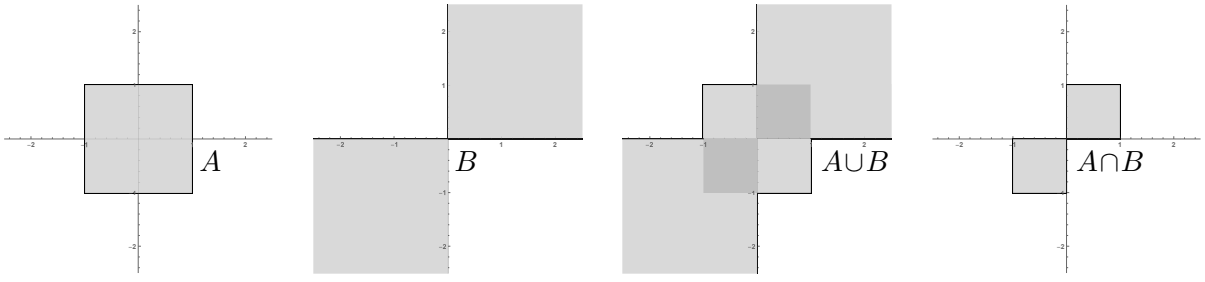


Figura 2.2: Insiemi A, B, $A \cup B$ e $A \cap B$ dell'esercizio 3.

4. L'insieme A è costituito dai punti del piano che sono al di sopra della parabola $y = x^2 - 1$, mentre l'insieme B è costituito dai punti che sono al di sotto della parabola $y = -x^2 + 1$. I due insiemi, la loro unione e la loro intersezione sono disegnati nella Figura 2.3:

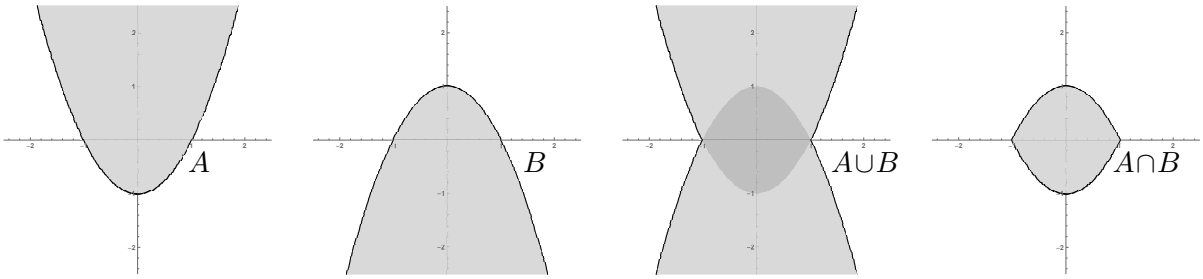


Figura 2.3: Insiemi A, B, $A\cup$ e $A \cap B$ dell'esercizio 4.

2.2 Modulo di un numero reale

Il *modulo* o *valore assoluto* di x è definito come:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Per definizione, il modulo di un numero reale è sempre non negativo, ed è positivo tranne nel caso in cui il numero sia lo zero (si ha $|0| = 0$). Il modulo di un numero positivo è il numero stesso (per esempio $|2| = 2$), mentre il modulo di un numero negativo è il numero positivo che si ottiene cambiando segno (per esempio $|-2| = 2$).

Osservazioni:

1. Poiché $|0| = 0$, si può anche definire, in modo assolutamente equivalente, $|x| = x$ per $x > 0$ e $|x| = -x$ per $x \leq 0$.
2. Dalla definizione e dall'osservazione precedente segue che:
   (a) $|x| \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$;
   (b) $\forall x \in \mathbb{R}$ si ha $|x| = |-x|$;
   (c) $\forall x \in \mathbb{R}$ si ha $x \leq |x|$ e $-x \leq |x|$;
   (d) dati $x, y \in \mathbb{R}$, se $x \leq y$ e $-x \leq y$ allora $|x| \leq y$.

Esempi:

1. $|x-1| = \begin{cases} x-1, & x \geq 1, \\ 1-x, & x < 1. \end{cases}$
2. $|x^2| = x^2$.

3. $|x^3| = \begin{cases} x^3, & x \geq 0, \\ -x^3, & x < 0. \end{cases}$
4. $|x-1|(x+1) = \begin{cases} x^2-1, & x \geq 1, \\ 1-x^2, & x < 1. \end{cases}$
5. $|x^2-3| = \begin{cases} x^2-3, & x \leq -\sqrt{3} \text{ oppure } x \geq \sqrt{3}, \\ -x^2+3, & -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}. \end{cases}$
6. $|x^2-3|(x^2-x+1) = \begin{cases} x^4-x^3-2x^2+3x-3, & x \leq -\sqrt{3} \text{ oppure } x \geq \sqrt{3}, \\ -x^4+x^3+2x^2-3x+3, & -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}. \end{cases}$
7. $|x-2|\,|x+1| = \begin{cases} x^2-x-2, & x \geq 2 \text{ oppure } x < -1, \\ -x^2+x+2, & -1 \leq x < 2. \end{cases}$
8. $|x^2+1|\,|x^2-1| = \begin{cases} x^4-1, & x \geq 1 \text{ oppure } x \leq -1, \\ -x^4+1, & -1 < x < 1. \end{cases}$

Proprietà del modulo:

1. $\forall x, y \in \mathbb{R}$ si ha $|x+y| \leq |x| + |y|$.
2. $\forall x, y \in \mathbb{R}$ si ha $|x-y| \geq ||x| - |y||$.
3. $\forall x, y \in \mathbb{R}$ si ha $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.
4. $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $y \neq 0$, si ha $|x/y| = |x|/|y|$.
5. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ si ha $|x-y| \leq |x-z| + |z-y|$.

Osservazione: La diseguaglianza in 5 è nota come *diseguaglianza triangolare*.

Dimostrazioni $(*)$:

1. Se $x+y \geq 0$ si ha $|x+y| = x+y \leq |x|+|y|$; se $x+y < 0$ si ha $|x+y| = -(x+y) = -x-y \leq |x|+|y|$.
2. Sia $z = x-y \Longrightarrow x = y+z$, quindi $|x| = |z+y| \leq |z|+|y| = |x-y|+|y| \Longrightarrow |x|-|y| \leq |x-y|$ $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Scambiando tra loro x e y (i.e. ridefinendo $z = y-x$ e ripetendo l'argomento) si ottiene anche $|y|-|x| \leq |y-x|$ $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Poiché $|x-y| = |y-x|$ si ottiene quindi $\pm(|x|-|y|) \leq |x-y| \Longrightarrow ||x|-|y|| \leq |x-y|$ [per l'osservazione 2d].
3. Se $x, y > 0$ si ha $|x \cdot y| = x \cdot y = |x| \cdot |y|$; se $x, y < 0$ si ha $|x \cdot y| = (-x) \cdot (-y) = |x| \cdot |y|$; se $y < 0 < x$ si ha $|x \cdot y| = -xy = |x| \cdot |y|$.
4. Segue da 3, prendendo $1/y$ invece di y.
5. Si ha $|x-y| = |x-z+z-y| \leq |x-z| + |z-y|$ [per 1].

Esercizi:

1. Si rappresentino sul piano l'insieme dei punti (x, y) che verificano $|x| \leq |y|$.
2. Si rappresentino sul piano l'insieme dei punti (x, y) che verificano $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$.
3. Si rappresentino sul piano l'insieme dei punti (x, y) che verificano $|xy| \leq 1$.
4. Si rappresentino sul piano l'insieme dei punti (x, y) che verificano $|x| \leq 1$, $|y| \leq |x|$.

Soluzioni:

1. Nel primo quadrante, dove $x, y \geq 0$, la condizione $|x| \leq |y|$ diventa $y \geq x \geq 0$, quindi la parte dell'insieme che cade nel primo quadrante è costituita dai punti (x, y) che si trovano al di sopra della bisettrice $y = x$. Nel secondo quadrante, dove $x < 0 \leq y$, la condizione $|x| \leq |y|$ diventa $0 < -x \leq y$, ovvero $y \geq -x$, con $x < 0$, quindi la parte dell'insieme che cade nel secondo quadrante è costituita dai punti (x, y) che si trovano al di sopra della bisettrice $y = -x$. Analogamente si trova che la parte dell'insieme nel terzo quadrante, dove $|x| \leq |y|$ diventa $0 \leq -x \leq -y$, e quella nel quarto quadrante, $|x| \leq |y|$ diventa $0 \leq x \leq -y$, sono costituite dai punti (x, y) che si trovano al di sotto della bisettrice $y = x$ e al di sotto dela bisettrice $y = -x$, rispettivamente. Si ottiene quindi il *cono* rappresentato nella Figura 2.4, in alto a sinistra.
2. L'insieme è costituito dal quadrato con centro l'origine e lati di lunghezza $\ell = 2$ paralleli agli assi coordinati (cfr. la Figura 2.4, in alto a destra).
3. Se $x = 0$ la condizione $|xy| \leq 1$ è soddisfatta per ogni $y \in \mathbb{R}$, quindi l'insieme contiene l'asse y. Se $x \neq 0$, Nel primo quadrante, la condizione $|xy| \leq 1$ diventa $xy \leq 1$, ovvero $y \leq 1/x$, quindi la parte dell'insieme contenuta nel primo quadrante è costituita dai punti che sono al di sotto dell'iperbole $y = 1/x$, con $x > 0$. Ragionando in modo analogo si trova che la parte dell'insieme nel secondo quadrante, quella nel terzo quadrante e quella nel quarto quadrante sono costituite dai punti che si trovano al di sotto dell'iperbole $y = -1/x$, con $x > 0$, al di sopra dell'iperbole $y = 1/x$, con $x < 0$, e al di sopra dell'iperbole $y = -1/x$, con $x > 0$, rispettivamente (cfr. la Figura 2.4, in basso a sinistra).
4. L'insieme considerato si può scrivere come intersezione di due insiemi, i.e. nella forma $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \leq |x|\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x \leq 1|\}$. Per il primo dei due, si ragiona come per l'esercizio 1, con il ruolo di x e y scambiati. Il secondo è costituito dalla striscia costituita da tutti i punti (x, y), con y arbitrario e $-1 \leq x \leq 1$. Si ottiene quindi il cono di altezza finita rappresentato nella Figura 2.4, in basso a destra.

2.3 Funzione reale di variabile reale

Si definisce *variabile* una grandezza che può assumere più valori: per esempio $x \in I$, dove I può essere un intervallo o, più in generale, un sottoinsieme dell'asse reale.

Definizione 2.1. *Funzione reale di variabile reale è una legge f che associa a ogni numero reale $x \in I$ un valore reale $y = f(x)$.*

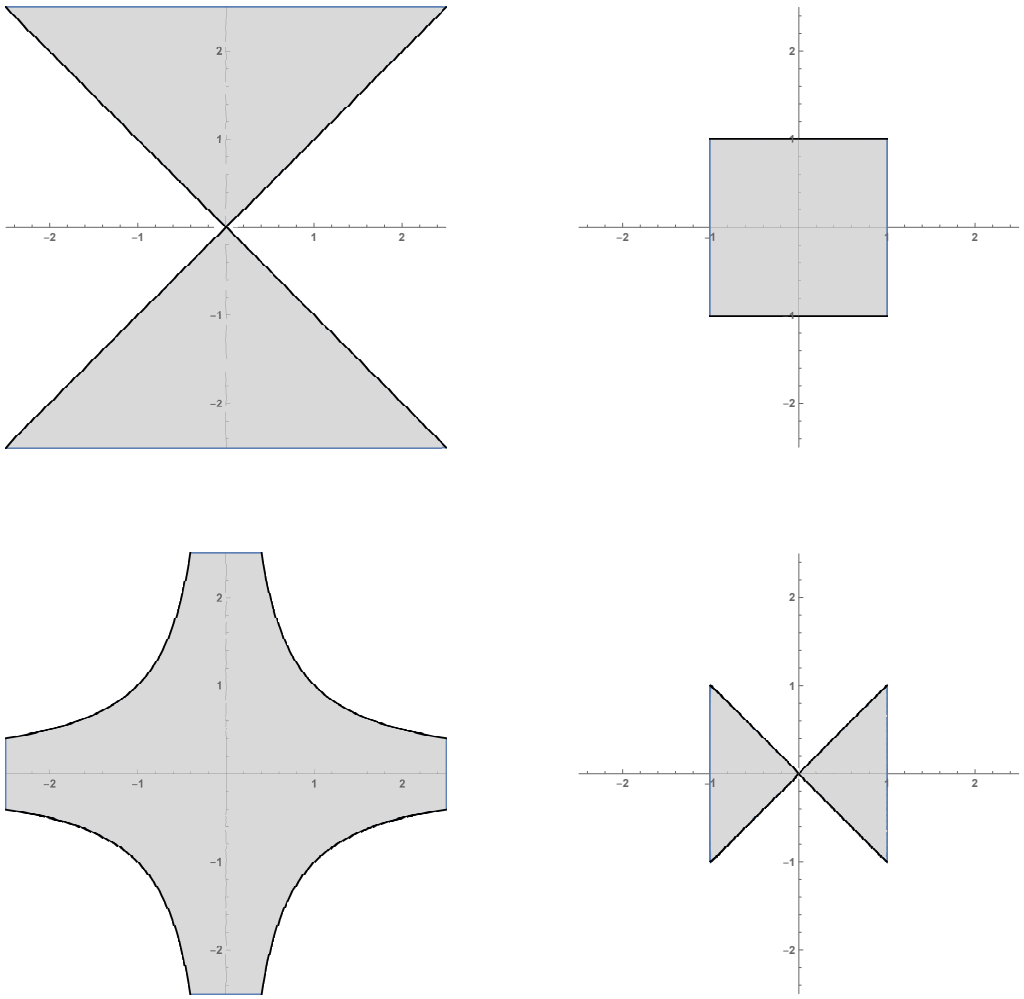


Figura 2.4: Insiemi descritti dalle condizioni degli esercizi alla fine del §2.2.

Esempi:

1. Se $I = \{0.5, 2, 6\}$ si può considerare la funzione f definita ponendo $f(0.5) = 1$, $f(2) = 2$ e $f(6) = 4$.
2. Se $I = [1, 2]$ si può considerare la funzione f definita ponendo $f(x) = x^2$ per $x \in I$

Osservazione: In linea di principio si possono considerare funzioni che associano alla variabile x più di un valore (*funzioni a più valori* o *funzioni multivoche* o *funzioni polidrome*). Noi considereremo esclusivamente *funzioni univoche*, i.e. funzioni che a ogni $x \in I$ associano uno e un solo valore $f(x)$.

Definizione 2.2. *L'insieme dei valori x per i quali il valore y è dato secondo la legge f si chiama* campo di definizione *o* campo di esistenza *o* dominio. *Se I è il dominio di f scriviamo* $f : I \to \mathbb{R}$.

Se f è assegnata senza specificare il suo campo di definizione si intende che va considerato come dominio l'insieme D_f di tutti i valori su cui f è definito.

Esempi:

1. Il dominio della funzione $f(x) = x$ è $D_f = \mathbb{R}$.
2. Il dominio della funzione $f(x) = x^2$ è $D_f = \mathbb{R}$.
3. Il dominio della funzione $f(x) = |x|$ è $D_f = \mathbb{R}$.
4. Il dominio della funzione $f(x) = \sqrt{x}$ è $D_f = \mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$.
5. Il dominio della funzione $f(x) = 1/x$ è $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$.
6. Il dominio della funzione $f(x) = 1/(x^2 - 1)$ è $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$.
7. Il dominio della funzione $f(x) = 1/(x^2 - 3)$ è $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{3}\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \pm\sqrt{3}\}$.
8. Il dominio della funzione
$$f(x) = \sqrt{(x-1)(x+3)}$$
è $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1 \text{ o } x \leq -3\}$.
9. Il dominio della funzione
$$f(x) = \sqrt{(x^2-4)(x^2-1)}$$
si ottiene osservando innanzitutto che $x^2 - 4 \geq 0$ se e solo se $x^2 \geq 4$ ovvero se e solo se $x \geq 2$ oppure $x \leq -2$, e, analogamente, $x^2 - 1 \geq 0$ se e solo se $x \geq 1$ oppure $x \leq -1$. Inoltre si ha $(x^2 - 4)(x^2 - 1) \geq 0$ se $x^2 - 4$ e $x^2 - 1$ sono entrambi positivi o entrambi negativi: il primo caso si presenta se $x \geq 2$ e $x \geq 1$ oppure $x \geq 2$ e $x \leq -1$ oppure $x \leq -2$ e $x \geq 1$ oppure $x \leq -2$ e $x \leq -1$, mentre il secondo caso richiede $-1 \leq x \leq 1$ e $-2 \leq x \leq 2$. Le cinque condizioni sono verificate, rispettivamente, per $x \geq 2$, per $x \in \emptyset$ (ovvero per nessun x), per $x \in \emptyset$, per $x \leq -2$ e per $-1 \leq x \leq 1$. Si trova pertanto
$$\begin{aligned} D_f &= \{x \in \mathbb{R} : x \geq 2 \text{ o } x \leq -2 \text{ o } -1 \leq x \leq 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x \geq 2\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x \leq -2\} \cup \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 1\} \end{aligned}$$
10. Il dominio della funzione
$$f(x) = 1/\sqrt{(x^2-4)(x^2-1)}$$
è
$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x > 2\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x < -2\} \cup \{x \in \mathbb{R} : -1 < x < 1\}.$$
Infatti, rispetto alla funzione dell'esercizio 9, occorre escludere i valori $x \in \mathbb{R}$ in cui l'argomento della radice si annulla.

Definizione 2.3. *Si chiama* codominio *di f l'insieme C_f dei valori assunti da $f(x)$ al variare di $x \in I$: $C_f = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in I \text{ tale che } y = f(x)\}$.*

Esempi:

1. Se $f(x) = x$, il codominio è $C_f = \mathbb{R}$.

2. Se $f(x) = x^2$, il codominio è $C_f = \mathbb{R}_+$.
3. Se $f(x) = \sqrt{x}$, il codominio è $C_f = \mathbb{R}_+$.
4. Se $f(x) = 1/x$, il codominio è $C_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
5. Se $f(x) = |x|$, il codominio è $C_f = \mathbb{R}_+$.
6. Se $f(x) = x^2 + x^4$, il codominio è $C_f = \mathbb{R}_+$.
7. Se $f(x) = 1/x^2$, il codominio è $C_f = \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$.
8. Se $f(x) = 1/(x^2 - 1)$, il codominio è $C_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
9. Se $f(x) = \sqrt{(x^2 - 4)(x^2 - 1)}$, il codominio è $C_f = \mathbb{R}_+$.
10. Se $f(x) = 1/\sqrt{(x^2 - 4)(x^2 - 1)}$, il codominio è $C_f = \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$. Infatti, per $x \in D_f$ (cfr. l'esercizio 10 dopo la Definizione 2.2), l'argomento della radice è sempre positivo, ma può diventare arbitrariamente piccolo, e, inoltre, diventa arbitrariamente grande per x molto grande.

In genere se si vuole studiare una funzione a valori reali, di cui non si conoscono dominio e codominio, per prima cosa si cercherà di individuarne il dominio $I = D_f$. Si scriverà allora $f : I \to \mathbb{R}$. Una volta determinato il codominio C_f, si potrà essere più precisi scrivendo $f : I \to C_f$.

Usualmente individuare il dominio di una funzione non presenta particolari difficoltà. Al contrario deteremnarne il codominio può essere più problematico e spesso richiede uno studio approfondito della funzione.

Esempi:

1. Si consideri la funzione
$$f(x) = \frac{(x-3)(x+2)}{x^2+4}.$$
Si vede immediatamente che $D_f = \mathbb{R}$, mentre per trovarne il codominio occorre studiare la funzione in dettaglio (cfr. il capitolo 9): si trova $C_f = [-3/2, 1)$.
2. Analoghe considerazioni valgono per la funzione
$$f(x) = \frac{(x^2-3)(x+4)}{(x^2+4)(x-1)},$$
per cui è facile vedere che $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$. Per determinare C_f occorre lavorare di più; procedendo secondo lo schema del capitolo 9 si trova $C_f = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.

2.4 Grafico di una funzione reale di variabile reale

Per studiare il comportamento di una funzione, in particolare per individuarme il codominio, spesso è conveniente rappresentare la funzioni graficamente, nel modo seguente. Data una funzione $f : I \to \mathbb{R}$, che a $x \in I$ associa $f(x) \in \mathbb{R}$, consideriamo per ogni $x \in I$ il punto $P = (x, f(x)) \in \mathbb{R}^2$.

Definizione 2.4. *Data una funzione* $f\colon I \to \mathbb{R}$*, l'insieme*

$$\mathrm{graf}(f) := \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in I\}$$

prende il nome grafico *di* f*.*

Osservazione: Il grafico di una funzione è un sottoinsieme del piano cartesiano. Più precisamente è l'insieme dei punti (x, y) tali che $x \in I$ e $y = f(x)$. Per costruzione a ogni punto $x \in I$ corrisponde uno e un solo punto del piano cartesiano.

Esempi:

1. Il grafico della funzione dell'esempio 1 dopo la Definizione 2.1 è costituita dai tre punti $(0.5, 1)$, $(2, 2)$ e $(6, 4)$ (cfr. la Figura 2.5, a sinistra).
2. Il grafico della funzione dell'esempio 1 dopo la Definizione 2.1 è costituita dai ramo di parabola rappresentato nella Figura 2.5, a destra.

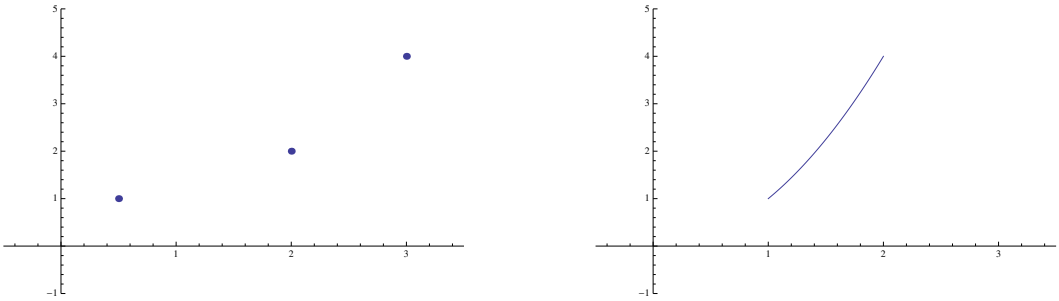


Figura 2.5: Grafici delle funzioni $f(x)$ considerate negli esempi dopo la Definizione 2.1.

Definizione 2.5. *Una funzione* $f : I \to \mathbb{R}$ *si dice* periodica *in* I *se esiste* $T > 0$ *tale che* $f(x + T) = f(x)$ $\forall x \in I$*. Il più piccolo* T *per cui questo accade si chiama* periodo fondamentale *o semplicemente* periodo *della funzione.*

Osservazioni:

1. Un funzione periodica è in sostanza una funzione che si ripete a intervalli regolari.
2. *Estensione di una funzione a una funzione periodica* $(*)$. Ogni funzione $f(x)$ che sia definita in un intervallo chiuso $I = [a, b]$ si può estendere a una funzione periodica $g(x)$ di periodo $T = b - a$ definita in tutto $\mathbb{R}$. Per estenderla a destra di b, si ragiona come segue: in $[b, b + T]$ si pone $g(x) = f(x - T)$, dove $x - T \in [a, b]$ così che $f(x - T)$ è definito; in $[b + T, b + 2T]$ si pone $g(x) = f(x - 2T)$, dove di nuovo $x - 2T \in [a, b]$ così che $f(x - 2T)$ è definito; in generale, per ogni $k \in \mathbb{N}$, in $[b + kT, b + (k + 1)T]$ si pone $g(x) = f(x - (k + 1)T)$. Per estenderla a sinistra di a, si ragiona come segue: in $[a - T, a]$ si pone $g(x) = f(x + T)$, dove $x + T \in [a, b]$; in $[a - 2T, a - T]$ si pone $g(x) = f(x + 2T)$, dove di nuovo $x - +2T \in [a, b]$; in generale, per ogni $k \in \mathbb{N}$, in $[a - (k + 1)T, a - kT]$ si pone $g(x) = f(x + (k + 1)T)$.

3. Esempi di funzioni periodiche sono le funzioni trigonometriche che vedremo più avanti (cfr. il §3.6).
4. La funzione $f(x) =$ costante è una funzione periodica per la quale non è tuttavia definito il periodo, in quanto non esiste un T minimo tale che $f(x+T) = f(x)$. Infatti, se $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è costante, si ha $f(x+T) = f(x)$ per ogni $T \in \mathbb{R}$.

Esempi di grafici di funzioni periodiche sono illustrati nella Figura 2.6: la funzione $f_1(x)$ il cui grafico è rappresentato a sinistra ha periodo $T = 2$, mentre la funzione $f_2(x)$ il cui grafico è rappresentato a destra ha periodo $T = 2/3$: infatti si ha $f_1(x+2) = f_1(x)$ e si ha $f_2(x+(2/3)) = f_2(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

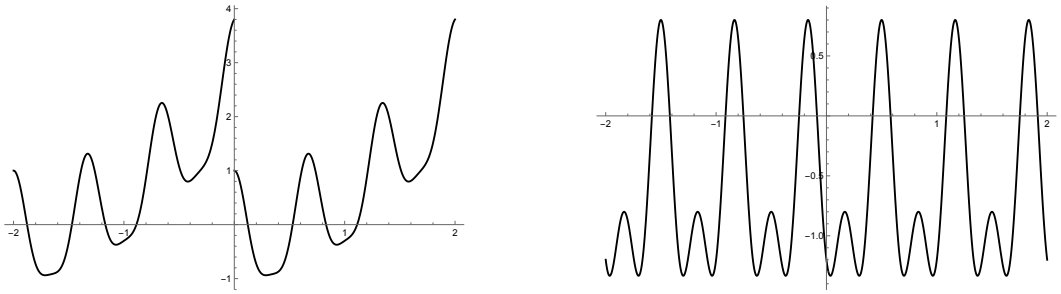


Figura 2.6: Grafici delle due funzioni periodiche $f_1(x)$ e $f_2(x)$.

Si noti che le due due funzioni $f_1(x)$ e $f_2(x)$ hanno un comportamento molto diverso: la funzione $f_1(x)$ ha un "salto" per ogni $x = 2k$ con $k \in \mathbb{Z}$ (ovvero in $x = 0$, $x = \pm 2$, ecc.), mentre il grafico della funzione $f_2(x)$ si riesce a tracciare su un foglio "senza mai staccare la penna" (cfr. il §6 sulle funzioni continue).

3 | Funzioni elementari principali

3.1 Funzioni elementari principali

Si chiamano *funzioni elementari principali* le seguenti funzioni:

1. *funzione potenza* x^α, dove $\alpha \in \mathbb{R}$ è l'*esponente*;
2. *funzioni trigonometriche*: $\sin x$ (seno), $\cos x$ (coseno), $\tan x$ o $\operatorname{tg} x$ (tangente), $\operatorname{cotan} x$ o $\operatorname{cotg} x$ (cotangente), $\sec x$ (secante), $\operatorname{cosec} x$ (cosecante);
3. *funzione logaritmo*: $\log_a x$, dove a è la *base* (se $a = 10$ si scrive $\log_{10} x = \log x$; se $a = e$ si scrive $\log_e x = \ln x$);
4. *funzione esponenziale*: a^x, dove $a \in \mathbb{R}$ è la *base* (particolaremente interessanti sono i casi $a = 10$ e $a = e$).

Osservazione: La base e ai punti 3 e 4 è il numero di Nepero che verrà definito più avanti (cfr. l'osservazione 1 del §5.7). A volte si usa la notazione $\log x$ anche per indicare il logaritmo in base e: di fatto, se la notazione $\log x$ indichi il logaritmo in base 10 o il logaritmo in base e si deduce dal contesto in cui è usata.

3.2 Domini e grafici delle funzioni potenze

La funzione *potenza* è la funzione $f(x) = x^\alpha$, dove $\alpha \in \mathbb{R}$ prende il nome di *esponente*. Il dominio di definizione dipende dal valore dell'esponente α.

Il caso $\alpha = 0$ è banale perché $x^0 = 1\ \forall x \neq 0$. Se interpretiamo $0^0 = 1$ (cfr. l'osservazione finale nel §1.4), allora la potenza $x^0 = 1$ è la funzione costante identicamente uguale a 1.

Se $\alpha \neq 0$, consideriamo prima il caso $\alpha > 0$.

Se $\alpha > 0$ e $\alpha \in \mathbb{Q}$, i.e. se $\alpha = p/q$, con $p, q \in \mathbb{N}$, possiamo supporre senza perdita di generalità che p e q siano primi tra loro ed entrambi positivi (cfr. l'osservazione 2 del §1.4). Se $q = 1$, x^p è semplicemente il prodotto di x per sè stesso p volte:

$$x^p = \underbrace{x \cdot \ldots \cdot x}_{p \text{ volte}}.$$

Se invece $p = 1$, $x^{1/q}$ è il numero y tale che

$$y^q = \underbrace{y \cdot \ldots \cdot y}_{q \text{ volte}} = x.$$

Se q è pari, tale numero esiste solo se $x \geq 0$. Pertanto, in generale, il numero $y = x^{p/q}$ è il numero la cui potenza con esponente q è uguale alla potenza con esponente p del numero x, i.e. $y^q = x^p$. Se q è dispari, tale numero y esiste per ogni x, mentre se q è pari esso esiste solo se $x \geq 0$.

Se invece $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, la potenza x^α si calcola passando attraverso la funzione esponenziale (cfr. il §3.7) e la funzione logaritmo (cfr. il §3.8), ponendo $x^\alpha = \exp(\alpha \ln x)$, che è ben definito per $x > 0$ e si pone uguale a 0 per $x = 0$.

Se infine $\alpha < 0$, si può scrivere $x^\alpha = x^{-\beta} = 1/x^\beta$, con $\beta = -\alpha > 0$. Il dominio di x^α, con $\alpha < 0$, differisce da quello della potenza con esponente positivo in quanto il punto $x = 0$ va escluso.

In conclusione, riguarda al dominio della funzione potenza, possiamo riassumere la situazione come segue:

- se $\alpha = p/q$, con q dispari, si ha $D_f = \mathbb{R}$;
- se $\alpha = p/q$, con q pari, oppure $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (irrazionale) allora $D_f = \mathbb{R}_+$.

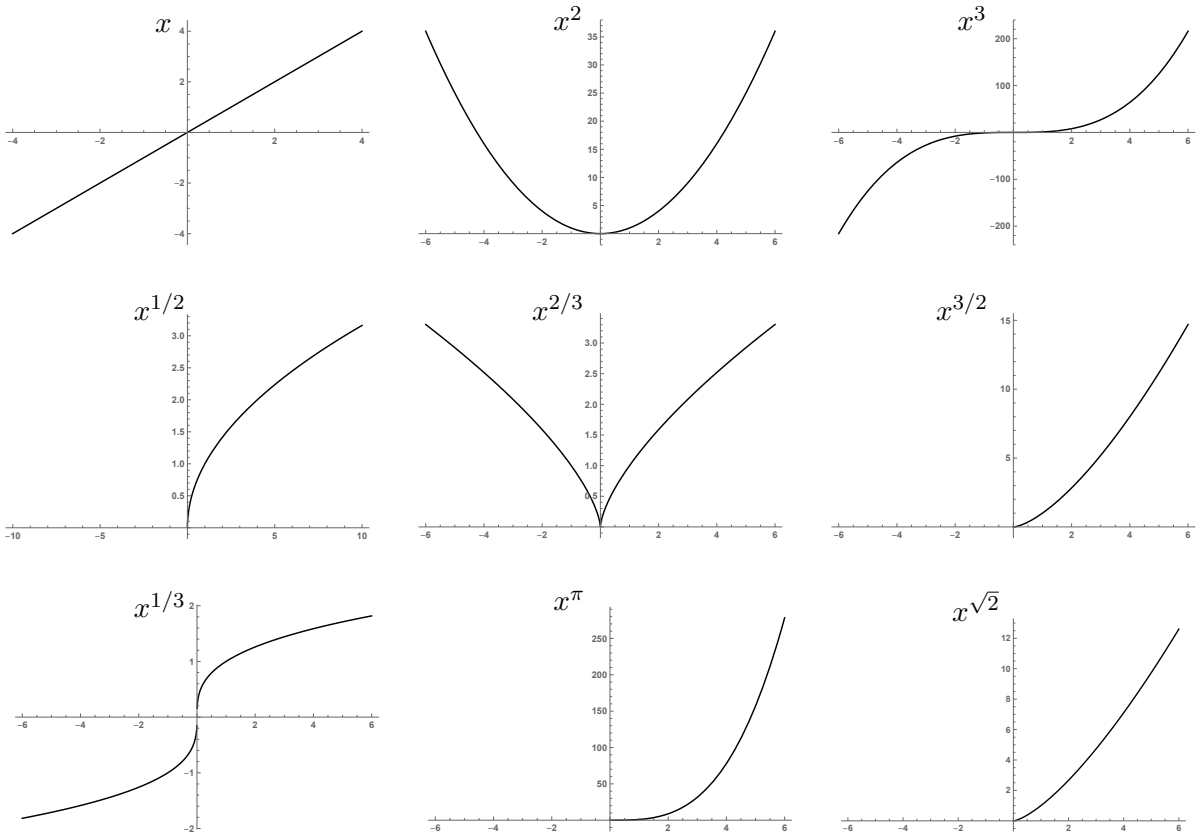


Figura 3.1: Grafici di alcune potenze con esponente positivo.

Esempi di grafici di potenze sono riportati in Figura 3.1, per alcuni valori $\alpha > 0$, e in Figura 3.2, per alcuni valori di $\alpha < 0$ (si noti che nelle figure gli assi delle ascisse e delle ordinate non sono nella stessa scala; in particolare, anche se è non evidente dalla figura, il grafico di $f(x) = x$ è la bisettrice del primo quadrante).

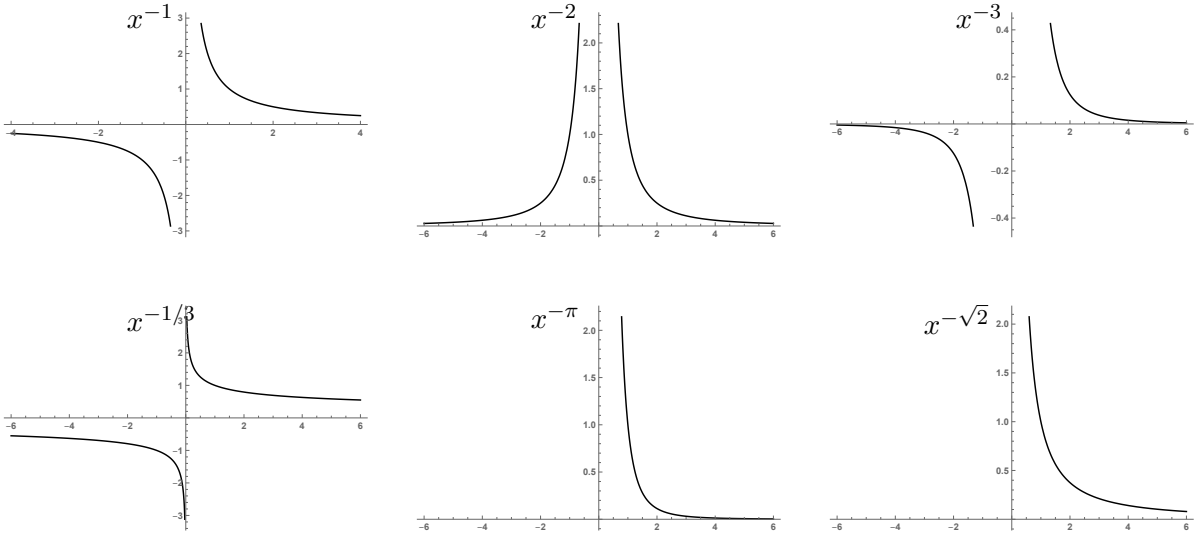


Figura 3.2: Grafici di alcune potenze con esponente negativo

Osservazioni:

1. Si verifica che $f(1) = 1^\alpha = 1$, indipendentemente dal valore di α.
2. Per $x \geq 0$, si ha la situazione seguente (cfr. gli esempi in Figura 3.1):
   - se $\alpha = 1$ il grafico di $f(x) = x$ è una retta passante per l'origine (bisettrice del primo e terzo quadrante);
   - se $\alpha > 1$ il grafico è una curva che si mantiene al di sotto della retta per $x < 1$ e al di sopra per $x > 1$;
   - se $\alpha < 1$ il grafico è una curva che si mantiene al di sopra della retta per $x < 1$ e al di sotto per $x > 1$
3. Se $\alpha = 1/n$ spesso si usa la notazione $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$. In particolare se $n = 2$ si scrive semplicemente $\sqrt[2]{x} = \sqrt{x}$.
4. Sia $f(x) = x^\alpha$. Per $x \geq 0$ si ha $f(x) \geq 0$ per ogni valore di α. Per $x < 0$, quando la funzione è definita, ovvero per $\alpha = p/q$, con q dispari, si ha $f(x) > 0$ se p è pari (per esempio: $f(x) = x^2$, $f(x) = x^{-2}$, $f(x) = x^{2/3}$) e $f(x) < 0$ se p è dispari (per esempio: $f(x) = x$, $f(x) = x^3$, $f(x) = x^{1/3}$).

3.3 Equazioni di primo e secondo grado

3.3.1 Equazione di primo grado $ax + b = 0$, $a \neq 0$

La soluzione dell'equazione $ax+b = 0$, $a \neq 0$, è $x = -b/a$. Graficamente la funzione $f(x) = ax+b$ rappresenta una retta che attraversa l'asse x nel punto $x = -b/a$ e l'asse y nel punto $y = b$; ved. Figura 3.3. In particolare a è il *coefficiente angolare* della retta: si ha $a = \operatorname{tg} \varphi$, dove φ è l'angolo che la retta forma con l'asse x.

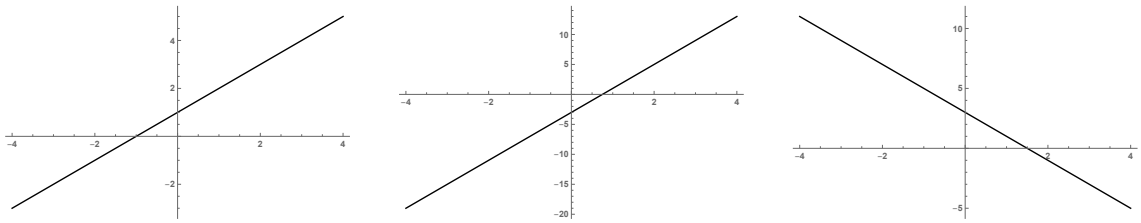


Figura 3.3: Grafici di alcune rette.

3.3.2 Equazione di secondo grado $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$

L'equazione $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, ha due soluzioni in $\mathbb{C}$:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

In particolare, definendo il *discriminante*

$$\Delta = b^2 - 4ac,$$

se $\Delta > 0$ le due soluzioni sono reali e distinte, se $\Delta = 0$ le due soluzioni sono reali e coincidenti, se $\Delta < 0$ non esistono soluzioni reali. La funzione $f(x) = ax^2 + bx + c$ rappresenta una parabola, con concavità rivolta verso l'alto se $a > 0$ e verso il basso se $a < 0$.

Osservazione: Se l'equazione di secondo grado è della forma $ax^2 + 2b_0x + c = 0$ (ovvero se il coefficiente del termine di primo grado è divisibile per 2) allora le radici si possono scrivere nella forma (*formula ridotta*)

$$x_1 = \frac{-b_0 - \sqrt{b_0^2 - ac}}{a}, \qquad x_2 = \frac{-b_0 + \sqrt{b_0^2 - ac}}{a}.$$

A seconda del valore del discriminante si hanno i casi rappresentati in Figura 3.4: le soluzioni dell'equazioni $ax^2 + bx + c = 0$ corrispondono ai punti in cui la parabola interseca l'asse x.

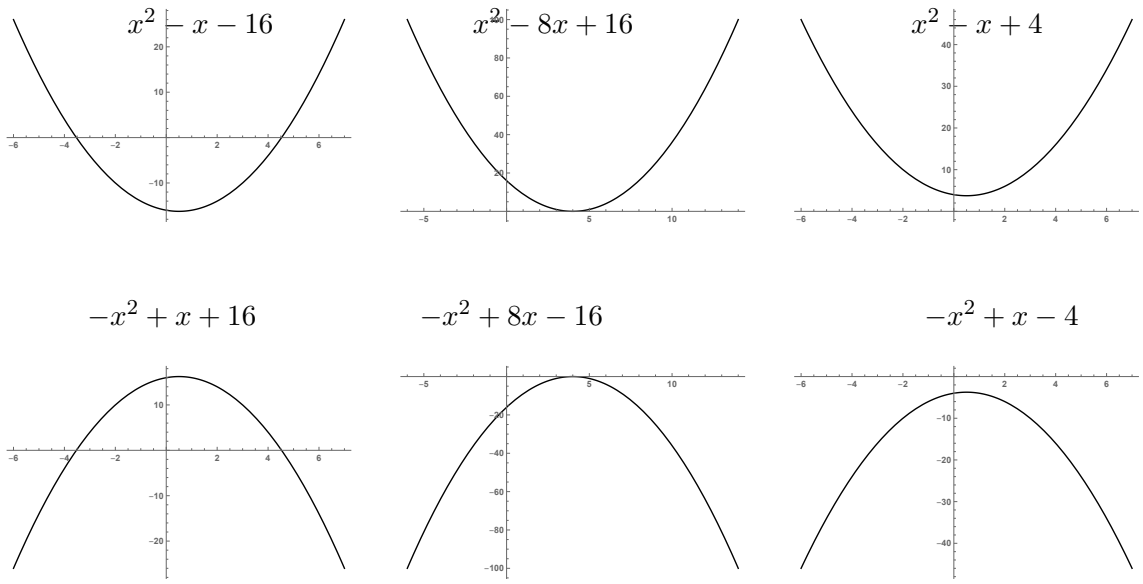


Figura 3.4: Grafici di alcune parabole.

Complementi (∗):

1. *Derivazione delle formule risolutive dell'equazione di secondo grado.* Dal momento che $a \neq 0$, dividendo l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ per a si ottiene

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a},$$

Si può completare il quadrato a primo membro aggiungendo a sottraendo un'opportuna costante, i.e. scrivendo

$$x^2 + \frac{b}{a}x = x^2 + 2\left(\frac{b}{2a}\right)x = x^2 + 2\left(\frac{b}{2a}\right)x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2},$$

che, inserita nell'equazione precedente, dà

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Estraendo la radice quadrata si ottiene

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ovvero

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

2. *Derivazione alternativa delle formule risolutive dell'equazione di secondo grado.* Partendo dall'equazione di secondo grado $ax^2 + bx + c = 0$, si introduce la variabile y scrivendo $x = y + m$, con m da determinare. L'equazione diventa allora

$$\begin{aligned} a(m+y)^2 + b(m+y) + c &= am^2 + 2amy + ay^2 + bm + by + c \\ &= ay^2 + (2am + b) + \big(am^2 + bm + c\big) = 0. \end{aligned}$$

Fissando $m = -b/2a$, così da cancellare il termine lineare in y, si ottiene

$$ay^2 + \big(am^2 + bm + c\big) = ay^2 + \left(\frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c\right) = ay^2 + \left(-\frac{b^2}{4a} + c\right) = 0,$$

ovvero

$$y^2 = -\frac{1}{a}\left(-\frac{b^2}{4a} + c\right) = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \quad \Longrightarrow \quad y = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Tornando alla variabile x, si trovano le formule risolutive note.

3.4 Disequazioni di primo grado

3.4.1 Disequazione di primo grado $ax + b \geq 0$, $a \neq 0$

Consideriamo la disequazione di primo grado $ax+b \geq 0$, dove $a, b \in \mathbb{R}$, con $a \neq 0$. Sia $x_0 = -b/a$ la soluzione di $ax + b = 0$. Allora la disequazione è soddisfatta per $x \geq x_0$ se $a > 0$ e per $x \leq x_0$ se $a < 0$. Se vale il segno stretto, i.e. se la disequazione ha la forma $ax+b > 0$, allora la soluzione è $x > x_0$ per $a > 0$ e $x < x_0$ per $a < 0$.

Se si considera la retta di equazione $y = ax + b$, per $x \geq x_0$ la retta è al di sopra dell'asse x se $a > 0$ e al di sotto se $a < 0$. Quindi le soluzioni della disequazione ammettono una semplice interpretazione in termini del grafico della funzione $f(x) = ax + b$.

3.4.2 Disequazione di primo grado $ax + b \leq 0$, $a \neq 0$

Consideriamo ora la disequazione di primo grado $ax + b \leq 0$, dove $a, b \in \mathbb{R}$, con $a \neq 0$. Ci si riconduce al caso precedente moltiplicando la disequazione membro a membro per -1: $ax+b \leq 0 \Longrightarrow -ax-b = (-1)(ax+b) \geq 0$. Quindi la soluzione è $x \geq -(-b)/(-a) = -b/a = x_0$ se $-a > 0$, i.e. $a < 0$, e $x \leq -b/a = x_0$ se $-a < 0$, i.e. $a > 0$. Come prima, se vale il segno stretto nella disequazione, i.e. se la disequazione assume la forma $ax+b < 0$, allora vale il segno stretto anche nella soluzione.

Anche in questo caso le soluzioni della disequazione ammettono una semplice interpretazione in termini del grafico della funzione $f(x) = ax + b$.

In conclusione, a seconda del segno di a, la disequazione è soddisfatta se e solo se x soddisfa la diseguaglianza indicata nella tabella seguente:

	$a > 0$	$a < 0$
$ax + b > 0$	$x > -\frac{b}{a}$	$x < -\frac{b}{a}$
$ax + b \geq 0$	$x \geq -\frac{b}{a}$	$x \leq -\frac{b}{a}$
$ax + b < 0$	$x < -\frac{b}{a}$	$x > -\frac{b}{a}$
$ax + b \leq 0$	$x \leq -\frac{b}{a}$	$x \geq -\frac{b}{a}$

3.5 Disequazioni di secondo grado

3.5.1 Disequazione di secondo grado $ax^2 + bx + c \geq 0$, $a \neq 0$

Nel discutere la disequazione $ax^2+bx+c \geq 0$, $a \neq 0$, è conveniente procedere nel modo seguente. Si disegna la parabola $y = f(x) = ax^2 + bx + c$. Si possono avere vari casi, come mostrato dalla Figura 3.4. Siano x_1 e x_2 le due soluzioni dell'equazione di secondo grado corrispondente $ax^2 + bx + c = 0$: si può avere

(1) $ax^2 + bx + c = 0$ per $x = x_1$ oppure per $x = x_2$, con x_1 e x_2 reali e distinti,

(2) $ax^2 + bx + c = 0$ per $x = x_1 = x_2$, se x_1 e X_2 sono reali e coincidenti,

(3) $ax^2 + bx + c \neq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Quindi x_1 e x_2 sono i punti dell'asse reale in cui $f(x)$ si annulla. I punti x per cui $f(x) > 0$ sono i valori di x in cui la parabola è al di sopra dell'asse x, mentre i punti x per cui $f(x) < 0$ sono i valori di x in cui la parabola è al di sotto dell'asse x. Occorre distinguere sei possibili casi:

- $a > 0$, $\Delta > 0 \Longrightarrow x \leq x_1$ oppure $x \geq x_2$;
- $a > 0$, $\Delta = 0 \Longrightarrow x \in \mathbb{R}$ (in tal caso $x_1 = x_2$);
- $a > 0$, $\Delta < 0 \Longrightarrow x \in \mathbb{R}$ (in tal caso non esistono x_1, x_2);
- $a < 0$, $\Delta > 0 \Longrightarrow x_1 \leq x \leq x_2$;
- $a < 0$, $\Delta = 0 \Longrightarrow x = x_1$ (in tal caso $x_1 = x_2$);
- $a < 0$, $\Delta < 0 \Longrightarrow$ nessuna soluzione (in tal caso non esistono x_1, x_2).

3.5.2 Disequazione di secondo grado $ax^2 + bx + c > 0$, $a \neq 0$

Si ragiona come sopra tenendo conto che se nella disequazione vale il segno stretto, allora vale in segno stretto anche nelle soluzioni (con il caveat che se $\Delta = 0$ la disequazione non è più risolta da $x = x_1$). Quindi la soluzione in tal caso diventa:

- $a > 0$, $\Delta > 0 \Longrightarrow x < x_1$ oppure $x > x_2$;
- $a > 0$, $\Delta = 0 \Longrightarrow x \neq x_1$ (in tal caso $x_1 = x_2$);
- $a > 0$, $\Delta < 0 \Longrightarrow x \in \mathbb{R}$ (in tal caso non esistono x_1, x_2);
- $a < 0$, $\Delta > 0 \Longrightarrow x_1 < x < x_2$;
- $a < 0$, $\Delta = 0 \Longrightarrow$ nessuna soluzione (in tal caso $x_1 = x_2$);
- $a < 0$, $\Delta < 0 \Longrightarrow$ nessuna soluzione (in tal caso non esistono x_1, x_2).

3.5.3 Disequazione di secondo grado $ax^2 + bx + c \leq 0$, $a \neq 0$

Si ragiona come nel caso precedente, con l'unica differenza che ora occorre individuare i valori di x in cui la parabola si trova al di sotto dell'asse x. Quindi si ha:

- $a > 0$, $\Delta > 0 \Longrightarrow x_1 \leq x \leq x_2$;
- $a > 0$, $\Delta = 0 \Longrightarrow x = x_1$ (in tal caso $x_1 = x_2$);
- $a > 0$, $\Delta < 0 \Longrightarrow$ nessuna soluzione (in tal caso non esistono x_1, x_2);
- $a < 0$, $\Delta > 0 \Longrightarrow x \leq x_1$ oppure $x \geq x_2$;
- $a < 0$, $\Delta = 0 \Longrightarrow x \in \mathbb{R}$ (in tal caso $x_1 = x_2$);
- $a < 0$, $\Delta < 0 \Longrightarrow x \in \mathbb{R}$ (in tal caso non esistono x_1, x_2).

3.5.4 Disequazione di secondo grado $ax^2 + bx + c < 0$, $a \neq 0$

Ragionando come sopra si trova:

- $a > 0$, $\Delta > 0 \Longrightarrow x_1 < x < x_2$;
- $a > 0$, $\Delta = 0 \Longrightarrow$ nessuna soluzione (in tal caso $x_1 = x_2$);
- $a > 0$, $\Delta < 0 \Longrightarrow$ nessuna soluzione (in tal caso non esistono x_1, x_2);
- $a < 0$, $\Delta > 0 \Longrightarrow x < x_1$ oppure $x > x_2$;
- $a < 0$, $\Delta = 0 \Longrightarrow x \neq x_1$ (in tal caso $x_1 = x_2$);
- $a < 0$, $\Delta < 0 \Longrightarrow x \in \mathbb{R}$ (in tal caso non esistono x_1, x_2).

Esercizi.

1. Si risolva la disequazione $x^2 + 4x - \frac{9}{4} \geq 0$.
2. Si risolva la disequazione $\frac{2x-3}{5-x^2} \geq 0$.
3. Si risolva la disequazione $|x^2 - 2| < x$.
4. Si risolva la disequazione $\frac{2x-1}{x+2} - \frac{12-6x}{4-x^2} \geq 0$.
5. Si risolva la disequazione $x + 3 \geq \sqrt{x+3}$.
6. Si risolva la disequazione $\frac{x^2-4x+3}{2-x} \leq 0$.
7. Si risolva il sistema di disequazioni $x^2 - 4x + 4 > 0$, $2 - x > 0$.
8. Si risolva la disequazione $x^3 - 4x^2 + 2x \geq 0$.
9. Si risolva la disequazione $x^4 - 24x^3 + 8x^2 \geq 0$.
10. Si risolva la disequazione $x^4 - 6x^2 + 4 \geq 0$.
11. Si risolva la disequazione $2x^4 - 3x^2 + 1 > 0$.
12. Si risolva la disequazione $\frac{1}{x^2} - \frac{6}{x^4} + 2 < 0$.

Soluzioni:

1. La disequazione è della forma $ax^2 + bx + c \geq 0$, con $a = 1 > 0$ e $\Delta = b^2 - 4ac = 25 > 0$. Le radici di $x^2 + 4x - 9/4 = 0$ sono $x_1 = -9/2$ e $x_2 = 1/2$. Quindi la soluzione della disequazione è: $x \in (-\infty, -9/2] \cup [1/2, +\infty)$.
2. Deve essere $2x - 3 \geq 0$ e $5 - x^2 > 0$ oppure $2x - 3 \leq 0$ e $5 - x^2 < 0$. Quindi la soluzione della disequazione è: $x \in (-\infty, -\sqrt{5}) \cup [3/2, \sqrt{5})$.
3. Se $x^2 \geq 2$ si ha $x^2 - 2 - x < 0$, che ammette soluzione: $-1 < x < 2$ (poiché $a = 1 > 0$, $\Delta = 9 > 0$ e le radici sono $x_1 = -1$, $x_2 = 2$); la condizione $x^2 \geq 2$ richiede $x \geq \sqrt{2}$ oppure $x \leq -\sqrt{2} \Longrightarrow \sqrt{2} \leq x < 2$. Se $x^2 < 2$ si ha $2 - x^2 - x < 0$, che ammette soluzione: $x < -2$ oppure $x > 1$ (poiché $a = -1 < 0$, $\Delta = 9 > 0$ e le radici sono $x_1 = -2$, $x = 1$); la condizione $x^2 < 2$ richiede $|x| < \sqrt{2} \Longrightarrow 1 < x < \sqrt{2}$. Unendo le due condizioni troviamo la soluzione: $x \in (1, 2)$.
4. Si deve innanzitutto richiedere $x + 2 \neq 0$ e $x^2 \neq 4 \Longrightarrow x \neq \pm 2$. Inoltre $12 - 6x = 6(2 - x)$ e $4 - x^2 = (2 + x)(2 - x) \Longrightarrow (12 - 6x)/(4 - x^2) = 6/(2 + x)$. Quindi
$$\frac{2x-1}{x+2} - \frac{12-6x}{4-x^2} = \frac{2x-1}{x+2} - \frac{6}{2+x} = \frac{2x-1-6}{2+x} = \frac{2x-7}{2+x}.$$
così che si deve richiedere $2x - 7 \geq 0$ e $2 + x > 0$ oppure $2x - 7 \leq 0$ e $2 + x < 0$. La soluzione è quindi: $x \in (-\infty, -2) \cup [7/2, +\infty)$.

5. Si deve avere $x+3 \geq 0 \Longrightarrow$ se $x+3=0$ (i.e. $x=-3$) si ha $0 \geq 0$, che è soddisfatta; se $x+3>0$, dividendo l'equaizone per $\sqrt{x+3}$, si ottiene $\sqrt{x+3} \geq 1 \Longrightarrow x+3 \geq 1$. Quindi la soluzione è: $x \in \{-3\} \cup [-2, +\infty)$.

6. La soluzione è: $x \in [1,2) \cup [3, +\infty)$.

7. La soluzione è: $x \in (-\infty, 2)$.

8. Si può scrivere $x^3-4x^2+2x = x\,(x^2-4x+2)$, quindi si ha $x \geq 0$ e $x^2-4x+2 \geq 0$ oppure $x \leq 0$ e $x^2-4x+2 \leq 0$. L'equazione $x^2-4x+2=0$ ha soluzioni $x_1 = 2-\sqrt{2}$ e $x_2 = 2+\sqrt{2}$, quindi $x^2-4x+2 \geq 0$ per $x \leq 2-\sqrt{2}$ oppure per $x \geq 2+\sqrt{2}$, mentre $x^2-4x+2 \leq 0$ per $2-\sqrt{2} \leq x \leq 2+\sqrt{2}$. In conclusione si deve avere: $x \in [0, 2-\sqrt{2}] \cup [2+\sqrt{2}, +\infty)$.

9. Si può scrivere $x^4-24x^3+8x^2 = x^2(x^2-24x+8)$, quindi, poiché $x^2 \geq 0$, si deve richiedere $x^2-24x+8 \geq 0$ oppure $x=0$ (valore per il quale $x^2=0$). L'equazione $x^2-24x+8=0$ ha soluzioni $x_1 = 12-\sqrt{136}$ e $x_2 = 12+\sqrt{136}$, quindi $x^2-24x+8 \geq 0$ per $x \leq 12-\sqrt{136}$ oppure per $x \geq 12+\sqrt{136}$, mentre $x^2-24x+8 \leq 0$ per $12-\sqrt{136} \leq x \leq 12+\sqrt{136}$. In conclusione, tenendo conto che $\sqrt{136} < 12$ si deve avere: $x \in \{0\} \cup [12-\sqrt{136}, 12+\sqrt{136}]$.

10. Se si pone $t=x^2$, la disequazione si riscrive in termini di t nella forma $t^2-6t+4 \geq 0$, che ammette soluzione $t \in (-\infty, 3-\sqrt{5}] \cup [3+\sqrt{5}, +\infty)$. D'altra parte i valori $t<0$ vanno scartati perché $t=x^2 \geq 0$. Quindi si deve avere $x^2 \in [0, 3-\sqrt{5}] \cup [3+\sqrt{5}, +\infty)$, ovvero $x \in (-\infty, -\sqrt{3+\sqrt{5}}) \cup [-\sqrt{3-\sqrt{5}}, \sqrt{3-\sqrt{5}}] \cup [\sqrt{3-\sqrt{5}}, +\infty)$.

11. Se si pone $t=x^2$, la disequazione si riscrive in termini di t nella forma $2t^2-3t+1>0$, che ammette soluzione $t \in (-\infty, 1/2) \cup (1, +\infty)$. Poiché i valori $t<0$ vanno scartati, si deve avere $x^2 \in [0, 1/2) \cup (1, +\infty)$, ovvero $x \in (-\infty, -1) \cup (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) \cup (1, +\infty)$.

12. Innazitutto si deve richiedere $x \neq 0$. Si può allora riscrivere la disequazione, moltiplicando il primo membro per x^4, nella forma $x^2-6+2x^4<0$. Ponendo $x^2=t$, si trova che le radici dell'equazione $2t^2+t-6=0$ sono $t_1=-2$ e $t=3/2$, quindi la disequazione $2t^2+t-6<0$ è soddisfatta per $t \in (-2, 3/2)$. Ne segue che la disequazione $2x^4+x^2-6<0$ è soddisfatta per $x^2 \in [0, 3/2)$, i.e. per $x \in (-\sqrt{3/2}, \sqrt{3/2})$. D'altra parte il valore $x=0$ va escluso, per quanto visto all'inizio, quindi la disequazione è soddisfatta per $x \in (-\sqrt{3}, 0) \cup (0, \sqrt{3/2})$.

3.6 Domini e grafici delle funzioni trigonometriche

Le *funzioni trigonometriche* sono le funzioni *seno*, *coseno*, *tangente*, *cotangente*, *secante* e *cosecante*, indicate, rispettivamente, come $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$, $\sec x$ e $\operatorname{cosec} x$.

3.6.1 Seno e coseno

Le funzioni $\sin x$ e $\cos x$ sono definite come segue (cfr. la Figura 3.5). Data la circonferenza di raggio 1 e centro l'origine, si consideri il raggio che forma un angolo x con l'asse delle ascisse: allora $\cos x$ rappresenta la proiezione del raggio sull'asse delle ascisse e $\sin x$ rappresenta la proiezione del raggio sull'asse delle ordinate.

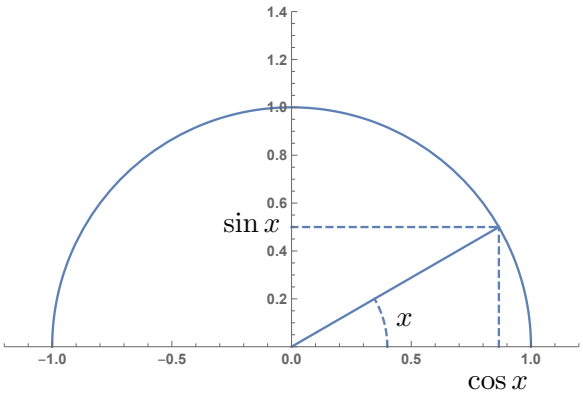


Figura 3.5: Definizione di $\sin x$ e $\cos x$.

Le due funzioni $\sin x$ e $\cos x$ sono quindi definite per $x \in \mathbb{R}$ e assumo valori compresi tra -1 e 1: quindi il loro dominio è $\mathbb{R}$ e il loro codominio è $[-1, 1]$; inoltre le due funzioni sono periodiche di periodo 2π, quindi è sufficiente studiarne il grafico per $x \in [-\pi, \pi]$ oppure per $x \in [0, 2\pi]$ (cfr. la Figura 3.6 per il grafico delle due funzioni).

Per costruzione si ha $\sin x = 0$ per $x = k\pi$ e $\cos x = 0$ per $x = k\pi + \pi/2$, con $k \in \mathbb{Z}$.

Infine $\sin x$ e $\cos x$ soddisfano l'identità

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

per il teorema di Pitagora.

3.6.2 Tangente e cotangente

Le funzioni $\operatorname{tg} x$ e $\operatorname{cotg} x$ sono definite rispettivamente come

$$\operatorname{tg} x := \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \operatorname{cotg} x := \frac{\cos x}{\sin x}.$$

La funzione $\operatorname{tg} x$ è definita per $x \neq (2k+1)\pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$; inoltre, essa è periodica di periodo π (cfr. i complementi alla fine del paragrafo), quindi è sufficiente studiarne il grafico per $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ (cfr. la Figura 3.6).

La funzione $\operatorname{cotg} x$ è definita per $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, ed è anch'essa periodica di periodo π (cfr. di nuovo i complementi alla fine del paragrafo), ed è quindi è sufficiente studiarne il grafico per $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ o, in maniera del tutto equivalente, per $x \in (0, \pi)$, se si vuole un intervallo in cui la funzione sia definita ovunque (cfr. la Figura 3.6).

3.6.3 Secante e cosecante

In modo simile si ragiona per le funzioni

$$\sec x := \frac{1}{\cos x}, \qquad \operatorname{cosec} x := \frac{1}{\sin x},$$

i cui grafici sono riportati sempre in Figura 3.6. Le due funzioni $\sec x$ e $\operatorname{cosec} x$ hanno periodo 2π e sono definite, rispettivamente, per $x \neq \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{N}$ e per $x \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{N}$. Nel seguito, non utilizzeremo mai le funzioni $\sec x$ e $\operatorname{cosec} x$, in quanto, a differenza delle funzioni $\operatorname{tg} x$ e $\operatorname{cotg} x$ che coinvolgono entrambe le funzioni $\sin x$ e $\cos x$, le funzioni $\sec x$ e $\operatorname{cosec} x$ si esprimono banalmente in termini delle sole funzioni $\sin x$ e $\cos x$, rispettivamente, costituendone le reciproche.

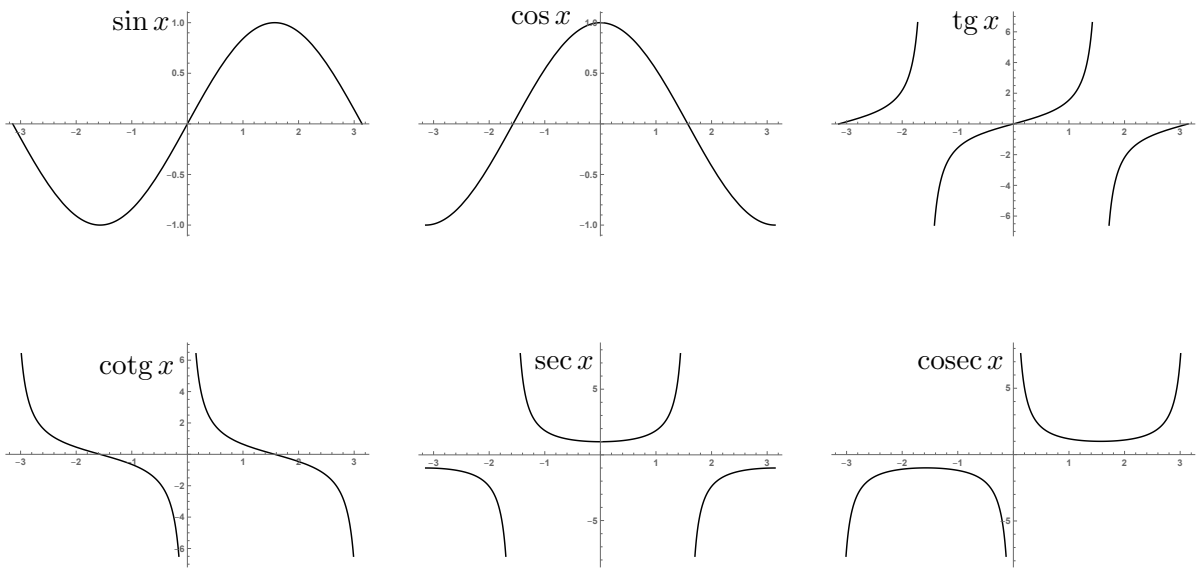


Figura 3.6: Grafici delle funzioni trigonometriche.

3.6.4 Formule trigonometriche

Le *formule trigonometriche* (o *formule goniometriche*) sono formule che stabiliscono relazioni tra i valori delle varie funzioni trigonometriche in corrispondenza di angoli legati tra di loro.

1. Estremamente utili da ricordare sono le *formule di addizione* (per la dimostrazione, cfr. i complementi più avanti):

   (a) $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$;
   (b) $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$;
   (c) $\operatorname{tg}(x \pm y) = (\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y)/(1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y)$;
   (d) $\operatorname{cotg}(x \pm y) = (\operatorname{cotg} x \operatorname{cotg} y \mp 1)/(\operatorname{cotg} y \pm \operatorname{cotg} x)$.

2. Di fatto, le formule di addizione (c) per la tangente e (d) per la cotangente discendono immediatamente dalle formule di addizione (a) per il seno e (b) per il coseno.
3. Dalle formule di addizione si possono ricavare tutte le altre relazioni trigonometriche:
   (a) le *formule di prostaferesi*:
   - $\sin x + \sin y = 2\sin((x+y)/2)\ \cos((x-y)/2)$,
   - $\cos x + \cos y = 2\cos((x+y)/2)\ \cos((x-y)/2)$,
   - $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \sin(x+y)/\cos x \cos y$,
   - $\operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg} y = \sin(x+y)/\sin x \sin y$,

   (b) le *formule di Werner*:
   - $\sin x \cos y = (1/2)[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$,
   - $\cos x \cos y = (1/2)[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$,
   - $\sin x \sin y = (1/2)[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$,

   (c) le *formule di bisezione*:
   - $\sin(x/2) = \pm\sqrt{(1-\cos x)/2}$,
   - $\cos(x/2) = \pm\sqrt{(1+\cos x)/2}$,
   - $\operatorname{tg}(x/2) = \sqrt{(1-\cos x)/(1+\cos x)}$.
4. Inoltre il fatto che si abbia $\sin(2\pi) = 0$ e $\cos 2\pi = 1$ è consistente con il fatto che $\sin x$ e $\cos x$ sono periodiche. Infatti, utilizzando le formule di addizione, si ha

$$\sin(x+2\pi) = \sin x \cos(2\pi) + \sin(2\pi)\cos x = \sin x,$$
$$\cos(x+2\pi) = \cos x \cos(2\pi) - \sin(2\pi)\sin x = \cos x.$$

5. È utile ricordarsi i valori delle funzioni trigonometriche in corrispondenza ad alcuni angoli speciali; per esempio, si ha

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$\operatorname{cotg} x$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	∞

Se consideriamo angoli $x \in (\pi, 2\pi)$, i corrispondenti valori che assumo le funzioni $\sin x$ e $\cos x$ si possono ricavare da quelli elencati sopra utilizzando le formule di addizione; per esempio se $x = 3\pi/2$ si può scrivere $x = \pi + \pi/2$, da cui si ricava

$$\sin x = \sin \pi \cos(\pi/2) + \cos \pi \ \sin(\pi/2) = -1$$

e, analogamente,

$$\cos x = \cos \pi \cos(\pi/2) - \sin \pi \ \sin(\pi/2) = 0.$$

6. Dalle formule di addizione si possono ricavare anche altre relazioni notevoli che collegano seni e coseni di angoli diversi tra loro. Per esempio si possono usare le formule di addizione per ottenere le seguenti relazioni:

$$\sin\Big(\frac{\pi}{6}\Big) = \sin\Big(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\Big) = \sin\Big(\frac{\pi}{2}\Big) \cos\Big(\frac{\pi}{3}\Big) - \cos\Big(\frac{\pi}{2}\Big) \ \sin\Big(\frac{\pi}{3}\Big) = \cos\Big(\frac{\pi}{3}\Big),$$

$$\cos\Big(\frac{\pi}{6}\Big) = \cos\Big(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\Big) = \cos\Big(\frac{\pi}{2}\Big) \cos\Big(\frac{\pi}{3}\Big) + \sin\Big(\frac{\pi}{2}\Big) \ \sin\Big(\frac{\pi}{3}\Big) = \sin\Big(\frac{\pi}{3}\Big),$$

che permettono di esprimere il seno e il coseno dell'angolo $\pi/6$ in termini del seno e del coseno dell'angolo $\pi/3$ (cfr. i valori riportati nella tabella dell'osservazione 5).

7. In generale, alcuni valori della tabella dell'osservazione 5 si possono ricavare utilizzando le formule di addizione. Per esempio, per calcolare $\sin(\pi/3)$ e $\cos(\pi/3)$, si possono utilizzare le identità dell'osservazione precedente per scrivere

$$\sin\Big(\frac{\pi}{3}\Big) = \sin\Big(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\Big) = 2 \sin\Big(\frac{\pi}{6}\Big) \cos\Big(\frac{\pi}{6}\Big) = 2 \cos\Big(\frac{\pi}{3}\Big) \ \sin\Big(\frac{\pi}{3}\Big),$$

da cui, dividendo per $\sin(\pi/3)$, segue l'identità

$$1 = 2 \cos\Big(\frac{\pi}{3}\Big) \quad \Longrightarrow \qquad \cos\Big(\frac{\pi}{3}\Big) = \frac{1}{2}.$$

Poiché $(\sin(\pi/3))^2 + (\cos(\pi/3))^2 = 1$ e $\sin(\pi/3) > 0$, si ottiene anche l'identità

$$\sin\Big(\frac{\pi}{3}\Big) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Inoltre, sempre a partire dalle identità

$$\sin\Big(\frac{\pi}{6}\Big) = \cos\Big(\frac{\pi}{3}\Big), \qquad \cos\Big(\frac{\pi}{6}\Big) = \sin\Big(\frac{\pi}{3}\Big),$$

trovate nell'osservazione precedente, dai valori appena trovati di $\sin(\pi/3)$ e $\cos(\pi/3)$ si deducono immediatamente anche i valori di $\sin(\pi/6)$ e $\cos(\pi/6)$.

8. Non tutti i valori della tabella dell'osservazione 5 discendono alle formule di addizione. Per esempio i valori di $\sin \pi$ e $\cos \pi$ non si possono ottenere a partire dale formule di addizione, ma seguono direttamente dalla definizione delle due funzioni, che implica che $\sin \pi = 0$ e $\cos \pi = -1$ (cfr. la Figura 3.5).

Complementi (∗):

1. *Dimostrazione della formula di addizione* $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$. Si consideri la Figura 3.7, dove A e B sono i punti in cui due le rette r e s, che formano un angolo x e $x+y$ con l'asse delle ascisse, intersecano rispettivamente la circonferenza di raggio 1, e P è la proiezione ortogonale del segmento OB lungo il segmento OA. Si ha pertanto, per definizione delle funzioni seno e coseno, $|OB'| = |OB| \cos(x+y)$ e $|BB'| = |OB| \sin(x+y)$, mentre $|OP| = |OB| \cos y$ e $|BP| = |OB| \sin y$ e, analogamente, $|OP'| = |OP| \cos x$ e $|PP'| = |OP| \sin x$. Tenendo conto che $|OB| = 1$, la formula di addizione si può quindi riscrivere come $|BB'| = |OP| \sin x + |PB| \cos x$. Se z denota l'angolo BPB' e Q è il punto del segmento BB' tale che QP è parallelo a OP', dimostriamo innanzitutto che $z = x$: se θ denota l'angolo QPB, si ha $x + \theta = \pi/2$ (poiché gli angoli OAQ e x sono uguali, in quanto angoli alterni interni di due rette parallele tagliate da una trasversale, e gli angoli x e θ sono complementari); inoltre $\theta + z = \pi/2$ (perché la somma degli angoli interni di un triangolo è π e l'angolo PQB è retto); dalle due relazioni segue che x e z sono uguali. Si ha allora
$$|BQ| = |BP| \cos x = |BP| \cos x,$$
$$|QP'| = |PP'| = |OP| \sin x.$$
Notando che $|BB'| = |BQ| + |QB'|$, si ottiene la formula desiderata.

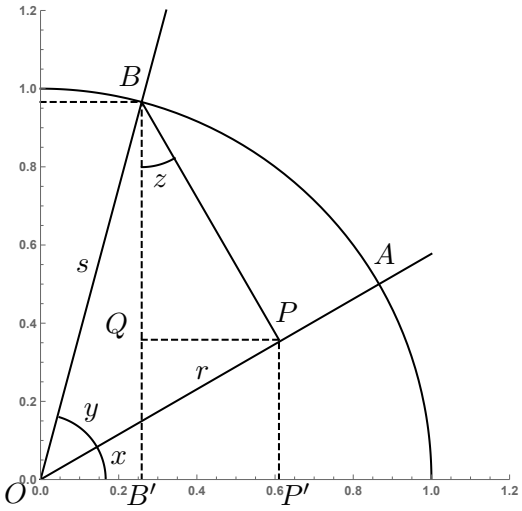


Figura 3.7: Dimostrazione delle formule di addizione.

2. *Dimostrazione della formula di addizione* $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$. Facendo di nuovo riferimento alla Figura 3.7 e utilizzando le notazioni introdotte nella discussione del punto 1, si trova $\cos(x+y) = |OB| \cos(x+y) = |OB'| = |OP'| - |B'P'|$, dove per costruzione
$$|OP'| = |OP| \cos x = |OB| \cos y \cos x = \cos x \cos y,$$
$$|B'P'| = |QP| = |BP| \sin z = |OB| \sin y \sin z = \sin y \sin z = \sin y \sin x,$$
dal momento che $z = x$. Da qui segue la formula desiderata.

3. *Dimostrazione della formula di addizione* $\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$. Segue dalla formula $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$, dimostrata al punto precedente, notando che $\sin y$ e $\cos y$ sono, rispettivamente, dispari e pari in y. Quindi $\cos(-y) = \cos y$ e $\sin(-y) = -\sin y$.
4. *Dimostrazione della formula di addizione* $\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$. Segue dalla formula $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$, usando di nuovo che le funzioni $\sin y$ e $\cos y$ sono, rispettivamente, dispari e pari in y.
5. *Periodicità della funzione* $\operatorname{tg} x$. Utilizzando le formule di addizione, si trova, per x tale che $\cos x \neq 0$,
$$\begin{aligned}\operatorname{tg}(x+\pi) &= \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{\sin x \cos\pi + \sin\pi \cos x}{\cos x \cos\pi - \sin x \sin\pi} \\ &= \frac{\sin x \cos\pi}{\cos x \cos\pi} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x,\end{aligned}$$
da cui segue che la funzione $\operatorname{tg} x$ è periodica di periodo π.
6. *Periodicità della funzione* $\operatorname{cotg} x$. Ragiona come per la funzione $\operatorname{tg} x$ si trova, per x tale che $\sin x \neq 0$,
$$\operatorname{cotg}(x+\pi) = \frac{\cos(x+\pi)}{\sin(x+\pi)} = \frac{\cos x \cos\pi - \sin\pi \sin x}{\sin x \cos\pi + \cos x \sin\pi} = \frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{cotg} x,$$
da cui segue che anche la funzione $\operatorname{cotg} x$ è periodica di periodo π.

Esercizi:

1. Si dimostri la formula di prostaferesi $\sin x + \sin y = 2\sin((x+y)/2)\,\cos((x-y)/2)$.
2. Si dimostri la formula di prostaferesi $\cos x + \cos y = 2\cos((x+y)/2)\,\cos((x-y)/2)$.
3. Si dimostri la formula di bisezione $\sin(x/2) = \pm\sqrt{(1-\cos x)/2}$.
4. Si dimostri la formula di bisezione $\cos(x/2) = \pm\sqrt{(1+\cos x)/2}$.

Soluzioni:

1. Posto $x = \alpha+\beta$ e $y = \alpha-\beta$, si usano le formule di addizione 1(a) per $\sin(\alpha+\beta)$ e $\sin(\alpha-\beta)$.
2. Posto $x = \alpha+\beta$ e $y = \alpha-\beta$, si usano le formule di addizione 1(b) per $\cos(\alpha+\beta)$ e $\cos(\alpha-\beta)$.
3. Si scrive
$$\cos x = \cos(x/2 + x/2) = \cos^2(x/2) - \sin^2(x/2) = 1 - 2\sin^2(x/2),$$
da cui si ottiene $2\sin^2(x/2) = 1 - \cos x$. Estraendo la radice quadrata segue l'asserto.
4. Partendo come nell'esercizio 3 dalla formula di addizione $\cos x = \cos(x/2 + x/2)$, si scrive
$$\cos^2(x/2) - \sin^2(x/2) = 2\cos^2(x/2) - 1.$$

Osservazioni:

1. Le funzioni $\cos(x/2)$ e $\sin(x/2)$ che compaiono nelle formule di bisezioni sono periodiche di periodo 4π: infatti, richiedendo che si abbia $\cos((x+T)/2) = \cos(x/2)$, si trova $T/2 = 2\pi$ e quindi $T = 4\pi$; analogamente si ragiona per $\sin x$. Più in generale le funzioni $\cos(\alpha x)$ e $\sin(\alpha x)$, con $\alpha \neq 0$, sono periodiche di periodo $2\pi/\alpha$; per esempio, $\cos(4x)$ è periodica di periodo $T = 2\pi/4 = \pi/2$, mentre $\cos(x/4)$ è periodica di periodo $T = 8 \cdot 2\pi = 8\pi$.
2. Il segno $\pm$ delle formule di bisezione dipende dal valore di x. Per esempio, nella formula $\cos(x/2) = \pm\sqrt{(1+\cos x)/2}$, poiché la funzione $\cos(x/2)$ è periodica di periodo 4π (cfr. l'osservazione precedente), ci si può limitare all'intervallo $[-2\pi, 2\pi]$. Per $x \in [-\pi, \pi]$, la funzione $\cos(x/2)$ ricopre l'intervallo $[0, 1]$ ed è quindi positiva, così che nella formula di bisezione vale il segno $+$. Per $x \in [-2\pi, -\pi) \cup (\pi, 2\pi]$, la funzione è invece negativa e pertanto nella formula di bisezione vale il segno $-$. Se $x \notin [-2\pi, 2\pi]$, esiste $k \in \mathbb{Z}$ tale che $x + 2\pi k \in [-2\pi, 2\pi]$: il segno è quindi $+$ o $-$ a seconda che si abbia $x + 2\pi k \in [-\pi, \pi]$ o $x + 2\pi k \in [-2\pi, -\pi) \cup (\pi, 2\pi]$.

3.7 Dominio e grafico della funzione esponenziale

La funzione *esponenziale* è data da a^x, con $a > 0$, $a \neq 1$, ed è definita per $x \in \mathbb{R}$. Il grafico è rappresentato in Figura 3.8 per alcuni valori di $a > 1$ e in Figura 3.9 per alcuni valori di $a < 1$.

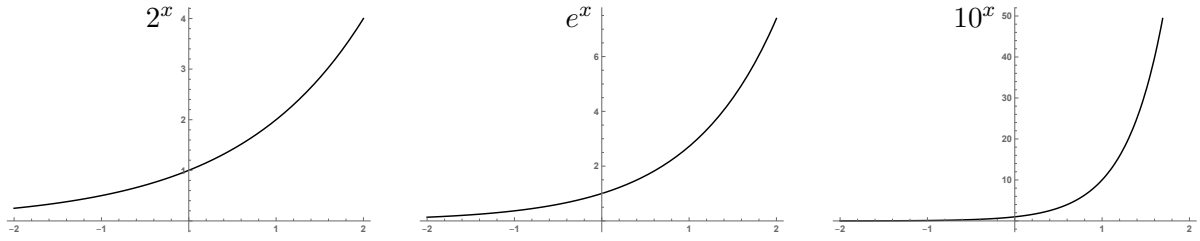


Figura 3.8: Grafici della funzione esponenziale per alcuni valori di $a > 1$.

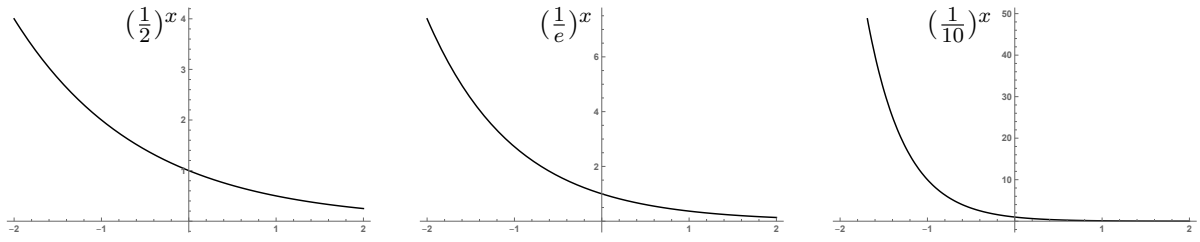


Figura 3.9: Grafici della funzione esponenziale per alcuni valori di $a < 1$.

Il dominio della funzione è $\mathbb{R}$, mentre il codominio è $(0, +\infty)$, dal momento che $a^x > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, se $a > 0$.

Per ogni fissato $x \in \mathbb{R}$, più grande è a più grandi sono i valori che assume la funzione a^x e, allo stesso modo, più piccoli sono i valori che assume la funzione $(1/a)^x$. Si confrontino infatti i valori sull'asse delle ordinate in Figura 3.8 e in in Figura 3.9, e si noti che le funzioni a^x all'aumentare del valore di $a > 1$ crescono sempre più rapidamente, mentre al diminuire di $a < 1$ si avvicinano al valore zero sempre più velocemente.

Osservazioni:

1. Il valore $a = 0$ è escluso perché $0^x = 0$ per ogni $x > 0$, mentre la potenza 0^x non è definita per $x \leq 0$. Si noti che se se estendessimo la definizione $0^x = 0$ anche a $x = 0$ troveremmo $0^0 = 0$, in contraddizione con la convenzione $0^0 = 1$ adottata sia nel §1.2.2 che nel §3.2. In realtà l'espressione 0^0 è priva di valore nell'ambito dell'analisi matematica e assume significato come forma indeterminata quando di discutono i limiti (cfr. il §8.2).

2. Analogamente a non può essere negativo perché, per $a < 0$, il numero $a^x = (-|a|)^x$ non è definito per $x = p/q$, con q e p primi tra loro e q pari, e quindi non è definito al variare di x in un intervallo, dal momento che i razionali sono densi in qualsiasi intervallo (cfr. i complementi del §1.7.1).

3. Il valore $a = 1$ è escluso perché $1^x = 1$ per ogni x, quindi si ottiene diventa la funzione costante, che è un caso particolare di funzione potenza, in quanto $1^x = x^0 = 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

4. Di particolare interesse è il caso in cui $a = e$, dove e è il numero di Nepero (cfr. §5.7 più avanti). Il grafico di e^x è rappresentato in Figura 3.8.

Proprietà fondamentali dell'esponenziale:

1. Per ogni $a > 0$ e per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha $a^x > 0$, i.e. l'esponenziale di qualsiasi numero reale è sempre positivo.
2. $\forall a > 0$ si ha $a^0 = 1$ e $a^1 = a$.
3. $\forall a > 0$, $a \neq 1$, e $\forall x, y \in \mathbb{R}$ si ha
$$a^{x+y} = a^x a^y,$$
i.e. l'esponenziale della somma è uguale al prodotto degli esponenziali.
4. $\forall a > 0$ si ha
$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}.$$
5. $\forall a > 0$, $a \neq 1$, e $\forall x, y \in \mathbb{R}$ si ha
$$a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y},$$
i.e. l'esponenziale della differenza è uguale al rapporto degli esponenziali.
6. $\forall a > 0$, $a \neq 1$, e $\forall x, y \in \mathbb{R}$ si ha
$$(a^x)^y = a^{xy}.$$

Osservazioni:

1. Per la proprietà 3 (o anche per la 6 con $y = 2$), si ha $(a^x)^2 = a^x \cdot a^x = a^{2x}$.
2. Per ricordare che $a^{x+y} = a^x a^y$ (e non $a^x + a^y$ assolutamente!) si possono scegliere dei valori x e y per i quali si calcola facilmente l'esponenziale. Per esempio, si scelga $x = y = 0$ e si ricordi che $a^0 = 1\ \forall a > 0$: allora $a^{0+0} = 1 = 1 \cdot 1 = a^0 a^0$, mentre $a^0 + a^0 = 2 \neq 1$.
3. Fissato un valore di $a > 0$, $a \neq 1$, se si confrontano i grafici delle due funzioni a^x e $(1/a)^x = a^{-x}$ (cfr. le Figure 3.8 e 3.9, per $a = 2$, $a = e$ e $a = 10$) si nota che essi sono simmetrici per riflessione rispetto all'asse verticale. Questo segue dal fatto che, per ogni $z \in \mathbb{R}$, si ha $(1/a)^{-z} = a^{-(-z)} = a^z$, ovvero la funzione $(1/a)^x$ assume per $x = -z$ lo stesso valore che la funzione a^x assume per $x = z$.
4. Si noti che potenza ed esponenziale hanno la stessa struttura: si tratta in entrambi i casi di un numero (base) elevato a un altro numero (esponente). Quello che cambia è che nella potenza l'esponente è fissato e la base è la variabile, mentre nell'esponenziale è il contrario: la base è fissata e l'esponente varia in $\mathbb{R}$.

3.8 Dominio e grafico della funzione logaritmo

La funzione *logaritmo* è data da $f(x) = \log_a x$, con $a > 0$, $a \neq 1$, ed è definita per $x > 0$. Il grafico è rappresentato in Figura 3.10 per alcuni valori di $a > 1$ e in Figura 3.11 per alcuni valori di $a < 1$.

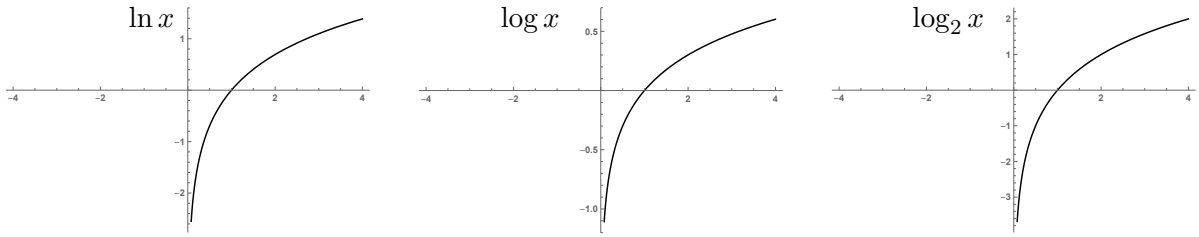


Figura 3.10: Grafici della funzione logaritmo per alcuni valori di $a > 1$.

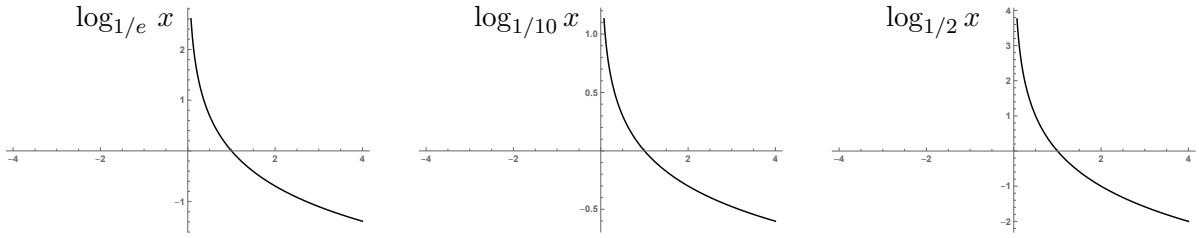


Figura 3.11: Grafici della funzione logaritmo per alcuni valori di $a < 1$.

Il logaritmo in base a di un numero è definito in termini della funzione esponenziale dalla seguente relazione: si ha $\log_a x = y$ se e solo se $a^y = x$. Ovviamente tale relazione non può essere verificata, al variare di x, da alcun numero y se $a = 0$ (in quanto $0^y = 0$ indipendentemente da y) oppure se $a < 0$ (in quanto a^y non è definita se $a < 0$).

Si noti inoltre che si ha $\log_a a = 1$ $\forall a > 0$. Questo si può vedere dalla seguente catena di implicazioni: $\log_a a = y \Longrightarrow a^y = a \Longrightarrow y = 1$.

Infine, poiché $\log_a x = y$ equivale a $a^y = x$, si deduce che $\log_a x$ è definito solo per $x \in (0, +\infty)$, mentre il suo codominio è l'intero asse reale, dal momento che per ogni $x > 0$ esiste un valore $y \in \mathbb{R}$ tale che $a^y = x$.

Proprietà fondamentali del logaritmo:

1. $\forall a > 0$, $a \neq 1$, si ha $\log_a 1 = 0$.
2. $\forall a > 0$ e $\forall x > 0$ si ha $\log_a x > 0$ se $x > 1$ e $\log_a < 0$ se $x < 1$.
3. $\forall a > 0$, $a \neq 1$, e $\forall x, y > 0$ si ha

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y,$$

   i.e. il logaritmo del prodotto è uguale alla somma dei logaritmi.

4. $\forall a > 0$, $a \neq 1$, e $\forall x, y > 0$ si ha

$$\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y,$$

   i.e. il logaritmo del rapporto è uguale alla differenza dei logaritmi.

5. $\forall a > 0$, $a \neq 1$, $\forall x > 0$ e $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ si ha

$$\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x.$$

6. $\forall a, b > 0$, $a, b \neq 1$, e $\forall x > 0$ si ha

$$\log_a x = \log_a b \cdot \log_b x.$$

Osservazioni:

1. La proprietà 6 si ottiene direttamente dalla definizione: se $z = \log_a x$ e $w = \log_b x$, allora

$$a^z = b^w = x \quad \Longrightarrow \quad z = z \log_a a = \log_a a^z = \log_a b^w = w \log_a b,$$

   che è appunto la proprietà 6.

2. Dalla proprietà 6, prendendo $x = a$, si ottiene $\log_a b = 1/\log_b a$.

3. Le proprietà del logaritmo si possono derivare dalle proprietà della funzione esponenziale. Per esempio, se poniamo $z = \log_a x$, $w = \log_a y$ e $u = \log_a(xy)$, si ha $a^z = x$, $a^w = y$ e $a^u = xy$, quindi dalla proprietà 3 dell'esponenziale si ottiene

$$a^u = xy = a^z a^w = a^{z+w} \quad \Longrightarrow \quad u = z + w \quad \Longrightarrow \quad \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y,$$

i.e. la proprietà 3 del logaritmo.

4. Il logaritmo in una base qualsiasi a si può sempre esprimere in termini del logaritmo in base e (*logaritmo naturale*): utilizzando la proprietà 6 si trova

$$\log_a x = \log_a e \cdot \ln x = \frac{1}{\ln a} \ln x,$$

dove si è utilizzata anche l'osservazione 2 per scrivere $\log_a e = 1/\ln a$.

3.9 Simmetrie e parità

Spesso, notare che una funzione gode di qualche simmetria o di qualche proprietà di parità può semplificarne lo studio e, in particolare, il disegno del grafico.

Definizione 3.1. *Una funzione* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *si dice* pari *se* $f(-x) = f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$*, si dice* dispari *se* $f(-x) = -f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Proprietà:

1. Dalle definizioni segue che se una funzione è pari o dispari, è sufficiente studiarne il comportamento per $x \geq 0$
2. Il prodotto di due funzioni pari o di due funzioni dispari è pari, il prodotto di una funzione pari con una dispari è dispari.
3. Se una funzione è pari è sufficiente studiarne il grafico per $x \geq 0$: il grafico per $x < 0$ si ottiene allora per riflessione rispetto all'asse y.
4. Se una funzione è dispari è sufficiente studiarne il grafico per $x \geq 0$: il grafico per $x < 0$ si ottiene allora attraverso una doppia riflessione (prima rispetto all'asse y, quindi rispetto all'asse x) ovvero attraverso una riflessione rispetto all'origine.
5. Una funzione dispari che sia definita per $x = 0$ si annulla necessariamente in $x = 0$: infatti, se $f(x)$ è dispari, allora per $x = 0$ si deve avere $f(0) = -f(0)$ e quindi $f(0) = 0$.

Esempi:

1. La funzione $f(x) = x^2$ è pari.
   Dimostrazione: $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$.
2. La funzione $f(x) = \cos x$ è pari.
   Dimostrazione: $\cos(-x) = \cos(0 - x) = \cos 0 \cos x + \sin 0 \sin x = 1 \cdot \cos x + 0 = \cos x$.

3. La funzione $f(x) = x$ è dispari.
   Dimostrazione: $f(-x) = -x = -f(x)$.
4. La funzione $f(x) = \sin x$ è dispari.
   Dimostrazione: $\sin(-x) = \sin(0 - x) = \sin 0 \cos x - \cos 0 \sin x = 0 - 1 \cdot \sin x = -\sin x$.

Osservazioni:

1. Noto il grafico di una funzione $f(x)$, il grafico della funzione $g(x) = f(x) + y_0$, $y_0 \in \mathbb{R}$, si ottiene traslando il grafico di $f(x)$ verso l'alto di una quantità y_0.
2. Noto il grafico di una funzione $f(x)$, il grafico della funzione $g(x) = f(x + x_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}$, si ottiene traslando il grafico di $f(x)$ verso sinistra di una quantità x_0.
3. Se $y_0 < 0$ traslare verso l'alto di una quantità y_0 significa di fatto traslare verso il basso di una quantità $|y_0|$. Analogamente se $x_0 < 0$ traslare verso sinistra di una quantità x_0 significa di fatto traslare verso destra di una quantità $|x_0|$.
4. Il grafico della funzione $g(x) = -f(x)$ si può ottenere da quello di $f(x)$ attraverso una riflessione rispetto all'asse x.
5. Il grafico della funzione $g(x) = f(-x)$ si può ottenere da quello di $f(x)$ attraverso una riflessione rispetto all'asse y.

Esempi:

1. Il grafico di $\cos x$ is può ricavare da quello di $\sin x$ tramite una traslazione di $\pi/2$ verso sinistra. Iinfatti

$$\begin{aligned}\cos x &= \cos((x + \pi/2) - \pi/2) \\ &= \cos(x + \pi/2)\cos(\pi/2) + \sin(x + \pi/2)\sin(\pi/2) \\ &= 0 + \sin(x + \pi/2) \cdot 1 \\ &= \sin(x + \pi/2).\end{aligned}$$

2. Il grafico di una qualsiasi parabola $ax^2 + bx + c$ si può ottenere a partire dalla parabola $y = ax^2$ tramite una traslazione di $x_0 = b/2a$ verso sinistra e una traslazione di $y_0 = c - b^2/4a$ verso l'alto. Per esempio il grafico della funzione $2x^2 + 4x - 3$ si ottiene dal grafico di $2x^2$, prima traslandolo di $x_0 = 4/4 = 1$ verso sinistra, poi di $y_0 = -3 - 4^2/4 \cdot 2 = -5$ verso l'alto, ovvero di 5 verso il basso (cfr. la Figura 3.12).
3. Dall'esempio 2 si vede che, se $a > 0$, la curva $ax^2 + bx + c$ non interseca l'asse x se

$$y_0 = c - b^2/4a$$

   è positivo, mentre interseca l'asse in due punti se $y_0 < 0$ e in un solo punto se $y_0 = 0$. Questo implica che l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ non ha soluzioni reali se $y_0 > 0$, ha una sola sola soluzione reale se $y_0 = 0$ e ha due soluzioni reali distinte se $y_0 < 0$. Se ricordiamo la definizione del discriminate Δ di un'equazione di secondo grado, si vede che

$$y_0 = -\frac{1}{4a}\left(b^2 - 4ac\right) = -\frac{\Delta}{4a},$$

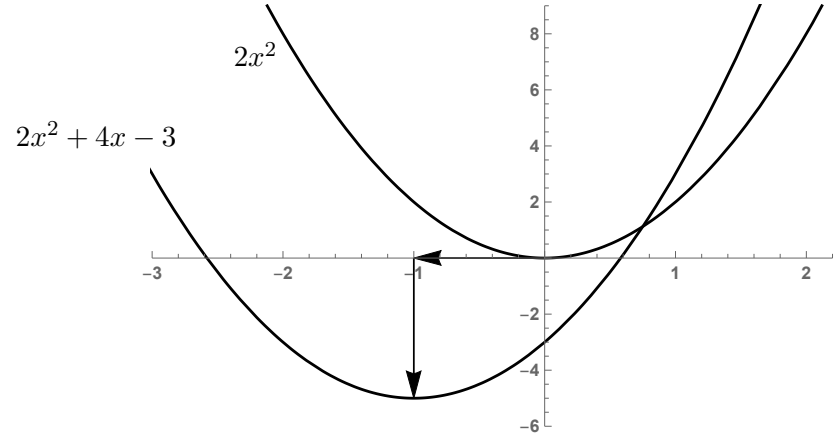


Figura 3.12: Grafico delle funzioni $2x^2 + 4x - 3$ e $2x^2$.

così che, per $a > 1$ le condizioni $y_0 > 0$, $y_0 = 0$ e $y_0 > 0$ equivalgono alle condizioni $\Delta < 0$, $\Delta = 0$ e $\Delta > 0$, rispettivamente, che sono appunto le condizioni perché l'equazione ammetta slo radici complesse coniugate, una sola radice reale e due radici reali distinte.

4. Il grafico della funzione $\operatorname{cotg} x$ si ottiene dal grafico di $\operatorname{tg} x$ tramite una traslazione di $\pi/2$ verso destra e una successiva riflessione rispetto all'asse x: infatti

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x} = -\frac{\cos x}{\sin(-x)} = -\frac{\sin(x+\pi/2)}{\cos(-x-\pi/2)} = -\frac{\sin(x+\pi/2)}{\cos(x+\pi/2} = -\operatorname{tg}(x+\pi/2).$$

5. Il grafico di a^x, $a < 1$, si ottiene dal grafico di b^x, con $b = 1/a > 1$, attraverso una riflessione rispetto all'asse y: infatti $b^x = a^{-x}$, quindi se $f(x) = b^x$ si ha $f(-x) = b^{-x} = a^x$.

6. Il grafico di $\log_a x$, $a < 1$, si ottiene dal grafico di $\log_b x$, con $b = 1/a > 1$, attraverso una riflessione rispetto all'asse x: infatti si ha $\log_a x = \log_a b \cdot \log_b x$, quindi se $b = 1/a$ si trova

$$\log_a x = \log_a(1/a) \cdot \log_{1/a} x,$$

dove

$$\log_a(1/a) = -\log_a a = -1.$$

Si trova in conclusione

$$\log_a x = -\log_{1/a} x,$$

così che se

$$\log_{1/a}(x) = f(x) \qquad \Longrightarrow \qquad \log_a x = -f(x).$$

L'asserzione segue allora dall'osservazione 4.

3.10 Esercizi

1. Si risolva la disequazione $\dfrac{2x+1}{x-1} \leq 3$.
2. Si risolva la disequazione $||x|-1| < |x-3|$.
3. Si risolva la disequazione $\dfrac{1}{x} + |x-1| \geq 1$.
4. Si risolva la disequazione $\sqrt{x^2-x+1} \geq x+3$.
5. Si risolva la disequazione $8^{x+2} \geq 2^{x^2}$.
6. Si risolva la disequazione $3^x + \dfrac{1}{3^x} \leq 4$.
7. Si risolva la disequazione $3\cos^2 x + \sin^2 x - 5\cos x + 1 \leq 0$ per $x \in [0, 2\pi]$.
8. Si risolva la disequazione $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} < \sqrt{x}+1$.
9. Si risolva la disequazione $|x-1| < 2|x|$.
10. Si risolva la disequazione $|x^2-1| < x + |x+1|$.

Soluzioni:

1. Si deve avere $x \neq 1$.
   - Se $x > 1$ si ottiene
   $$2x+1 \leq 3(x-1) \quad \Longrightarrow \quad 3x-3 \quad \geq 2x+1 \quad \Longrightarrow \quad x \geq 4.$$
   - Se $x < 1$ si ottiene
   $$2x+1 \geq 3(x-1) \quad \Longrightarrow \quad 3x-3 \leq 2x+1 \quad \Longrightarrow \quad x \leq 4$$
   e quindi $x < 1$.

   In conclusione la soluzione è: $x \in (-\infty, 1) \cup [4, +\infty)$.
2. Distinguiamo più casi, per tener conto dei moduli.
   (a) Se $x \geq 0$ si ha $|x| = x$ e quindi la diseguaglianza diventa $|x-1| < |x-3|$.

- Se $x \geq 3$ otteniamo

$$x - 1 < x - 3 \quad \Longrightarrow \quad -1 < -3,$$

che non è mai soddisfatta.

- Se $1 \leq x < 3$ otteniamo

$$x - 1 < 3 - x \quad \Longrightarrow \quad 2x < 4 \quad \Longrightarrow \quad x < 2$$

e quindi $1 \leq x < 2$.

- Se $x < 1$ otteniamo

$$1 - x < 3 - x \quad \Longrightarrow \quad 1 < 3,$$

che è sempre soddisfatta.

Ne segue che se $x \geq 0$ otteniamo la condizione $x \in [0, 2)$.

(b) Se $x < 0$ si ha $|x| = -x$ e quindi la diseguaglianza diventa

$$| - x - 1| < |x - 3|,$$

dove $|-x-1| = |-(x+1)| = |x+1|$. Poiché $x < 0 < 3$ si ha quindi $|-x-1| < 3-x$.

- Se $x \geq -1$ otteniamo

$$x + 1 < 3 - x \quad \Longrightarrow \quad 2x < 2 \quad \Longrightarrow \quad x < 1,$$

che è ovviamente soddisfatta per $-1 \leq x < 0$.

- Se $x < -1$ otteniamo

$$-x - 1 < 3 - x \quad \Longrightarrow \quad -1 < 3,$$

che è sempre soddisfatta.

Quindi se $x < 0$ non otteniamo condizioni addizionali su x. Questo mostra che ogni $x < 0$ soddisfa la disequazione.

In conclusione la soluzione è: $x \in (-\infty, 2)$.

3. Deve essere $x \neq 0$.

- Se $x \geq 1$ – e quindi $x - 1 \geq 0$ – abbiamo

$$\frac{1}{x} + x - 1 \geq 1.$$

Moltiplicando per x e usando il fatto che $x > 0$, otteniamo

$$1 + x^2 - 2x \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad (x - 1)^2 \geq 0,$$

che è sempre soddisfatta.

- Se $x < 1$ (e $x \neq 0$) abbiamo

$$\frac{1}{x} + 1 - x \geq 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{x} \geq x,$$

quindi se $x > 0$ troviamo

$$x^2 \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad 0 < x \leq 1,$$

mentre se $x < 0$ troviamo

$$x^2 \geq 1 \quad \Longrightarrow \quad x \leq -1.$$

In conclusione la soluzione è: $x \in (-\infty, -1] \cup (0, +\infty)$.

4. L'equazione $x^2 - x + 1 = 0$ non ha soluzioni reali poiché $\Delta < 0$, quindi l'argomento della radice quadrata è sempre positivo.

- Se $x + 3 < 0$ (i.e. $x < -3$), la disequazione è sempre soddisfatta.
- Se invece $x + 3 \geq 0$ (i.e. $x \geq -3$), si ha

$$x^2 - x + 1 \geq x^2 + 6x + 9 \Longrightarrow -x + 1 \geq 6x + 9 \Longrightarrow 7x \leq -8 \Longrightarrow x \leq -\frac{8}{7},$$

da cui si ottiene $-3 \leq x \leq -8/7$.

Quindi la soluzione è: $x \in (-\infty, -8/7]$.

5. Si ha

$$8^{x+2} = 2^{3(x+2)} \Longrightarrow 2^{3(x+2)} \geq 2^{x^2} \Longrightarrow 3(x+2) \geq x^2 \Longrightarrow x^2 - 3x - 6 \leq 0,$$

quindi, tenendo conto che

$$\frac{3 + \sqrt{33}}{2}, \qquad \frac{3 - \sqrt{33}}{2}$$

sono le soluzioni dell'equazione $x^2 - 3x - 6 = 0$, la soluzione della disequazione è: $x \in [3 - \sqrt{33})/2, 3 + \sqrt{33})/2]$.

6. Ponendo $y = 3^x$ e usando che $y > 0$, si trova

$$y + \frac{1}{y} \leq 4 \quad \Longrightarrow \quad y^2 - 4y + 1 \leq 0 \quad \Longrightarrow \quad 2 - \sqrt{3} \leq y \leq 2 + \sqrt{3},$$

dove $y = 2 \pm \sqrt{3}$ sono le soluzioni di $y^2 - 4y + 1 = 0$. In conclusione la soluzione è: $x \in [\log_3(2 - \sqrt{3}), \log_3(2 + \sqrt{3})]$.

7. Ponendo $\cos x = y$ e utilizzando che $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ si trova

$$2y^2 - 5y + 2 \leq 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{2} \leq y \leq 2,$$

dove $y = 1/2$ e $y = 2$ sono le soluzioni di $2y^2 - 5y + 2 = 0$. Poiché $y = \cos x$ e $\cos x \leq 1$, solo i valori $y \in [1/2, 1]$ sono accettabili $\Longrightarrow \cos x \in [1/2, 1] \Longrightarrow$ in conclusione, la soluzione è: $x \in [0, \pi/3] \cup [5\pi/3, 2\pi]$, dove

$$\frac{\pi}{3}, \qquad 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$$

sono i valori per cui si ha $\cos x = 1/2$.

8. Si deve avere $x \geq 0$ (perché $\sqrt{x}$ sia definita) e $x \neq 1$ (perché $\sqrt{x} - 1 \neq 0$). Ponendo $\sqrt{x} = y$ si trova $y/(y-1) < y + 1$, dove $y \geq 0$.

   - Se $y > 1$ si ha

   $$y < (y+1)(y-1) = y^2 - 1 \quad \Longrightarrow \quad y^2 - y - 1 > 0,$$

   da cui segue $y < (1 - \sqrt{5})/2$ oppure $y > (1 + \sqrt{5})/2$. Quindi se $y > 1$ si ottiene $y > (1 + \sqrt{5})/2$.

   - Se $0 \leq y < 1$ si ha

   $$y > (y+1)(y-1) = y^2 - 1 \quad \Longrightarrow \quad y^2 - y - 1 < 0,$$

   da cui segue $(1 - \sqrt{5})/2 < y < (1 + \sqrt{5})/2$, che mostra che tutti i valori $0 \leq y < 1$ sono accettabili.

   La soluzione quindi è: $x \in [0, 1) \cup (\sqrt{(1 + \sqrt{5})/2}, +\infty)$.

9. La disequazione diventa

$$\begin{cases} 1 - x < -2x, & \text{per } x < 0, \\ 1 - x < 2x, & \text{per } 0 \leq x < 1, \\ x - 1 < 2x, & \text{per } x \geq 1. \end{cases}$$

   Trattiamo i tre casi separatamente.

   - Se $x < 0$ si deve avere $x < -1$.
   - Se $x \in (0, 1)$ si ha $x > 1/3$.
   - Se infine $x \geq 1$ si trova $x > -1$ che è soddisfatta senza condizioni aggiuntive.

   In conclusione la soluzione è: $(-\infty, -1) \cup (1/3, +\infty)$.

10. La disequazione diventa

$$\begin{cases} x^2 - 1 < -1, & \text{per } x < -1, \\ 1 - x^2 < 2x + 1, & \text{per } -1 \le x \le 1, \\ x^2 - 1 < 2x + 1, & \text{per } x > 1. \end{cases}$$

Si procede nel modo seguente.

- Se $x < -1$ si trova $x^2 < 0$, che non può essere soddisfatta.
- Se $x \in [-1, 1]$ si ha

$$x^2 + 2x > 0 \quad \Longrightarrow \quad x(x+2) > 0 \quad \Longrightarrow \quad x > 0 \text{ oppure } x < -2,$$

da cui si ottiene $x \in (0, 1]$.

- Se infine $x > 1$ si ha

$$x^2 - 2x - 2 < 0 \quad \Longrightarrow \quad 1 - \sqrt{3} < x < 1 + \sqrt{3},$$

da cui si ottiene $x \in (1, 1 + \sqrt{3})$.

Raccogliendo le varie condizioni si trova che la soluzione è: $x \in (0, 1 + \sqrt{3})$.

4 | Funzioni composte e inverse

4.1 Alcune proprietà delle funzioni

Siano I e J due sottoinsiemi di $\mathbb{R}$, e sia f una funzione definita in I e che a ogni valore $x \in I$ associa un valore $f(x) \in J$. Scriviamo allora $f\colon I \to J$.

Definizione 4.1. $f\colon I \to J$ *si dice* iniettiva *se* $\forall x_1, x_2 \in I$, $x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$.

Definizione 4.2. $f\colon I \to J \subset \mathbb{R}$ *si dice* suriettiva *se* $\forall y \in J\ \exists x \in I : f(x) = y$.

Definizione 4.3. $f\colon I \to J$ *si dice* biunivoca *se è suriettiva e iniettiva.*

Osservazioni:

1. Una funzione biunivoca è anche detta *biiettiva* o *bigettiva*.
2. Le proprietà di iniettività e suriettività dipendono non solo dalla funzione, ma anche dal suo dominio e codominio.

Esempi:

1. La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2$ non è suriettiva perché dato $y < 0$ non esiste alcun $x \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) = y$. Tuttavia è suriettiva se è vista come funzione da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}_+$.
2. Se $I = [-1, 1]$ e $J = [-1, 1]$, $f(x) = x$ è iniettiva e suriettiva. Se $I = [-1, 1]$ e $J = [0, 1]$, $f(x) = x^2$ è suriettiva ma non iniettiva. Se $I = [0, 1]$ e $J = [0, 1]$ entrambe le funzioni $f(x) = x$ e $f(x) = x^2$ sono iniettive e suriettive.
3. Se $I = [-\pi, \pi]$ (oppure $I = [0, 2\pi]$) e $J = [-1, 1]$, la funzione $\sin x$ è suriettiva ma non iniettiva, diventa iniettiva se $I = [-\pi/2, \pi/2]$.
4. Le funzioni $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, viste come funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$, sono iniettive e suriettive per n dispari, non sono né iniettive né suriettive per n pari. Se le funzioni sono viste come funzioni da $\mathbb{R}_+$ a $\mathbb{R}_+$ allora sono iniettive e suriettive per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Definizione 4.4. *Data $f : I \to J$, siano $x \in I$ e $y = f(x) \in J$. Diciamo che y è l'*immagine *di x e x è la* controimmagine *di y.*

Osservazione: Se $f : I \to J$ è biunivoca, $\forall y \in J$ la controimmagine di y è unica.

Definizione 4.5. *Una funzione* $f : I \to \mathbb{R}$ *si dice* crescente *in* $[a, b] \subset I$ *se* $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$, *con* $x_2 > x_1$, *si ha* $f(x_2) \geq f(x_1)$, *e si dice* strettamente crescente *se, per* $x_2 > x_1$, *si ha* $f(x_2) > f(x_1)$ *con il segno stretto.*

Definizione 4.6. *Una funzione* $f : I \to \mathbb{R}$ *si dice* decrescente *in* $[a, b] \subset I$ *se* $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$, *con* $x_2 > x_1$, *si ha* $f(x_2) \leq f(x_1)$. *Si dice* strettamente decrescente *se, per* $x_2 > x_1$, *si ha* $f(x_2) < f(x_1)$ *con il segno stretto.*

Definizione 4.7. *Una funzione* $f : I \to \mathbb{R}$ *che sia crescente o decrescente in* $[a, b] \subset I$ *si dice* monotòna *in* $[a, b]$. *Se* f *è strettamente crescente o strettamente descrescente allora si dice che* f *è una funzione* strettamente monotona.

Osservazione: Può succedere che una funzione sia crescente o decrescente in tutto il suo dominio di definizione D_f. La definizione è analoga ale Definizioni 4.5 e 4.6, semplicemente con $[a, b]$ sostituito da D_f.

Esempi:

1. Tutte le funzioni x^α, con $\alpha \geq 0$, sono strettamente crescenti per $x \geq 0$ (cfr. la Figura 3.1).
2. Le funzioni $x^{p/q}$, con $p, q \in \mathbb{N}$ primi tra loro e q dispari, sono strettamente crescenti per $x \in \mathbb{R}$ se p è dispari, mentre sono strettamente crescenti per $x \geq 0$ e strettamente decrescenti per $x \leq 0$ se p è pari (cfr. la Figura 3.1).
3. Sia la funzione esponenziale a^x che la funzione logaritmo $\log_a x$ sono strettamente crescenti se $a > 1$ e strettamente decrescenti se $a < 1$ (cfr. le Figure 3.9 e 3.10).).
4. Le funzioni $\sin x$ e $\cos x$ non sono né crescenti né decrescenti in $\mathbb{R}$ (cfr. la Figura 3.6). Tuttavia, se ristrette a opportuni intervalli, esse sono monotone. Per esempio, $\sin x$ è strettamente crescente in $[-\pi/2, \pi/2]$ e strettamente descrescente in $[\pi/2, 3\pi/2]$. Analogamente, $\cos x$ è strettamente crescente in $[-\pi, 0]$ ed è strettamente descrescente in $[0, \pi]$.
5. La funzione $\operatorname{tg} x$ è strettamente crescente in $[-\pi/2, \pi/2]$; analogamente la funzione $\operatorname{cotg} x$ è strettamente decrescente in $[0, \pi]$. Le due funzioni non sono invece monotone in tutto il loro dominio, dal momento che, per esempio nel caso della tangente, è possibile trovare valori x_1 e$x_2 > x_1$ tali che $\operatorname{tg} x_1 > \operatorname{tg} x_2$ (per esempio $x_1 = \pi/4$ e $x_2 = \pi$).
6. La funzione $f(x) =$ costante è, in base alla definzione, sia crescente che decrescente, ma non è né strettamente crescente né strettamente decrescente.

4.2 Composizione di funzioni

Definizione 4.8. *Date due funzioni* f *e* g, *si chiama loro* composizione *o* funzione composta *la funzione* $f \circ g$ *definita da* $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

Osservazione: Si può comporre f con g (e quindi definire $f \circ g$) solo se $C_g \subset D_f$, ovvero, se $f : I \to J$ e $g : I' \to J'$, con $J' \subset I$. Anche nel caso in cui esistano entrambe le funzioni composte $f \circ g$ e $g \circ f$, le due funzioni non sono uguali, i.e. $f \circ g \neq g \circ f$.

Esempi:

1. $F(x) = \sqrt{1-x} = (f \circ g)(x)$, con $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = 1-x$. Si noti si ha $(f \circ g)(x) = \sqrt{1-x}$ e $(g \circ f)(x) = 1 - \sqrt{x} \neq (f \circ g)(x)$; inoltre $(f \circ g)(x)$ è definita se $x \leq 1$ mentre $(g \circ f)(x)$ è definita se $x \geq 0$.
2. $F(x) = \sin(1 + x^2) = (f \circ g)(x)$, con $f(x) = \sin x$ e $g(x) = 1 + x^2$.
3. $F(x) = e^{-\sin x^2} = (f \circ g \circ h)(x)$, con $f(x) = e^{-x}$, $g(x) = \sin x$ e $h(x) = x^2$.
4. Se $f(x) = \ln x$ e $g(x) = \sqrt{x}$, la funzione $(f \circ g)(x) = \ln \sqrt{x}$ è definita per $x > 0$, mentre la funzione $(g \circ f)(x) = \sqrt{\ln x}$ è definita per $x \geq 1$.
5. La funzione $F(x) = \ln((x-1)(x+2)(x+3))$ è la composizione di $f(x) = \ln x$ con la funzione $g(x) = (x-1)(x+2)(x+3)$ ed è quindi definita per x tale che $(x-1)(x+2)(x+3) \geq 0$, ovvero per $x \in (-3, -2) \cup (1, +\infty)$.
6. La funzione $F(x) = \ln(1 - \sqrt{1-x})$ è la composizione di $f(x) = \ln x$ con la funzione $g(x) = 1 - \sqrt{1-x}$. Per determinarne il dominio dobbiamo richiedere $1 - x \geq 0$, perché sia definita la radice, e $1 - \sqrt{1-x} > 0$, perché sia definito il logaritmo. La prima condizione comporta $x \leq 1$, la seconda $\sqrt{1-x} < 1$, i.e. $1 - x < 1$, da cui si ottiene $x > 0$. In conclusione il dominio è l'intervallo $(0, 1]$.

4.3 Funzione inversa

Definizione 4.9. *Sia $f : I \to J$ biunivoca. Si chiama* funzione inversa *di f la funzione $g : J \to I$ tale che $f \circ g = g \circ f = \mathbb{1}$, dove $\mathbb{1}$ è la funzione identità, i.e. la funzione $\mathbb{1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $\mathbb{1}(x) = x$.*

Osservazioni:

1. La funzione identità $\mathbb{1}(x) = x$ non va confusa con la funzione $f(x) = 1$. In particolare la funzione identità è invertibile e la sua inversa è la stessa funzione identità, mentre la funzione $f(x) = 1$ non è invertibile non essendo iniettiva.
2. È importante osservare che, quando si scrive $f \circ g = \mathbb{1}$ o $g \circ f = \mathbb{1}$, si intende che l'uguaglianza vale nel dominio in cui la funzione g o, rispettivamente, la funzione f è definita, ovvero che si ha $f(g(x)) = x \ \forall x \in D_g$ e $g(f(x)) = x \ \forall x \in D_f$.
3. Se g è la funzione inversa di f, si scrive $g = f^{-1}$.
4. Si noti che $f^{-1}(x) \neq 1/f(x)$: per esempio se $f(x) = x$ la sua funzione inversa è $f^{-1}(x) = x$ (cfr. l'osservazione 1), mentre il suo inverso rispetto all'operazione di moltiplicazione, ovvero il suo *reciproco*, è $1/x$.

Operativamente la funzione inversa si costruisce nel modo seguente. Se f è biunivoca, per ogni $x \in I$ esiste uno e un solo $y = f(x) \in J$. Quindi a y si associa in modo univoco x tale che $f(x) = y$: tale x è funzione di y e possiamo quindi scrivere $x = g(y)$, con $g = f^{-1}$, così definendo la funzione inversa f^{-1} (cfr. la Figura 4.1). In particolare, la funzione inversa di f ha come dominio il codominio di f e come codominio il dominio di f, i.e. $D_{f^{-1}} = C_f$ e $C_{f^{-1}} = D_f$.

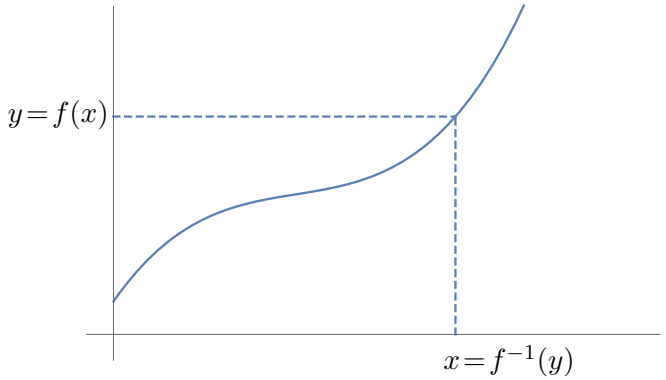


Figura 4.1: Corrispondenza biunivoca tra $x \in D_f$ e $y \in C_f$.

Esempi:

1. $\sqrt{x}$, $x^{1/n}$, $x^{1/\alpha}$ sono le funzioni inverse di x^2, x^n, x^α, purché $x \geq 0$.
2. La funzione inversa di $\log_a x$ è a^x, purché $x > 0$.
3. Si noti che mentre $\log_a(a^x)$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, al contrario $a^{\log_a x}$ è definita solo per $x > 0$. Analogamente, per esempio, la funzione $(\sqrt{x})^2$ è definita solo per $x \geq 0$, a differenza della funzione $\sqrt{x^2} = |x|$ che è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$.
4. Data la funzione $f(x) = 1 + (x+1)^2/4$, $x \geq -1$, la sua inversa si ottiene esprimendo x in funzione di $y = f(x)$. Si trova $(x+1)^2 - 4(y-1) = 0$, che ammette le radici $x = \pm\sqrt{4(y-1)} - 1$, purché $y \geq 1$. La condizione $x \geq -1$ richiede il segno $+$. Se indichiamo la variabile con x e la sua immagine con y, possiamo scrivere la funzione inversa $y = g(x) = 2\sqrt{x-1} - 1$, $x \geq 1$.

Osservazioni:

1. Una funzione f si dice *invertibile* se esiste la funzione inversa f^{-1}: una funzione biunivoca è quindi sempre invertibile.
2. Una funzione che sia strettamente monotona e suriettiva è necessariamente iniettiva e quindi invertibile.
3. Una *regola grafica* per determinare la funzione inversa di una funzione data è la seguente: si scambiano tra loro gli assi, ovvero si riflette il grafico rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante. Si veda, a titolo di esempio, la Figura 4.2, dove sono riportati i grafici della funzione $y = f(x) = 1 + (x+1)^2/4$, $x \geq -1$, e della sua inversa $y = f^{-1}$, $x \geq 1$.

Nella Figura 4.3 sono riportati, per un confronto, i grafici delle funzioni e^x e $\ln x$, e di x^2 e $\sqrt{x}$: si vede immediatamente che il grafico della funzione inversa della funzione f si ottiene riflettendo il grafico di f rispetto alla bisettrice.

4. Dalla regola grafica del punto precedente si deducono alcune proprietà interessanti: per esempio, la funzione esponenziale cresce più velocemente di ogni potenza, quindi il logaritmo cresce più lentamente di qualsiasi potenza.

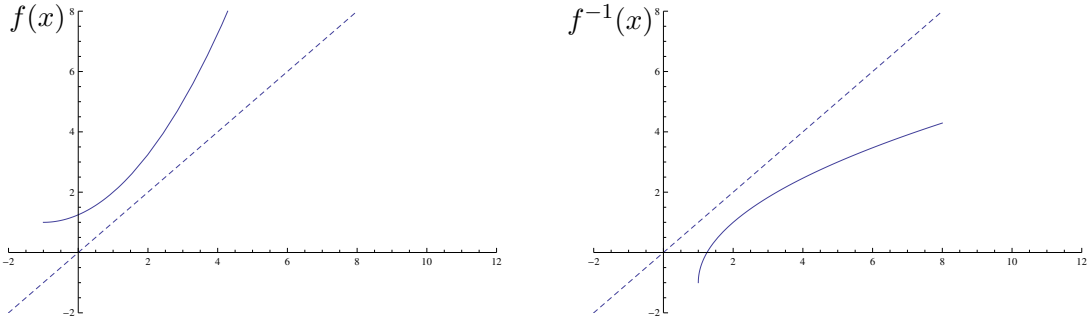


Figura 4.2: Grafici della funzione $f(x) = 1 + (x+1)^2/4$ e della sua inversa $f^{-1}(x)$.

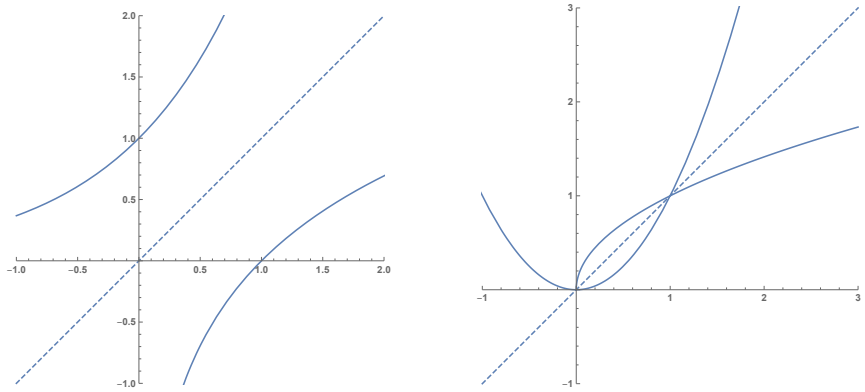


Figura 4.3: Grafici delle funzioni e^x e $\ln x$ (a sinistra) e delle funzioni x^2 e $\sqrt{x}$ (a destra).

4.4 Funzioni trigonometriche inverse

Consideriamo $f(x) = \sin x$, $x \in [-\pi/2, \pi/2]$. La funzione instaura una corrispondenza biunivoca tra gli intervalli $[-\pi/2, \pi/2]$ e $[-1, 1]$. Allora la funzione $\sin x$, come funzione da $[-\pi/2, \pi/2]$ a $[-1, 1]$ è invertibile: indichiamo la sua inversa con $x = \arcsin x$ (*arcoseno*). Analogamente $\cos x$ è invertibile come funzione da $[0, \pi]$ a $[-1, 1]$ e la sua inversa è $x = \arccos x$ *(arcocoseno)*.

Anche le funzioni tg x per $I = (-\pi/2, \pi/2)$ e cotg x per $I = (0, \pi)$ sono iniettive: le loro inverse sono rispettivamente arctan x o arctg x (*arcotangente*) e acrcotan x o arccotg x (*arcocotangente*), e hanno come dominio l'intero asse reale.

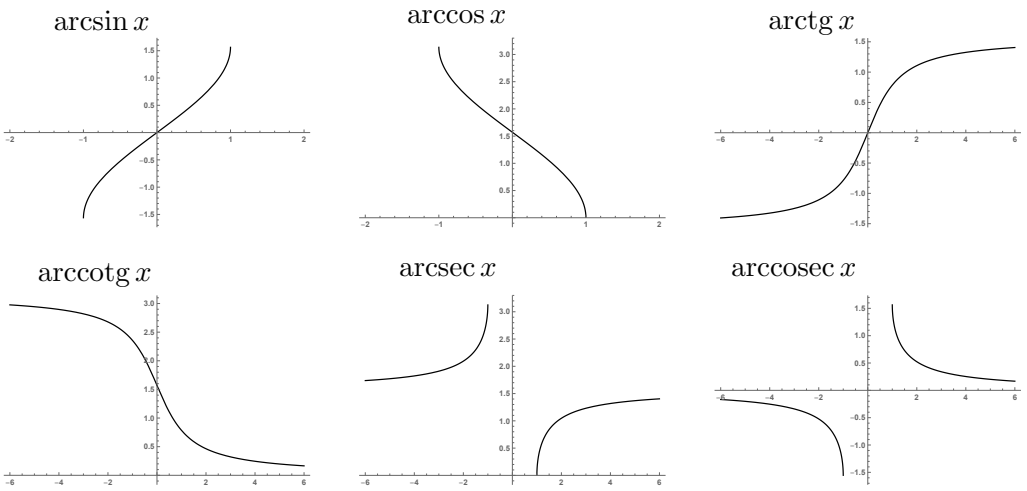


Figura 4.4: Grafici delle funzioni trigonometriche inverse

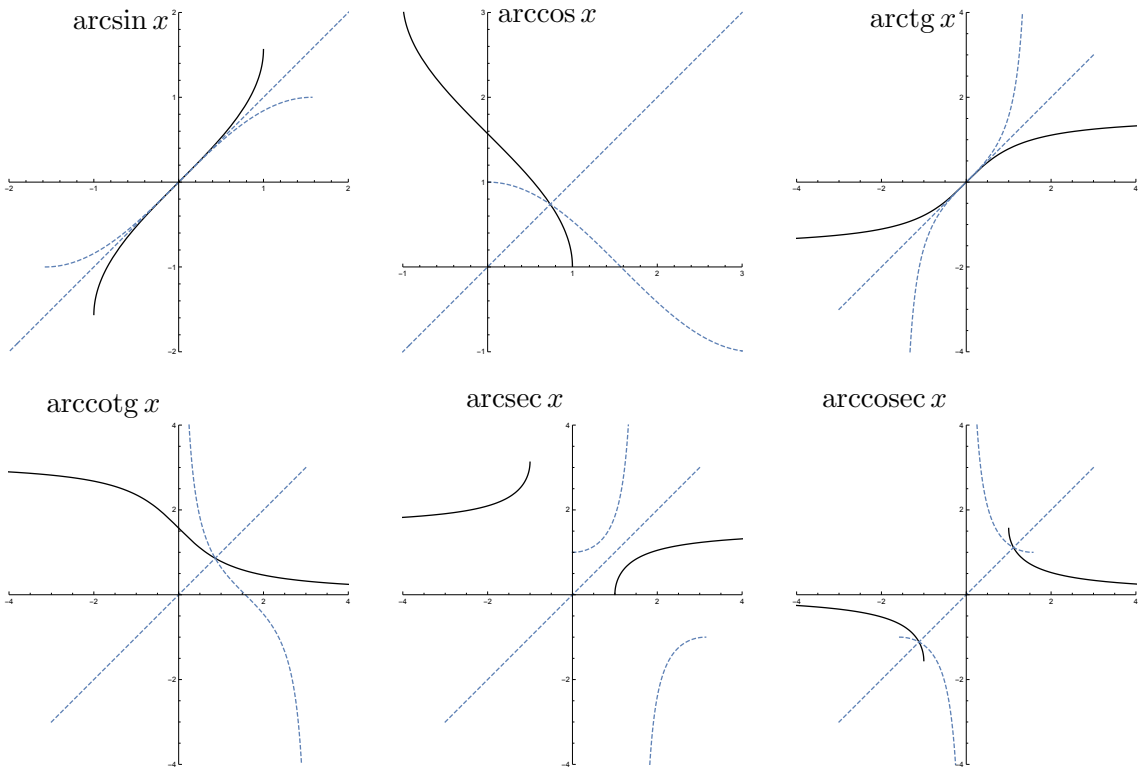


Figura 4.5: Confronto tra i grafici delle funzioni trigonometriche e delle loro inverse.

Simili osservazioni valgono per le funzioni inverse della secante e della cosecante, che vengono indicate come $\operatorname{arcsec} x$ (*arcosecante*) e $\operatorname{arccosec} x$ (*arcocosecante*).

I grafici delle funzioni trigonometriche inverse sono riportati nella Figura 4.4. Come notato nell'osservazione 3 alla fine del §4.3 essi si possono ottenere dai grafici delle funzioni trigonometriche, scegliendone opportunamente i domini, per riflessione rispetto alla bisettrice (cfr. la Figura 4.5)

Osservazione: La funzione $\sin x$ rappresenta la proiezione sull'asse delle ordinate del raggio unitario che forma un angolo x con l'asse delle ascisse (cfr. il §3.6), quindi a ogni angolo x associa un valore ben preciso. La funzione $\arcsin x$ non rappresenta l'angolo il cui seno vale x (dal momento che ne esistono infiniti), ma rappresenta l'angolo compreso tra $-\pi/2$ e $\pi/2$ il cui seno vale x. Quindi, fissato $y_0 \in [-1, 1]$, gli angoli il cui seno vale y_0 sono $\arcsin y_0$ e tutti gli angoli della forma $\arcsin y_0 + 2k\pi$ e $\pi - \arcsin y_0 + 2k\pi$, al variare di $k \in \mathbb{Z}$. Già solo nell'intervallo $[-\pi, \pi)$ esistono due angoli con tale proprietà: $\arcsin y_0$ e $\pi - \arcsin y_0$ (cfr. la Figura 4.6), a meno che non si sia scelto$y_0 = \pm 1$, nel qual caso $\arcsin y_0 = \pi - \arcsin y_0$. Analoghe considerazioni valgono per tutte le funzioni trigonometriche inverse.

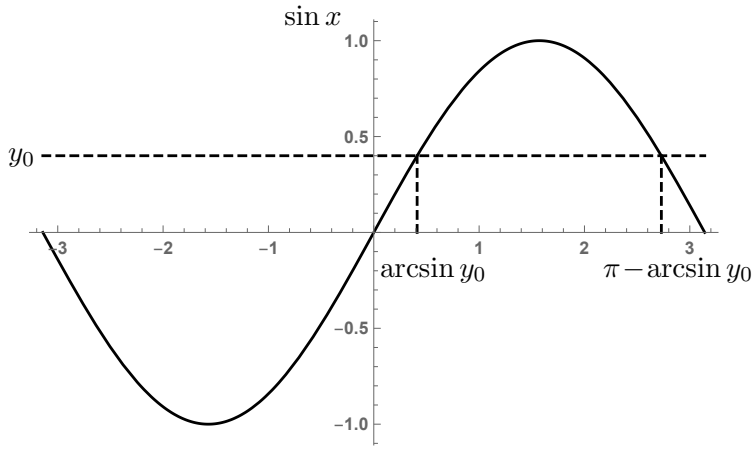


Figura 4.6: Angoli nell'intervallo $[-\pi, \pi)$ il cui seno ha lo stesso valore y.

4.5 Funzioni elementari

Si chiamano *funzioni elementari* le funzioni che si scrivono come prodotto, combinazione lineare e composizione di funzioni elementari principali e loro inverse, dove per *combinazione lineare* di funzioni elementari principali si intende una somma di funzioni elementari principali ciascuna moltiplicata per un numero reale, ovvero un'espressione della forma

$$\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \ldots + \alpha_n f_n(x), \qquad n \in \mathbb{N},$$

dove $\alpha_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_n$ sono numeri reali e $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ sono funzioni elementari principali.

Esempi:

1. $f(x) = x^3 - x^2 + 24x + 8 \Longrightarrow f(x) = f_1(x) - f_2(x) + 24f_3(x) + 8f_4(x)$, dove le funzioni $f_1(x) = x^3$, $f_2(x) = x^2$, $f_3(x) = x$ e $f_4(x) = 1$ sono tutte potenze.

2. $f(x) = e^x + x \log x \Longrightarrow f(x) = f_1(x) + f_2(x)\, f_3(x)$, dove $f_1(x) = e^x$, $f_2(x) = x$ e $f_3(x) = \log x$.

3. $f(x) = 1/(x+1) \Longrightarrow f(x) = f_1(f_2(x) + f_3(x))$, dove $f_1(x) = 1/x$, $f_2(x) = x$ e $f_3(x) = 1$, i.e. si compone $f_1(x)$ con la somma di $f_2(x)$ e $f_3(x)$.

4. $f(x) = \sqrt{1-x} \Longrightarrow f(x) = f_1(f_2(x) - f_3(x))$, dove $f_1(x) = \sqrt{x}$, $f_2(x) = 1$ e $f_3(x) = x$, i.e. si compone $f_1(x)$ con la combinazione lineare $f_2(x) - f_3(x)$.

5. $f(x) = \sin x + \cos x^2 \Longrightarrow f(x) = f_1 + f_2(f_3(x))$, dove $f_1(x) = \sin x$, $f_2(x) = \cos x$ e $f_3(x) = x^2$, i.e. si compone f_2 con f_3 e poi si somma il risultato a f_1.

6. $f(x) = \log(1 + x^2 + 4x) \Longrightarrow f(x) = f_1(f_2(x) + f_3(x) + 4f_4(x))$, dove $f_1(x) = \log x$, $f_2(x) = 1$, $f_3(x) = x^2$ e $f_4(x) = x$, i.e. si compone $f_1(x)$ con la combinazione lineare $f_2(x) + f_3(x) + 4f_4(x))$.

7. $f(x) = e^{x^2 - 2\sqrt{x} + \cos x + \sin x^3} \Longrightarrow f(x) = f_1(f_2(x) + f_3(x) + f_4(x) + f_5(f_6(x))$, dove $f_1(x) = e^x$, $f_2(x) = x^2$, $f_3(x) = \sqrt{x}$, $f_4(x) = \cos x$, $f_5(x) = \sin x$ e $f_6(x) = x^3$, i.e. si compone $f_1(x)$ con la combinazione lineare $f_2(x) - 2f_3(x) + f_4(x) + (f_5 \circ f_6)(x)$, dove $(f_5 \circ f_6)(x) = f_5(f_6(x)) = \sin x^3$ è la composizione di $f_5(x)$ con $f_6(x)$.

8. $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^3 + 4x^2 + 4} \Longrightarrow$ in termini delle funzioni $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x$, $f_3(x) = x^2$, $f_4(x) = x^3$ e $f_5(x) = 1/x$, si considerano le combinazioni lineari $g(x) = f_3(x) - f_2(x) + f_1(x)$ e $h(x) = f_4(x) + 4f_3(x) + 4f_1(x)$, poi si compone $f_5(x)$ con $h(x)$, in modo da ottenere $k(x) = (f_5 \circ h(x)) = 1/h(x)$, quindi si scrive $f(x) = g(x)k(x)$, i.e. $f(x)$ si ottiene come prodotto delle due funzioni $g(x)$ e $k(x)$.

Osservazioni:

1. Esempi di funzioni principali sono le seguenti funzioni *funzioni algebriche*: *polinomi*, *funzioni razionali* (rapporti di polinomi), *funzioni irrazionali* (funzioni che coinvolgono potenze con esponenti irrazionali). Le funzioni non algebriche si dicono *trascendenti*; esempi di funzioni trascendenti sono le funzioni trigonometriche, esponenziali e logaritmi.

2. Sebbene le funzioni elementari siamo le funzioni di uso più frequente (ed essenzialmente le uniche di cui noi ci occuperemo), deve essere chiaro che le funzioni non elementari non hanno nulla di patologico. Di fatto, si presentano in modo del tutto naturale, per esempio cercando soluzioni di equazioni differenziali che coinvolgano anche solo funzioni elementari o calcolando integrali di funzioni elementari. Un'equazione differenziale è un'equazione che lega una funzione di una variabile $x \mapsto f(x)$ alle sue derivate (vedremo al capitolo 7 cos'è una derivata, ma non ci occuperemo di equazioni differenziali). Gli integrali saranno invece studiati nel capitolo 10, dove vedremo che non necessariamente l'integrale di una funzione elementare si può scrivere in termini di funzioni elementari (cfr. l'osservazione 6 del §10.4).

4.6 Esercizi

1. Si determinino dominio e codominio della funzione $f(x) = \sqrt{2 + \sin x}$.
2. Si determinino dominio e codominio della funzione $f(x) = \sqrt{e^x}$.
3. Si determinino dominio e codominio della funzione $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.
4. Si determini il dominio della funzione $f(x) = \left(\dfrac{x-1}{x+3}\right)^{1/5}$.
5. Si determinino dominio e codominio della funzione $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\sin(e^x)}}$.
6. Si determinino dominio e codominio della funzione $f(x) = \sqrt{\operatorname{tg} x}$.
7. Si determini il dominio di $f_1(x) = \dfrac{x^{1/3} + 9}{\sqrt{\ln(x^2 - 6x + 5)}}$ e di $f_2(x) = \dfrac{x^{1/2} + 9}{\sqrt{\ln(x^2 - 6x + 5)}}$.
8. Si determini il dominio di $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 5}{x^2 - 6x + 3}$.
9. Si determini il dominio di $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 5}{x^2 - 2x + 3}$.
10. Si determini il dominio di $f(x) = \ln(4e^{x^2 - 4x} - 4)$.
11. Si determini il dominio di $f(x) = \sin(\ln(4 + x^2))$.
12. Si determini il dominio di $f(x) = \sqrt{x^{2/3} - 6x^{8/3}}$.
13. Si determini il dominio di $f(x) = \sqrt{\dfrac{|x| - |x+1|}{2} - 1}$.
14. Si calcoli l'inversa della funzione $f : [0,1] \to [0,1]$ data da $f(x) = 2\sqrt{x} - x$.
15. Si calcoli l'inversa della funzione $f : [0,1] \to [0,1]$ data da $f(x) = \dfrac{1}{2}\sqrt{4 - 2x^2 - 2x}$.
16. Si calcoli l'inversa della funzione $f : [0,1] \to [0,1]$ data da $f(x) = \dfrac{1}{2}\sqrt{4 - x^2 - 3x}$.
17. Si determini il dominio di $f(x) = \sqrt{|x-2| - |x+2|}$.
18. Si determini il dominio di $f(x) = \sqrt{x|x| + 3}$.
19. Si determini il dominio di e^{-1/x^2}.
20. Si determini il dominio di $f(x) = \ln\left(|x| - 4|x - 4|\right)$.

Soluzioni:

1. Il dominio è
$$D_f = \mathbb{R},$$
mentre il codominio è
$$C_f = [1, \sqrt{3}].$$

2. Il dominio è
$$D_f = \mathbb{R},$$
mentre il codominio è
$$C_f = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}.$$

3. Il dominio è
$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 1\} = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty),$$
mentre il codominio è
$$C_f = \mathbb{R}_+.$$

4. Il dominio è $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$.

5. Il dominio è
$$D_f = \Big\{x : x \in (-\infty, \ln \pi) \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} (\ln(2k\pi), \ln((2k+1)\pi))\Big\},$$
mentre il codominio è
$$C_f = [1, \infty).$$

6. Il dominio è
$$D_f = \Big\{x : x \in \bigcup_{k=0}^{\infty} [k\pi, k\pi + \pi/2)\Big\},$$
mentre il codominio è
$$C_f = \mathbb{R}_+.$$

7. Il dominio di f_1 è
$$D_{f_1} = (-\infty, 3 - \sqrt{5}) \cup (3 + \sqrt{5}, +\infty),$$
mentre il dominio di f_2 è
$$D_{f_2} = [0, 3 - \sqrt{5}) \cup (3 + \sqrt{5}, +\infty).$$

8. Il dominio è $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 3 \pm \sqrt{6}\}$.

9. Il dominio è $D_f = \mathbb{R}$.

10. Il dominio è $D_f = (-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$.

11. Il dominio è $D_f = \mathbb{R}$.

12. Il dominio è $D_f = [-1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}]$.

13. Si scrive, a seconda del valore di x,

$$|x| - |x+1| = \begin{cases} x - (x+1) = -1, & x \geq 0, \\ -x - (x+1) = -2x - 1, & -1 \leq x < 0, \\ -x + (x+1) = 1, & x < -1. \end{cases}$$

Richiedendo che l'argomento della radice quadrata sia non negativo, i.e.

$$\frac{|x| - |x+1|}{2} - 1 \geq 0,$$

si ottengono i seguenti tre sistemi di disequazioni

$$\begin{cases} 1. \quad x \geq 0 & \Longrightarrow \quad -\dfrac{1}{2} - 1 \geq 0, \\ 2. \quad -1 \leq x < 0 & \Longrightarrow \quad -\dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2} - 1 \geq 0, \\ 3. \quad x < -1 & \Longrightarrow \quad \dfrac{1}{2} - 1 \geq 0. \end{cases}$$

Si verifica facilmente che nessuno dei tre sistemi ammette soluzioni. In conclusione, si trova che il dominio è $D_f = \emptyset$.

14. La funzione inversa è $g : [0,1] \to [0,1]$ data da

$$g(x) = \left(1 - \sqrt{1-x}\right)^2.$$

15. La funzione inversa è $g : [0,1] \to [0,1]$ data da

$$g(x) = \frac{1}{2}\left(-1 + \sqrt{9 - 8x^2}\right).$$

16. La funzione inversa è $g : [0,1] \to [0,1]$ data da

$$g(x) = \frac{1}{2}\left(-3 + \sqrt{25 - 16x^2}\right).$$

17. Si scrive, a seconda del valore di x,

$$|x-2| - |x+2| = \begin{cases} x - 2 - (x+2) = -4 & x \geq 2, \\ -x + 2 - (x+2) = -2x, & -2 \leq x < 2, \\ -x + 2 + (x+2) = 4, & x < -2. \end{cases}$$

Richiedendo che l'argomento della radice quadrata sia non negativo, i.e.

$$|x-2| - |x+2| \geq 0,$$

si ottengono i seguenti tre sistemi di disequazioni

$$\begin{cases} 1. \quad x \geq 2 & \Longrightarrow \quad -4 \geq 0, \\ 2. \quad -2 \leq x < 2 & \Longrightarrow \quad -2x \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad x \leq 0, \\ 3. \quad x < -2 & \Longrightarrow \quad 4 \geq 0. \end{cases}$$

In conclusione, si ha $D_f = R_- = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$.

18. Si scrive, distinguendo i casi $x \geq 0$ e $x < 0$,

$$x|x| + 3 = \begin{cases} x^2 + 3, & x \geq 0, \\ -x^2 + 3, & x < 0. \end{cases}$$

Richiedendo che l'argomento della radice quadrata sia non negativo, i.e. $x|x| + 3 \geq 0$, si ottengono i seguenti due sistemi di disequazioni

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ x^2 + 3 \geq 0, \end{cases}$$

e, similmente,

$$\begin{cases} x < 0, \\ -x^2 + 3 \geq 0. \end{cases}$$

Il primo sistema di disequazioni è soddisfatto per $x \geq 0$, mentre il secondo è soddisfatto per $x > 0$ tale che $x^2 \leq 3$, i.e. per $x \geq -\sqrt{3}$. Quindi si trova ce il dominio è $D_f = [-\sqrt{3}, +\infty)$.

19. Il dominio è $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$.

20. Il dominio è $D_f = (16/5, 16, 3)$.

5 | Limiti

5.1 Funzione distanza

Il grafico della funzione modulo è rappresentato in Figura 5.1, dove si è considerato che il grafico di $f(x) = |x|$ coincide con quello di $f_1(x) = x$ per $x \geq 0$ e con quello di $f_2(x) = -x$ per $x \leq 0$.

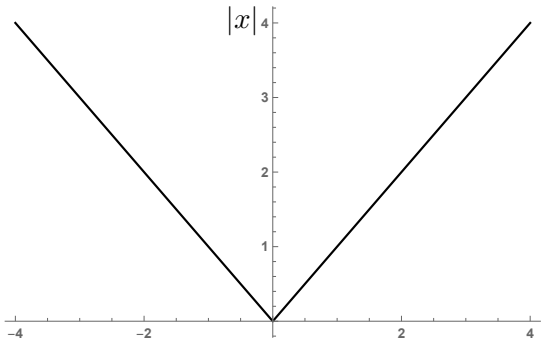


Figura 5.1: Grafico della funzione modulo

Definizione 5.1. *Se P_1 e P_2 sono due punti dell'asse reale, individuati da $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, si definisce* distanza *tra i due punti P_1 e P_2 la grandezza $d(P_1, P_2) = |x_1 - x_2|$.*

Proprietà:

1. *positività*: $d(P_1, P_2) \geq 0$ e si ha $d(P_1, P_2) = 0$ se e solo se $P_1 = P_2$;
2. *simmetria*: $d(P_1, P_2) = d(P_2, P_1)$;
3. *diseguaglianza triangolare*: $d(P_1, P_2) \leq d(P_1, P_3) + d(P_3, P_2)$.

Osservazioni:

1. La dimostrazione delle tre proprietà della distanza segue dalle proprietà del modulo discusse a pag. 32.
2. La distanza tra due punti dell'asse reale è quindi la lunghezza del segmento che ha come estremi i due punti.

Ricordiamo la definizione di intorno data nel §1.7.1, che qui riportiamo per comodità.

Definizione 5.2. *Si definisce* intorno *di centro x_0 e raggio R l'intervallo aperto* $B_R(x_0) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < R\} = (x_0 - R, x_0 + R)$.

5.2 Limite

Per indicare che x è molto vicino a un valore fissato x_0 scriviamo $|x - x_0| < \delta$, con $\delta > 0$ molto piccolo. Per dire che x è molto grande in modulo scriviamo $|x| > M$, con $M > 0$ molto grande: se inoltre x è molto grande e positivo specifichiamo $x > M$, mentre se è negativo scriviamo $x < -M$, sempre con $M > 0$ molto grande.

Definizione 5.3. *Caso di limite infinito per x che tende all'infinito:*

1. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ *se* $\forall N > 0\ \exists M > 0$ *tale che se* $x > M$ *allora* $f(x) > N$.
2. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ *se* $\forall N > 0\ \exists M > 0$ *tale che se* $x < -M$ *allora* $f(x) > N$.
3. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ *se* $\forall N > 0\ \exists M > 0$ *tale che se* $x > M$ *allora* $f(x) < -N$.
4. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ *se* $\forall N > 0\ \exists M > 0$ *tale che se* $x < -M$ *allora* $f(x) < -N$.

Osservazioni:

1. Nella Definizione 5.3, M dipende da N e, tipicamente, più grande è N, più grande si deve prendere M.
2. La Definizione 5.3 esprime in modo matematico il concetto che per x sempre più grande, i.e. sempre più "vicino all'infinito", i valori $f(x)$ che la funzione assume sono sempre più grandi in modulo.

Definizione 5.4. *Caso di limite infinito per x che tende a un valore finito:*

1. $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ *se* $\forall N > 0\ \exists \delta > 0$ *tale che se* $0 < |x - x_0| < \delta$ *allora* $f(x) > N$.
2. $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ *se* $\forall N > 0\ \exists \delta > 0$ *tale che se* $0 < |x - x_0| < \delta$ *allora* $f(x) < -N$.

Osservazioni:

1. Analogamente a quanto osservato riguardo alla Definizione 5.3, anche nella Definizione 5.4, il numero δ dipende da N e, tipicamente, più grande è N, più piccolo si deve prendere δ.
2. La Definizione 5.3 esprime in modo matematico il concetto che per x sempre più vicino al valore x_0, i valori $f(x)$ che la funzione assume sono sempre più grandi in modulo.

3. Se il limite di una funzione, per x che tende all'infinito (i.e. a $+\infty$ oppure a $-\infty$) o a un valore finito x_0, è $+\infty$ oppure $-\infty$ si dice che la funzione $f(x)$ *diverge*.
4. Se al contrario il limite, sempre per x che tende all'infinito o a un valore finito, è un numero finito si dice che la funzione *converge* a quel numero.

Esempi:

1. Esempi di funzioni che tendono a $+\infty$ per x che tende a $+\infty$ sono le potenze con esponente positivo, e gli esponenziali e i logaritmi con base positiva.
2. Un esempio di funzione che diverge per x che tende a un valore finito x_0, nel caso specifico $x_0 = 0$, è la funzione $f(x) = 1/x^2$ e, più in generale, qualsiasi potenza che abbia come esponente un numero negativo pari.

Definizione 5.5. *Caso di limite finito:*

1. $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ *se* $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ *tale che se* $0 < |x - x_0| < \delta$ *allora* $|f(x) - \ell| < \varepsilon$.
2. $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \ell$ *se* $\forall \varepsilon > 0\ \exists M > 0$ *tale che se* $x > M$ *allora* $|f(x) - \ell| < \varepsilon$.
3. $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \ell$ *se* $\forall \varepsilon > 0\ \exists M > 0$ *tale che se* $x < -M$ *allora* $|f(x) - \ell| < \varepsilon$.

Osservazioni:

1. Nella Definizione 5.5, sia δ sia M dipendono da ε. Il valore di ε è arbitrario: comunque si fissi ε, è possibile trovare un valore di δ o di M per i quali le condizioni scritte sono verificate. Quello che comunque interessa è cosa succede per ε sempre più piccolo: il senso della definizione è che, preso ε piccolo quanto si voglia, è sempre possibile trovare corrispondentemente un valore di δ sufficientemente piccolo (nel caso 1) o un valore di M sufficientemente grande (nei casi 2 e 3) tale che per x distante da x_0 meno di δ o per x più grande di M, rispettivamente, il valore di $f(x)$ dista da ℓ meno di ε.
2. Nel caso 1 di Definizione 5.5, la condizione $0 < |x - x_0| < \delta$ indica che x è molto vicino a x_0 ma distinto da x_0. Infatti, per definire il limite, si devono considerare valori di $f(x)$, con x sempre più vicino a x_0, ma il valore del limite è indipendente dal valore che la funzione eventualmente assuma in x_0. Di fatto la funzione potrebbe non essere neppure definita in x_0 (cfr. anche le osservazioni alla fine del paragrafo).
3. Graficamente, la nozione di limite nel caso 1 di Definizione 5.5 si può interpretare nel modo seguente (cfr. la Figura 5.2): i punti del grafico graf(f) corrispondenti ai valori di x la cui distanza da x_0 è minore di δ si trovano all'interno della striscia $y \in [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$. Più piccolo si fissa ϵ, più piccolo si deve scegliere δ: per ε sempre più piccolo il rettangolo in grigio in Figura 5.2 diventa sempre più piccolo e, nel limite, si riduce a un punto che, nel piano cartesiano, corrisponde al punto di ccordinate (x_0, ℓ).

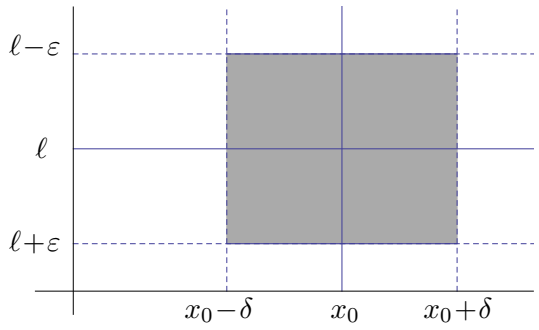


Figura 5.2: Limite ℓ della funzione $f(x)$ per $x \to x_0$.

4. Considerazioni grafiche analoghe a quella dell'osservazione 3 si possono fare anche per gli altri limiti della Definizione 5.5. Per esempio, per $x \to +\infty$ si considera la semistriscia infinita definita dalle condizioni $y \in [\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon]$ e $x > M$: più piccolo si fissa ε, più grande va scelto il valore di M.

Esercizi:

1. $\lim_{x\to 2}(2x-1) = 3$.
2. $\lim_{x\to 1} \dfrac{1}{x} = 1$.
3. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2+x-2}{x-1} = 3$.
4. $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.
5. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{x-1}{x+2} = 1$.
6. $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.
7. $\lim_{x\to \pm\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$.
8. $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$.

Soluzioni:

1. $|2x-1-3| = 2|x-2| < 2\delta \Longrightarrow 2\delta = \varepsilon \Longrightarrow \delta = \varepsilon/2$.
2. $|1/x - 1| = |(x-1)/x| \le \delta/(1-\delta) \Longrightarrow \varepsilon = \delta/(1-\delta) \Longrightarrow \delta = \varepsilon/(1+\varepsilon)$.

3. $x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2) \Longrightarrow |(x-1)(x+2)/(x-1) - 3| = |x+2-3| = |x-1| < \delta \Longrightarrow \varepsilon = \delta$.
4. $1/x < 1/M \Longrightarrow M = 1/\varepsilon$.
5. $|(x-1)/(x+2) - 1| = |3/|x+2| = 3/(x+2) \Longrightarrow x + 2 > 3/\varepsilon \Longrightarrow M = 3/\varepsilon - 2$.
6. $1/x > -1/M \Longrightarrow M = 1/\varepsilon$.
7. $1/x^2 > 1/M^2 \Longrightarrow \varepsilon = 1/M^2 \Longrightarrow M = 1/\sqrt{\varepsilon}$.
8. se $|x| < \delta$ si ha $1/x^2 > 1/\delta \Longrightarrow \delta = 1/\sqrt{N} \Longrightarrow$ fissato $N > 0$, se $\delta = 1/\sqrt{N}$ e $|x| < \delta$, si ottiene $1/x^2 > N$.

Osservazioni:

1. La funzione può non essere definita nel punto in cui si fa il limite (cfr. gli esercizi precedenti 3 e 8); si veda anche l'osservazione 2 dopo la Definizione 5.5.
2. Non è detto che il limite esista sempre, come mostrano gli esempi seguenti.

Esempi:

1. $f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} \Longrightarrow$ non esiste il limite per $x \to 0$.
2. $f(x) = \cos x \Longrightarrow$ non esiste il limite per $x \to \infty$.
3. $f(x) = \dfrac{1}{\cos x} \Longrightarrow$ non esiste il limite per $x \to \infty$.
4. $f(x) = \sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right) \Longrightarrow$ non esiste il limite per $x \to 0$.
5. $f(x) = x^2 \cos x \Longrightarrow$ non esiste il limite per $x \to \infty$.
6. $f(x) = \dfrac{1}{x} \Longrightarrow$ non esiste il limite per $x \to 0$.

5.3 Limite destro e sinistro

Nella definizione di limite di una funzione per x che tende a un valore finito x_0 si considera la funzione in un intorno di x_0, studiandone il comportamento per valori di x, sempre più vicini a x_0, che si trovano sia a destra che a sinistra di x_0. A volte può servire considerare solo cosa succede per valori di x che tendono a x_0 mantenendosi però sempre a sinistra o a destra di x_0. Questo porta alla seguente definizione.

Definizione 5.6. *Definiamo il* limite destro *e il* limite sinistro*, rispettivamente, come segue:*

- $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \ell$ *se* $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ *tale che se* $0 < x - x_0 < \delta$ *allora* $|f(x) - \ell| < \varepsilon$.
- $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \ell$ *se* $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ *tale che se* $0 > x - x_0 > -\delta$ *allora* $|f(x) - \ell| < \varepsilon$.

Esempi:

1. La funzione $f(x) = \dfrac{1}{x}$ ammette limite destro e sinistro per $x \to 0$: $\lim_{x\to 0^\pm} \dfrac{1}{x} = \pm\infty$.
2. La funzione dell'esempio 1 alla fine del §5.2 ammette limite destro e sinistro, che valgono rispettivamente:
$$\lim_{x\to 0^\pm} f(x) = \pm 1.$$
3. La funzione $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ ammette limite destro e sinistro per $x \to 0$, e i due limiti coincidono:
$$\lim_{x\to 0^\pm} \frac{1}{x^2} = +\infty.$$
4. La funzione $\sin\Big(\dfrac{1}{x^2}\Big)$ (cfr. l'esempio 4 alla fine del §5.2) non ammette né limite destro né limite sinistro.

Osservazione: Esiste il limite $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ se e solo se
$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \ell,$$
ovvero se e solo se il limite destro e il limite sinistro esistono e sono uguali.

5.4 Funzioni limitate e funzioni illimitate

Definizione 5.7. *Una funzione* $f : I \to \mathbb{R}$ *si dice* limitata *in* I *se esiste* $M > 0$ *tale che* $|f(x)| < M\ \forall x \in I$. *Una funzione* illimitata *è una funzione che non è limitata.*

Esempi:

1. $f(x) = \cos x$, per $x \in \mathbb{R}$, è limitata in $\mathbb{R}$.
2. $f(x) = 1/x$, $f(x) = x^2$ sono limitate in $[1, 2]$.
3. $f(x) = 1/x$ e $f(x) = x^2$ sono illimitate in $\mathbb{R}$.
4. Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo chiuso: la funzione $f(x) = x^2$, $x \in I$, è limitata per ogni I, la funzione $f(x) = 1/x$, $x \in I$, è limitata per ogni I che non contenga lo zero.

5. La funzione $f(x) = e^{-x}$ è illimitata in $\mathbb{R}$.

6. La funzione $f(x) = e^{-x^2}$ è limitata in $\mathbb{R}$.

7. La funzione $f(x) = \ln x$ è illimitata in $\mathbb{R}$.

8. La funzione $f(x) = \operatorname{tg} x$ è illimitata in $\mathbb{R}$.

9. La funzione $f(x) = x^2/(x^2+1)$ è limitata in $\mathbb{R}$, poiché $0 \leq x^2 \leq x^2 + 1$.

10. La funzione $f(x) = x/(x^2+1)$ è limitata in $\mathbb{R}$, poiché, se $|x| \geq 1$, si ha

$$|f(x)| = \frac{|x|}{x^2+1} \leq \frac{x^2}{x^2+1} < 1,$$

mentre, se $|x| < 1$, si può stimare

$$|f(x)| = \frac{|x|}{x^2+1} < \frac{1}{x^2+1} \leq 1.$$

Definizione 5.8. *Una funzione* $f : I \to \mathbb{R}$ *si dice* limitata superiormente *in* I *se esiste* $M > 0$ *tale che* $f(x) < M \ \forall x \in I$.

Definizione 5.9. *Una funzione* $f : I \to \mathbb{R}$ *si dice* limitata inferiormente *se esiste* $M > 0$ *tale che* $f(x) > -M \ \forall x \in I$.

Osservazioni:

1. Una funzione è limitata se e solo se è sia limitata superiormente sia limitata inferioremente.

2. Se una funzione f è limitata superiormente allora il suo codominio C_f ammette estremo superiore. Analogamente, se f è limitata inferiormente allora C_f ammette estremo inferiore. In particolare, se f è limitata, allora C_f è un insieme limitato e quindi esistono finiti $\sup C_f$ e $\inf C_f$.

Definizione 5.10. *Sia* $f : I \to \mathbb{R}$. *Se* f *è* limitata superiormente *definiamo* estremo superiore *di* f *l'estremo superiore del suo codominio. Se* f *è* limitata inferiormente *definiamo* estremo inferiore *di* f *l'estremo inferiore del suo codominio.*

Osservazioni:

1. L'estremo superiore e l'estremo inferiore di una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ vengono indicati con $\sup_{x \in I} f(x)$ e $\inf_{x \in I} f(x)$, rispettivamente.
2. Per definizione si ha $\sup_{x \in I} f(x) = \sup C_f$ e $\inf_{x \in I} f(x) = \inf C_f$.
3. Se $\sup C_f \in C_f$ diciamo che la funzione f ha *massimo* $\max_{x \in I} f(x) = \sup_{x \in I} f(x)$.
4. Se $\inf C_f \in C_f$ diciamo che la funzione f ha *minimo* $\min_{x \in I} f(x) = \inf_{x \in I} f(x)$.

Esempi:

1. La funzione $f(x) = x^2$ è inferiormente limitata e si ha $\inf_{x\in\mathbb{R}} f(x) = \min_{x\in\mathbb{R}} f(x) = 0$.
2. La funzione $f(x) = 1 - x^2$ è superiormente limitata e si ha $\sup_{x\in\mathbb{R}} f(x) = \max_{x\in\mathbb{R}} f(x) = 1$.
3. La funzione $f(x) = e^{-x^2}$ è limitata e si ha $\sup_{x\in\mathbb{R}} f(x) = \max_{x\in\mathbb{R}} f(x) = 1$ e $\inf_{x\in\mathbb{R}} f(x) = 0$.
4. La funzione $f(x) = x^3$ non è superiormente né inferiormente limitata.

5.5 Teoremi sui limiti

Consideriamo in questo paragrafo il caso in cui le funzioni abbiano limite finito ℓ, mentre x_0 può essere finito o infinito (i.e. $+\infty$ oppure $-\infty$).

Teorema 5.11. *Se esiste finito* $\ell = \lim_{x\to x_0} f(x)$*, allora* $f(x)$ *è limitata quando* x *tende a* x_0*.*

Osservazioni:

1. Se il limite è infinito la funzione non è limitata. Il viceversa non è vero: se una funzione non è limitata non è detto che tende a $\pm\infty$ (esempio: $x \sin x$ per $x \to +\infty$).
2. Se una funzione $f(x)$ è definita in un intorno I ed esiste una costante $c > 0$ tale che $|f(x)| \geq c\ \forall x \in I$, allora $1/f(x)$ è definita e limitata per ogni $x \in I$.

Teorema 5.12. *Se* $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ *e* $\lim_{x\to x_0} g(x) = \ell'$ *allora* $\lim_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = \ell + \ell'$*.*

Teorema 5.13. *Se* $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ *e* $\lim_{x\to x_0} g(x) = \ell'$ *allora* $\lim_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \ell \cdot \ell'$*.*

Esempi:

1. Se k è costante $\lim_{x\to x_0} k \cdot f(x) = k \cdot \lim_{x\to x_0} f(x)$;
2. $\lim_{x\to 1} 3x^2 = 3$;
3. $\lim_{x\to 0}(1 + 2x + 3x^2 + 6x^3) = 1$;
4. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2 - 2x}{x^2} = 1$.

Teorema 5.14. *Se* $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ *e* $\lim_{x\to x_0} g(x) = \ell' \neq 0$*, allora* $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\ell}{\ell'}$*.*

Teorema 5.15. *Siano* $f(x)$*,* $g(x)$ *e* $h(x)$ *tre funzioni definite in* I*, tali che* $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ $\forall x \in I$*. Se* $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = \ell$*, allora si ha anche* $\lim_{x\to x_0} g(x) = \ell$*.*

Osservazione: Il Teorema 5.15 è noto come *teorema del confronto* o *teorema dei carabinieri.*

Teorema 5.16. *Se $f(x) \geq 0$ per $x \in I$ e $\exists \ell = \lim_{x\to x_0} f(x)$, allora $\ell \geq 0$.*

Osservazione: La dimostrazione del Teorema 5.16 (cfr. i complementi alla fine del paragrafo) è interessante perché fornisce un esempio di *dimostrazione per assurdo*. L'idea con cui la dimostrazione procede è la seguente: per dimostrare una proprietà si suppone che invece non valga e si fa vedere che in questo modo si trova una contraddizione, quindi la proprietà deve valere (cfr. i complementi del §1.5 per maggiori dettagli).

Teorema 5.17. *Se $f(x) \geq g(x)$ per $x \in I$ e $\exists \ell = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, $\ell' = \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$, allora $\ell \geq \ell'$.*

Osservazioni:

1. Il Teorema 5.16 può essere visto come un caso particolare del Teorema 5.17, con $g(x) = 0$ $\forall x \in I$.
2. Si noti che, nell'enunciato dei Teoremi 5.16 e 5.17, anche se vale il segno stretto $f(x) > g(x)$ può valere il segno $=$ per i limiti. Per esempio, se

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, \qquad g(x) = 0,$$

per $x \to +\infty$ entrambe le funzioni tendono allo stesso limite $\ell = \ell' = 0$, tuttavia si ha $f(x) > g(x)$ $\forall x \neq 0$. Analoghe considerazioni valgono per il Teorema 5.15: se $f(x) < g(x) < h(x)$ e le due funzioni f e h hanno lo stesso limite ℓ allora anche g ha limite ℓ. Come esempio si considerino le funzioni

$$f(x) = -\frac{1}{x^2}, \qquad g(x) = 0, \qquad h(x) = \frac{1}{x^2},$$

sempre per $x \to +\infty$. Le tre funzioni tendono tutte a 0 per $x \to +\infty$, tuttavia si ha $f(x) < g(x) < h(x)$ per ogni $x \neq 0$.

Teorema 5.18. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell \neq 0 \Longrightarrow f(x)$ *ha il segno di ℓ per x che tende a x_0.*

Complementi (∗):

1. *Dimostrazione del Teorema 5.11.* Per definizione di limite,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tale che per } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ si ha } |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Quindi per $x \in B_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$ si ha (per la proprietà 2 del modulo a pag. 32)

$$||f(x)| - |\ell|| \leq |f(x) - \ell| < \varepsilon,$$

che implica $|f(x)| \leq M = |\ell| + \varepsilon$, e quindi la limitatezza di $f(x)$ per x che tende a x_0.

2. *Dimostrazione del Teorema 5.12.* Per definizione di limite,

   1. $\forall \varepsilon_1 > 0 \exists \delta_1 > 0$tale che per $0 < |x - x_0| < \delta_1$ si ha $|f(x) - \ell| < \varepsilon_1$,
   2. $\forall \varepsilon_2 > 0 \exists \delta_2 > 0$ tale che per $0 < |x - x_0| < \delta_2$ si ha $|g(x) - \ell'| < \varepsilon_2$.

   Fissato $\varepsilon > 0$ scegliamo $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon/2$ e definiamo $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Allora per $0 < |x - x_0| < \delta$ si ha
   $$|f(x) - \ell| \leq \varepsilon/2 \qquad |g(x) - \ell'| < \varepsilon/2,$$
   da cui segue che $|(f(x) + g(x)) - (\ell + \ell')| \leq |f(x) - \ell| + |g(x) - \ell'| < \varepsilon$.

3. *Dimostrazione del Teorema 5.13.* Per definizione di limite,

   1. $\forall \varepsilon_1 > 0 \exists \delta_1 > 0$tale che per $0 < |x - x_0| < \delta_1$ si ha $|f(x) - \ell| < \varepsilon_1$,
   2. $\forall \varepsilon_2 > 0 \exists \delta_2 > 0$ tale che per $0 < |x - x_0| < \delta_2$ si ha $|g(x) - \ell'| < \varepsilon_2$.

   Inoltre, poiché la funzione f ammette limite, allora f è limitata per x che tende a x_0 (per il Teorema 5.11): quindi esistono $M > 0$ e $\delta_3 > 0$ tale che $|f(x)| < M$ per $0 < |x - x_0| < \delta_3$. Vogliamo dimostrare che
   $$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tale che per } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ si ha } |f(x) \cdot g(x) - \ell \cdot \ell'| < \varepsilon.$$
   Fissato $\varepsilon > 0$, poniamo $\varepsilon_1 = \varepsilon/2|\ell'|$, $\varepsilon_2 = \varepsilon/2M$ e $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$. Per $|x - x_0| < \delta$ si ha
   $$\begin{aligned} |f(x) \cdot g(x) - \ell \cdot \ell'| &\leq |f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot \ell'| + |f(x) \cdot \ell' - \ell \cdot \ell'| \\ &\leq |f(x)| \cdot |g(x) - \ell'| + |\ell'| \cdot |f(x) - \ell| \\ &\leq M \cdot (\varepsilon/2M) + |\ell'| \cdot (\varepsilon/2|\ell'|) = \varepsilon, \end{aligned}$$
   che è quanto si voleva dimostrare.

4. *Dimostrazione del Teorema 5.14.* Segue dal teorema 5.13, notando che se $\ell' \neq 0$ allora $1/g(x)$ è limitata per $x \to x_0$ e si ha $\lim_{x \to x_0} 1/g(x) = 1/\ell'$. L'ultima affermazione si dimostra notando che
   $$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{\ell'} \right| = \left| \frac{g(x) - \ell'}{g(x)\ell'} \right|.$$
   Allora $\forall \varepsilon' > 0$ $\exists \delta' > 0$ tale che per $0 < |x - x_0| < \delta'$ si ha
   $$|g(x) - \ell'| < \varepsilon' \implies \big||g(x)| - |\ell'|\big| < \varepsilon' \implies -\varepsilon' < |g(x)| - |\ell'| < \varepsilon' \implies |g(x)| > |\ell'| - \varepsilon'.$$
   Per tali x si ha
   $$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{\ell'} \right| \leq \frac{\varepsilon'}{|\ell'|(|\ell'| - \varepsilon')}.$$
   In particolare fissato $\varepsilon > 0$ si può porre
   $$\varepsilon' = \frac{\varepsilon(|\ell'|)^2}{1 + \varepsilon|\ell'|} \implies \frac{\varepsilon'}{|\ell'|(|\ell'| - \varepsilon')} = \varepsilon.$$
   Se si sceglie $\delta = \delta'$, per $0 < |x - x_0| < \delta$ si ha allora $|1/g(x) - 1/\ell'| < \varepsilon$.

5. *Dimostrazione del Teorema 5.15.* Per definizione di limite $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tale che $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ e $|h(x) - \ell| < \varepsilon$ per $0 < |x - x_0| < \delta$. Poiché $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ si ha allora

$$-\varepsilon < f(x) - \ell \leq g(x) - \ell \leq h(x) - \ell < \varepsilon,$$

quindi $|g(x) - \ell| < \varepsilon$.

6. *Dimostrazione del Teorema 5.16.* Si ragiona per assurdo: supponiamo $\ell < 0$. Allora fissato $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per $0 < |x - x_0| < \delta$ si ha $f(x) - \ell < \varepsilon$. Scelto $\varepsilon = -\ell/2$ si trova $f(x) < \ell + \varepsilon = \ell/2 < 0$, giungendo così a una contraddizione.

7. *Dimostrazione del Teorema 5.17.* Si definisce $h(x) = f(x) - g(x)$ e si applica il Teorema 5.16.

8. *Dimostrazione del Teorema 5.18.* Per definizione di limite $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tale che per $0 < |x - x_0| \leq \delta$ si ha $\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$. Se si sceglie $\varepsilon = \ell/2$ allora $\exists \delta$ tale che per ogni x tale che $0 < |x - x_0| < \delta$ si ha $\ell/2 < f(x) < 3\ell/2$, e quindi f ha il segno di ℓ.

5.6 Alcuni esempi e alcuni limiti notevoli

Iniziamo con un'osservazione semplice ma importante. Quando si considera il limite di una funzione $f(x)$ per $x \to x_0$, può essere conveniente introdurre una nuova variabile t in termini della quale sia più semplice calcolare il limite. In tal caso bisogna determinare la relazione che lega le variabili t e x, scrivendo x in funzione di t, cioè $x = x(t)$, e calcolare a quale valore t_0 tende t quando x tende a x_0:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{t \to t_0} f(x(t)).$$

Può infatti succedere che il secondo limite sia un limite che già si conosca o che comunque sia più semplice da calcolare.

Esempi:

1. $\lim_{x \to 0} \sin x^2 \Longrightarrow$ scrivendo $t = x^2$, così che $t \to 0$ per $x \to 0$, si ottiene

$$\lim_{x \to 0} \sin x^2 = \lim_{t \to 0} \sin t.$$

Si vedano i limiti notevoli discussi sotto per il calcolo dell'ultimo limite.

2. $\lim_{x \to 0} \ln \sqrt{x+1} \Longrightarrow$ scrivendo $t = \sqrt{x+1}$, così che $t \to 1$ per $x \to 0$, si ottiene

$$\lim_{x \to 0} \ln \sqrt{x+1} = \lim_{t \to 1} \ln t.$$

Il valore dell'ultimo limite è $\ln 1 = 0$: questo segue dal fatto che il logariutmo è una funzione continua (cfr. il §6.1).

3. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2-x}-1}{x^2-x} \Longrightarrow$ scrivendo $t = x^2 - x$, così che $t \to 0$ per $x \to 0$, si ottiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2-x}-1}{x^2-x} = \lim_{t\to 0} \frac{e^t - 1}{t}.$$

Vedremo nel §6.2 come si calcola l'ultimo limite.

4. $\lim_{x\to\pi} \sin x \Longrightarrow$ scrivendo $t = x - \pi$, così che $t \to 0$ per $x \to \pi$, si ottiene

$$\lim_{x\to\pi} \sin x = 0 = \lim_{t\to 0} \sin(\pi + t) = -\lim_{t\to 0} \sin t,$$

dove si è usato che $\sin(t + \pi) = \sin t \cos\pi + \cos t \sin\pi = -\sin t$, in virtù delle formule di addizione viste nel §3.6.

La strategia da seguire nel calcolo dei limiti di funzioni elementari è di ricondursi di volta in volta a limiti già noti. Negli esempi sopra considerati si è riscritto di volta in volta il limite di una funzione data come il limite di una funzione più semplice, con l'idea che il secondo limite sia noto o comunque più facile da calcolare. Resta poi ovviamente la questione di calcolare esplicitamente tale limite.

Rivestono allora particolare importanza alcuni limiti, detti *limiti notevoli*, a cui spesso è possibile ridursi attraverso alcuni passaggi algebrici. Essi costituiscono quindi una collezione di limiti non banali che, una volta impressi nella mente, possono poi essere utilizzati per calcolare limiti di funzioni elementari più complesse che li coinvolgono. Si pensi ai due limiti considerati negli esempi 1 e 4: entrambi sono stati ricondotti allo stesso limite.

Alcuni limiti notevoli:

1. $\lim_{x\to 0} \sin x = 0.$
2. $\lim_{x\to 0} \cos x = 1.$
3. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1.$
4. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{tg} x}{x} = 1.$
5. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin kx}{x} = k$, con $k \in \mathbb{R}$.
6. $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x} = 0.$
7. $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}.$
8. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{\sin x} = 3.$

Soluzioni:

1. Si ha $0 \leq \sin x \leq x$ se $x \in [0, \pi/2]$ e $0 > \sin x > x$ se $x \in [-\pi/2, 0)$. Infatti, per $x \in [0, \pi/2]$, facendo riferimento alla Figura 5.3, $\sin x$ è la lunghezza del segmento AB, mentre x è la lunghezza dell'arco di cerchio del primo quadrante che collega i due punti D e A (la lunghezza di un arco di cerchio di raggio r sotteso da un angolo θ è $r\theta$). Si trova pertanto $0 \leq \sin x \leq x$, così che, per $x \geq 0$, il risultato segue dal Teorema 5.15. Per $x < 0$ si può usare il fatto che la funzione è dispari (cfr. pag 59).

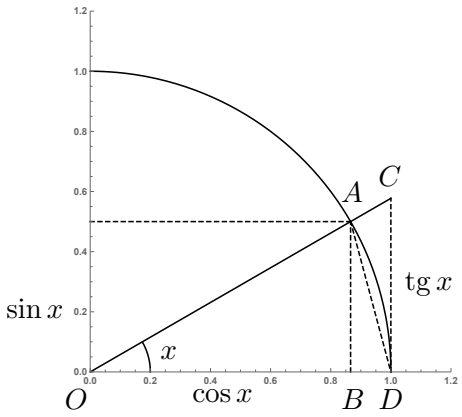


Figura 5.3: Costruzione geometrica per il calcolo dei limiti notevoli 1 e 4.

2. Si ha
$$\cos x = \cos((x/2) + (x/2)) = \cos^2(x/2) - \sin^2(x/2) = 1 - 2\sin^2(x/2)$$
per le formule di addizione. Si usa quindi che $\lim_{x\to 0} \sin(x/2) = 0$ per il punto precedente.

3. La funzione $\sin x/x$ è pari, quindi basta studiare il caso $x \geq 0$. Si ha $\sin x < x < \operatorname{tg} x$ per $0 < x < \pi/2$. Infatti, con riferimento alla Figura 5.3), dove $OB = \cos x$, $AB = \sin x$ e $CD = \operatorname{tg} x$ (poiché i triangoli OAB e ACD sono simili), le aree dei triangoli OAD e OCD, sono rispettivamente $(\sin x)/2$, e $(\operatorname{tg} x)/2$, mentre l'area del settore circolare di angolo x, data da $x/2$, è maggiore della prima e minore della seconda (l'area del settore circolare di un cerchio di raggio r con angolo al centro θ è data da $\theta r^2/2$, così che l'area del settore circolare OAD è $x/2$). Dividendo per $\sin x$, si trova $1 < x/\sin x < 1/\cos x$, ovvero $\cos x < \sin x/x < 1$. Si applica quindi il Teorema 5.15.

4. $\operatorname{tg} x/x = (\sin x/x) \cdot (1/\cos x)$: si applica quindi il Teorema 5.14.

5. $\sin kx/x = (\sin kx/kx) \cdot (kx/x)$: si applica quindi il Teorema 5.13.

6. $1 - \cos x = 2\sin^2(x/2)$: si applica quindi il Teorema 5.13.

7. $1 - \cos x = 2\sin^2(x/2)$: si applica quindi il Teorema 5.13.

8. $\sin 3x/\sin x = (\sin 3x/3x) \cdot (3x/x) \cdot (x/\sin x)$: si applica quindi il Teorema 5.13.

Osservazione: Vedremo altri limiti notevoli alla fine del §6.2, dopo aver introdotto la nozione di continuità di una funzione.

5.7 Un limite notevole: il numero di Nepero

Consideriamo il seguente limite:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x.$$

Si potrebbe pensare

$$(1+1/x)\to 1,\quad x\to\infty\quad\Longrightarrow\quad (1+1/x)^x\to 1^\infty=1.$$

L'argomento però non è assolutamente corretto: in realtà 1^∞ è una forma indeterminata (cfr. il §8.2) e il limite va discusso con attenzione. L'argomento corretto per calcolare il limite sarà discusso nei §5.7.1 e 5.7.2.

Osservazioni:

1. Il numero $e = 2.718281824...$ è un numero irrazionale (trascendente) ed è chiamato *numero di Nepero* o *numero di Eulero*.
2. Esistono definizioni alternative (ed equivalenti) del numero di Nepero, in termini di serie di Taylor o di soluzioni di equazioni differenziali.

Esercizi:

1. Si dimostri che $\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$,
2. Si dimostri che $\lim_{x\to0}(1+x)^{1/x} = e$.
3. Si dimostri che $\lim_{x\to0}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x = e^3$.
4. Si dimostri che $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^2} = e$.

Soluzioni:

1. Si opera il cambio di variabili $x = -(t+1)$.
2. Si opera il cambio di variabili $x = 1/t$.
3. Si opera il cambio di variabili $x = 3t$ e si scrive

$$\left(1+\frac{3}{x}\right)^x=\left(1+\frac{1}{t}\right)^{3t}=\left(\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right)^3=\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\cdot\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\cdot\left(1+\frac{1}{t}\right)^t.$$

   Si applica quindi il Teorema 5.13 sul limite del prodotto.
4. Si opera il cambio di variabili $x^2 = t$.

5.7.1 Calcolo del limite: prima parte (∗)

Consideriamo prima il limite $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, con $n\in\mathbb{N}$, e procediamo come segue.

- Mostriamo innanzitutto che la successione $(1+1/n)^n$ è limitata, ovvero che $\exists c_2>c_1>0$ tali che $c_1\le(1+1/n)^n\le c_2\ \forall n\in\mathbb{N}$. Infatti, per la formula del binomio (cfr. il §1.2.2), si ha

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}=1+1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right),$$

dove si è tenuto conto che

$$\begin{aligned}
&\binom{n}{1}\frac{1}{n}=\frac{n!}{1!(n-1)!}\frac{1}{n}=\frac{n}{n}=1,\\
&\binom{n}{2}\frac{1}{n^2}=\frac{n!}{2!(n-2)!}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{2!}\frac{n(n-1)}{n^2}=\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right),\\
&\binom{n}{3}\frac{1}{n^3}=\frac{n!}{3!(n-3)!}\frac{1}{n^3}=\frac{1}{3!}\frac{n(n-1)(n-2)}{n^3}=\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right),\\
&\dots\dots\\
&\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{1}{n^k}=\frac{1}{k!}\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-(k-1))}{n^k}\\
&\qquad=\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right),\\
&\dots\dots\\
&\binom{n}{n}\frac{1}{n^n}=\frac{n!}{n!0!}\frac{1}{n^n}=\frac{1}{n!}\frac{n(n-1)(n-2)\dots1}{n^n}\\
&\qquad=\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).
\end{aligned}$$

Quindi, dal momento che $0<1-k/n\le1\ \forall k=1,\dots,n-1$, si trova

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\ge1+1+0\qquad\Longrightarrow\qquad\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\ge c_1=2.$$

Inoltre, stimando, per $k\ge2$,

$$k!=1\cdot2\cdot3\cdot4\dots\cdot(k-1)\cdot k\ge1\cdot\underbrace{2\cdot2\cdot2\dots\cdot2}_{k-1\text{ volte}}\ge2^{k-1}$$

si ottiene

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq 1+1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!} \leq 1+1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2^{k-1}} = 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}$$
$$= 1+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^k} = 1+\frac{1-1/2^n}{1-1/2} = 1+2-\frac{1}{2^{n-1}} \leq 3 = c_2,$$

dove si è utilizzata la formula della somma geometrica (cfr. l'osservazione 4 del §1.4) di ragione 1/2.

- Come passo successivo, mostriamo che la successione $(1+1/n)^n$ è strettamente crescente, ovvero che

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Possiamo riscrivere l'ultima diseguaglianza nella forma

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n < \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \quad \Longrightarrow \quad \left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^n > \frac{n+1}{n+2}.$$

Se scriviamo

$$\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^n = \left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^n = \left(\frac{n^2+2n+1-1}{n^2+2n+1}\right)^n = \left(1-\frac{1}{n^2+2n+1}\right)^n,$$

la diseguaglianza di Bernouilli (cfr. l'osservazione 3 del §1.4) con $x = -1/((n^2+2n+1)$ ci permette di stimare

$$\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^n = \left(1-\frac{1}{n^2+2n+1}\right)^n \geq 1-\frac{n}{n^2+2n+1}.$$

D'altra parte, dal momento che

$$\frac{n+1}{n+2} = \frac{n+2-1}{n+2} = 1-\frac{1}{n+2}$$

la diseguaglianza

$$\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^n > \frac{n+1}{n+2}$$

segue immediatamente se dimostriamo che

$$1-\frac{n}{n^2+2n+1} > 1-\frac{1}{n+2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{n}{n^2+2n+1} < \frac{1}{n+2}.$$

L'ultima diseguaglianza, se moltiplichiamo ambo i membri per $n+1$, diventa

$$\frac{n(n+2)}{n^2+2n+1} < 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{n^2+2n}{n^2+2n+1} < 1,$$

che è banalmente soddisfatta.

- Poiché la quantità $(1+1/n)^n$ aumenta se si passa da n a $n+1$ ed è limitata superiormente, allora esiste il limite
$$e := \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$
Questo si può vedere come segue. Poniamo $a_n = (1+1/n)^n$. Dal Teorema 1.11 si ha che esiste $\ell = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Per definizione di estremo superiore $a_n \le \ell$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e, comunque sia fissato $\varepsilon > 0$, esiste $M \in \mathbb{N}$ tale che $a_M > \ell - \varepsilon$. Poiché i numeri a_n crescono al crescere di n, si ha $a_n \ge a_M > \ell - \varepsilon \ \forall n \ge M$. In conclusione $\forall n > M$ si ha $\ell - \varepsilon < a_n \le \ell < \ell + \varepsilon$, i.e. $|a_n - \ell| < \varepsilon$, quindi esiste il limite $\ell = \lim_{n\to\infty} a_n$.
- Poiché $c_1 \le a_n \le c_2 \ \forall n \in \mathbb{N}$ si ha $c_1 \le \ell \le c_2$, per il Teorema 5.14.

Osservazione: Come anticipato all'inizio del paragrafo, la successione $(1+1/n)^n$ è una forma indeterminata del tipo 1^∞: se definiamo $a_n = (1+1/n)$ e $b_n = n$, abbiamo $(1+1/n)^n = a_n^{b_n}$, con $a_n \to 1$ e $b_n \to +\infty$. Una forma indeterminata dello stesso tipo che diverge si ottiene scegliendo $a_n = 1 + 1/\sqrt{n}$ e $b_n = n$; infatti, utilizzando la diseguaglianza di Bernouilli (cfr. i complementi del §1.4), si trova
$$\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n \ge 1 + \frac{n}{\sqrt{n}} = 1 + \sqrt{n}$$
e l'ultima successione diverge. Si ottiene invece una successione che converge a 1 scegliendo $a_n = 1$ e $b_n = n$: infatti la successione costante $1^n = 1$ converge banalmente a 1.

5.7.2 Calcolo del limite: seconda parte (∗)

Consideriamo ora $x \in \mathbb{R}$. Per ogni $x \in \mathbb{R}$ $\exists n \in \mathbb{N}$ tale che $n \le x < n+1$. Se $x \to +\infty$ si ha anche $n \to +\infty$. Inoltre
$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n \le \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},$$
dove
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = e\cdot 1 = e,$$
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \frac{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)} = \frac{e}{1} = e.$$
Ne segue pertanto che $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$.

5.8 Esercizi

1. $\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+3}$.
2. $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-7x+12}{(x-3)^3}$.
3. $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x+1}-x$.
4. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-2x+1}{x+3}$.
5. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{x^3+4x}$.
6. $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2-2}{2x^2+5x+1}$
7. $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x}$.
8. $\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos x}{x}$.
9. $\lim_{x\to+\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$.
10. $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{x}$.
11. $\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{tg}\, x}{x}$.
12. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$.
13. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-x}}{x}$.
14. $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2}{x+1}-\frac{x^2}{x+2}\right)$.
15. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x+\pi)}{x}$.
16. $\lim_{x\to 0} \frac{x\cos(x+\pi/2)}{\cos x-1}$.
17. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\sin x}$.

18. $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)$.

19. $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+x+1}-1}$.

20. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin(\pi\cos x)}{x\sin x}$.

21. $\lim_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{x-\pi}$.

22. $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2+2x-3}$.

Soluzioni:

1. Il limite è: $e\cdot 1^3 = e$.

2. Si ha
$$x^2-7x+12=(x-4)(x-3),$$
quindi la funzione si può riscrivere nella forma
$$(x-4)/(x-3)^2,$$
dove $x-4\to -1$ e $(x-3)^2\to+\infty$. Quindi il limite è: $-\infty$.

3. Moltiplicando e dividendo per $\sqrt{x^2+x+1}+x$ la funzione diventa
$$\begin{aligned}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x} &= \frac{x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+1\right)}\\ &= \frac{1+\dfrac{1}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+1},\end{aligned}$$
dove $1+1/x\to 1$ e $\sqrt{1+1/x+1/x^2}+1\to 2$. Quindi il limite è: $1/2$.

4. Si ha
$$\begin{aligned}\frac{x^2-2x+1}{x+3} &= \frac{x^2\left(1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}{x\left(1+\dfrac{3}{x}\right)}\\ &= \frac{x\left(1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}{1+\dfrac{3}{x}},\end{aligned}$$

dove $x(1-2/x+1/x^2) \to +\infty$ e $(1+3/x) \to 0$. Quindi il limite è: $+\infty$.

5. Il limite è: 0.

6. Il limite è: 3/2.

7. Si applica la definizione di limite: se $x > M$ si ha $|\sin x/x| \leq 1/|x| < 1/M = \varepsilon$ se $M = 1/\varepsilon$. D'altra parte
$$-\left|\frac{\sin x}{x}\right| \leq \frac{\sin x}{x} \leq \left|\frac{\sin x}{x}\right|,$$
Quindi il limite è: 0.

8. Il limite è: 0.

9. Si definisce $t = 1/x$, così che $t \to 0$ per $x \to +\infty$. Quindi il limite è: 1.

10. Il limite è: $+\infty$ se $x \to 0^+$ e $-\infty$ se $x \to 0^-$.

11. Il limite non esiste.

12. Moltiplicando e dividendo per $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$ la funzione diventa
$$\frac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} = \frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}},$$
dove $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x} \to 2$. Quindi il limite è: 1.

13. Moltiplicando e dividendo per $(1+\sqrt{1-x})$ si trova
$$\begin{aligned} 1-\sqrt{1-x} &= (1-\sqrt{1-x})\frac{1+\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1-x}} \\ &= \frac{1-(1-x)}{1+\sqrt{1-x}} \\ &= \frac{x}{1+\sqrt{1-x}}. \end{aligned}$$
Dividendo per x si ottiene
$$\frac{1-\sqrt{1-x}}{x} = \frac{1}{1+\sqrt{1-x}}.$$
Quindi il limite è: 1/2.

14. Si riscrive la funzione come
$$\begin{aligned} \frac{x^2}{x+1} - \frac{x^2}{x+2} &= \frac{x^2(x+2)-x^2(x+1)}{(x+1)(x+2)} \\ &= \frac{x^2}{x^2+3x+2} \\ &= \frac{x^2}{x^2\left(1+\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}\right)}, \end{aligned}$$

dove $1 + 3/x + 2/x^2 \to 1$. Quindi il limite è: 1.

15. Si applicano le formule di addizione per scrivere

$$\sin(x + \pi) = \sin x \cos \pi + \cos x \sin \pi = -\sin x$$

e si usa il limite notevole 3 di §5.6. Quindi il limite è: -1.

16. Per le formula di addizione si ha

$$\cos(x + \pi/2) = \cos x \cos(\pi/2) - \sin x \sin(\pi/2) = -\sin x,$$

quindi si scrive

$$-\frac{x \sin x}{\cos x - 1} = \frac{x^2}{1 - \cos x} \frac{\sin x}{x}$$

e si applicano i limiti notevoli 3 e 7 di §5.6. Il limite è quindi: 2.

17. Moltiplicando e dividendo per $(\sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{1 - \sin x})$ si trova

$$\frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}{\sin x} = \frac{1 + \sin x - 1 + \sin x}{\sin x(\sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{1 - \sin x})},$$

dove $\sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{1 - \sin x} \to 2$ per $x \to 0$. Quindi il limite è: 1.

18. Si ha

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 + 2x} - x &= \frac{(\sqrt{x^2 + 2x} - x)(\sqrt{x^2 + 2x} + x)}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} \\ &= \frac{x^2 + 2x - x^2}{x\left(\sqrt{1 + \dfrac{2}{x}} + 1\right)} \\ &= \frac{2}{1 + \sqrt{1 + \dfrac{2}{x}}},\end{aligned}$$

in quanto $\sqrt{x^2} = |x| = x$ per $x > 0$. Poiché $1 + 2/x \to 1$ per $x \to +\infty$, il limite è: 1.

19. Il limite è: 1.

20. Utilizzando due volte le formule di addizione, si ha

$$\cos x = \cos(x/2 + x/2) = \cos^2(x/2) - \sin^2(x/2) = 1 - 2\sin^2(x/2)$$

e quindi

$$\begin{aligned}\sin(\pi \cos x) &= \sin(\pi - 2\pi \sin^2(x/2)) \\ &= \sin \pi \cos(2\pi \sin^2(x/2)) + \cos \pi \sin(2\pi \sin^2(x/2)) \\ &= \sin(2\pi \sin^2(x/2)),\end{aligned}$$

da cui si ottiene

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\pi\cos x)}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2\pi\sin^2(x/2))}{2\pi\sin^2(x/2)}\cdot\frac{2\pi\sin^2(x/2)}{(x/2)^2}\cdot\frac{x^2/4}{x\sin x}=1\cdot(2\pi)\cdot\frac{1}{4}.$$

Quindi il limite è: $\pi/2$.

21. Definendo $t=x-\pi$, si ottiene

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x-\pi}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin(t+\pi)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t\cos\pi+\cos t\sin\pi}{t}=-\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}.$$

Quindi il limite è: -1.

22. Definendo $t=x-1$, si ottiene

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2+2x-3}=\lim_{t\to 0}\frac{t^2+2t}{t^2+4t}=\lim_{t\to 0}\frac{t(2+t)}{t(4+t)}=\lim_{t\to 0}\frac{2+t}{4+t}.$$

Quindi il limite è: $1/2$.

6 | Funzioni continue

6.1 Definizione ed esempi

Ogni limite in cui x tende a un valore finito x_0 si può ricondurre a un limite in cui la variabile tende a 0. Infatti se $x \to x_0$ allora si può porre $x = x_0 + \Delta x$, con $\Delta x \to 0$. Quindi, se vogliamo studiare il limite di $f(x)$ per $x \to 0$, possiamo scrivere tale limite come

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x).$$

Esempi:

1. $\lim_{x \to 1} 1/x = \lim_{t \to 0} 1/(t+1)$;
2. $\lim_{x \to \pi/4} \sin x = \lim_{t \to 0} \sin(\pi/4 + t) = \lim_{t \to 0} (\sin(\pi/4)\cos t + \cos(\pi/4)\sin t) = \lim_{t \to 0} (\sin(\pi/4)\cos t) + \lim_{t \to 0} (\cos(\pi/4)\sin t) = \sin(\pi/4) \cdot 1 + \cos(\pi/4) \cdot 0 = \sin(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$.

Definizione 6.1. *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in I$. La funzione si dice* continua in x_0 *se*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0).$$

La funzione si dice continua *in I se è continua in ogni $x \in I$.*

Osservazione: Possiamo riscrivere la definizione di funzione continua nella forma

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \to x_0} x\right),$$

dal momento che $\lim_{x \to x_0} x = x_0$.

Esempi:

1. $f(x) = x^2$, $f(x) = x^n$, $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$, $f(x) = e^x$ sono continue in $\mathbb{R}$.
2. $f(x) = a^x$ è continua in $\mathbb{R}$.
3. $f(x) = \log_a x$ è continua in $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\} = \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$.

4. $\sqrt{x}$ è continua in $\mathbb{R}_+$.
5. $f(x) = 1/x$, $f(x) = 1/x^n$ sono continue in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
6. Più in generale tutte le funzioni elementari principali sono continue nel loro dominio.
7. Le funzioni razionali sono continue in tutti i punti in cui non si annulla il polinomio a denominatore.
8. $f(x) = |x|$ è continua in $\mathbb{R}$.

Osservazioni:

1. Ricordando la definizione di limite in §5.2, diciamo quindi che è una funzione $f(x)$ è continua in x_0 se $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tale che se $|x - x_0| < \delta$ allora $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. In particolare non serve scrivere $|x - x_0| > 0$ (cioè richiedere che si abbia $x \neq x_0$), perché in $x = x_0$ si ha $0 = |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.
2. Intuitivamente, una funzione f è continua in un intervallo chiuso I se si può tracciare il suo grafico $\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in I\}$ nel piano cartesiano "senza staccare la penna dal foglio".
3. Usando le formule di addizione si verifica immediatamente che le funzioni $\sin x$ e $\cos x$ sono continue. Infatti

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} \sin x &= \lim_{\Delta x\to 0} \sin(x_0 + \Delta x) \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \big(\sin x_0 \cdot \cos \Delta x + \cos x_0 \cdot \sin \Delta x\big) \\
&= \sin x_0 \cdot \lim_{\Delta x\to 0} \cos \Delta x + \cos x_0 \cdot \lim_{\Delta x\to 0} \sin \Delta x \\
&= \sin x_0 \cdot 1 + \cos x_0 \cdot 0 = \sin x_0, \\
\lim_{x\to x_0} \cos x &= \lim_{\Delta x\to 0} \cos(x_0 + \Delta x) \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \big(\cos x_0 \cdot \cos \Delta x - \sin x_0 \cdot \sin \Delta x\big) \\
&= \cos x_0 \cdot \lim_{\Delta x\to 0} \cos \Delta x - \sin x_0 \cdot \lim_{\Delta x\to 0} \sin \Delta x \\
&= \cos x_0 \cdot 1 - \sin x_0 \cdot 0 = \cos x_0.
\end{aligned}$$

4. Un'altra funzione di cui si verifica immediatamente la continuità è x^n, con $n \in \mathbb{N}$. Infatti, scrivendo $x = x_0 + \Delta x$, si ha

$$x^n = (x_0 + \Delta x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x_0^k (\Delta x)^{n-k},$$

quindi

$$\lim_{x\to x_0} x^n = \lim_{\Delta x\to 0} (x_0 + \Delta x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x_0^k \lim_{\Delta x\to 0} (\Delta x)^{n-k} = \binom{n}{n} x_0^n = x_0^n,$$

perché tutti i termini della somma tendono a zero tranne quello con $k = n$.

6.2 Proprietà delle funzioni continue

Dalla Definizione 6.1 di continuità seguono facilmente le seguenti proprietà.

Proprietà delle funzioni continue:

1. $f : I \to \mathbb{R}$ e $g : I \to \mathbb{R}$ sono continue in $x_0 \in I \Longrightarrow f + g$ è continua in x_0.
2. $f : I \to \mathbb{R}$ e $g : I \to \mathbb{R}$ sono continue in $x_0 \in I \Longrightarrow f \cdot g$ è continua in x_0.
3. $f : I \to \mathbb{R}$ e $g : I \to \mathbb{R}$ sono continue in $x_0 \in I$ e $g(x_0) \neq 0 \Longrightarrow f/g$ è continua in x_0.
4. $f : J \to \mathbb{R}$ e $g : I \to J$ sono continue in $g(x_0) \in J$ e in $x_0 \in I$, rispettivamente $\Longrightarrow f \circ g$ è continua in x_0.

Osservazioni:

1. Per la proprietà 1 ogni polinomio in x è continuo su tutto l'asse reale.
2. Per la proprietà 3 la funzione $\operatorname{tg} x$ è continua in ogni x_0 in cui $\cos x_0 \neq 0$. Analogamente la funzione $\operatorname{cotg} x$ è continua in ogni x_0 in cui $\sin x_0 \neq 0$.
3. La proprietà 3 comporta che, se le funzioni f e g sono continue, la loro composizione è continua e si ha
$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \to x_0} g(x)\right) = f(g(x_0)).$$
In alte parole, per calcolare il limite di $f(g(x))$ per $x \to x_0$, possiamo prima calcolare il valore della funzione $g(x)$ in x_0 e poi calcolare il valore di f in $g(x_0)$.
4. Utilizzando l'osservazione precedente, possiamo concludere subito che, per esempio,
$$\lim_{x \to 0} \sin x^2 = 0, \quad \lim_{x \to 0} \ln \sqrt{1 + x^2} = 0, \quad \lim_{x \to 0} \cos(x^2 - x + x^3) = 1, \quad \lim_{x \to 1} e^{x^2 - x^3 + 3} = e^3.$$
Questo è implicitamente quello che abbiamo fatto nelle pagine precedenti, quando abbiamo calcolato limiti simili introducendo una nuova variabile t; negli esempi considerati, questo significa porre $t = x^2$, $t = \sqrt{1 + x^2}$, $t = x^2 - x + x^3$ e $t = x^2 - x^3 + 3$, rispettivamente.

Calcolo di limiti usando la continuità:

1. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\sqrt{3}x}$.
2. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}x}\right)^{x}$.
3. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+3}$.

4. $\lim_{x\to 0} \sin(\sin x^2)$.

Soluzioni:

1. Il limite è: $e^{\sqrt{3}}$.
2. Il limite è: $e^{1/\sqrt{3}}$.
3. Il limite è: e^4.
4. Il limite è: 0.

Alcuni limiti notevoli:

1. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$.
2. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$.

Soluzioni:

1. Il limite è: $\lim_{x\to 0} \ln(1+x)^{1/x} = \ln \lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = \ln e = 1$.
2. Poniamo $t = e^x - 1 \Longrightarrow e^x = 1 + t \Longrightarrow x = \ln(1+t)$, da cui si ottiene

$$\frac{e^x - 1}{x} = \frac{t}{\ln(1+t)} = \frac{1}{\dfrac{\ln(1+t)}{t}}.$$

Inoltre $t \to 0$ quando $x \to 0$, così che

$$\lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

6.3 Funzioni discontinue

Definizione 6.2. *Una funzione f si dice discontinua in x_0 se non è continua in x_0, i.e. se si verifica una delle seguenti condizioni:*

1. *la funzione f non è definita in x_0;*
2. *il limite per $x \to x_0$ di $f(x)$ non esiste o è infinito;*
3. *$\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$, ma $\ell \neq f(x_0)$.*

Osservazione: Un caso particolare della condizione 2 si presenta quando esistono

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \ell_+, \qquad \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \ell_-,$$

ma $\ell_+ \neq \ell_-$.

Esempi:

1. La funzione $f(x) = (x^2 + x - 2)/(x - 1)$ studiata nell'esempio 3 a pag. 82 di §5.3 non è definita in $x = 1$, anche se il limite di $f(x)$ per $x \to 1$ esiste e vale 3.

2. La funzione considerata nell'esempio 1 di §5.3 a pag. 83 non è definita in $x = 0$; inoltre il limite destro e sinistro di $f(x)$ per $x \to 0$ valgono 1 e -1, rispettivamente.

3. La funzione $f(x) = 1/x$ non è definita in $x = 0$ e il limite di $f(x)$ per $x \to 0$ non esiste: infatti esistono il limite destro ($+\infty$) e il limite sinistro ($-\infty$) ma sono diversi.

4. La funzione $f(x) = 1/x^2$ non è definita in $x = 0$ e il limite di $f(x)$ per $x \to 0$ vale $+\infty$.

5. La funzione $f(x) = 3^{1/x}$ è discontinua in $x = 0$ perché non è definita in $x = 0$; inoltre si ha (cfr. la Figura 6.1)

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0.$$

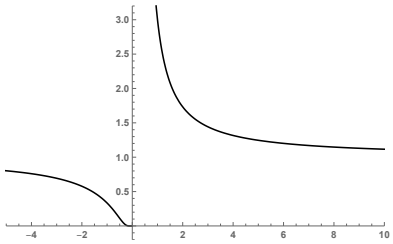


Figura 6.1: Grafico della funzione $3^{1/x}$.

6. La funzione $f(x) = x/|x|$ è discontinua in $x = 0$ poiché non è definita in $x = 0$; inoltre si ha
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +1, \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) = -1;$$
Si noti che $f(x) = x/|x|$ coincide con la funzione considerata nell'esempio 1 del §5.2.

7. La funzione $f(x) = \cos(1/x)$ è discontinua in $x = 0$ perché non esiste $\lim_{x\to 0} f(x)$.

8. La funzione definita come
$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 1, \\ 0, & x = 1, \\ x, & x > 1, \end{cases}$$

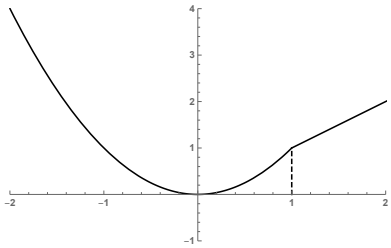


Figura 6.2: Grafico della funzione $f(x)$ dell'esempio 8 con $f(1) = 1$

è discontinua in $x = 1$: diventa continua se si pone $f(1) = 1$ (cfr. la Figura 6.2).

Osservazione: A volte una discontinuità è *eliminabile*. Negli esempi 1 e 8 la discontinuità è eliminabile ponendo $f(1) = 3$ nel primo caso e $f(1) = 1$ nel secondo. La discontinuità non è mai eliminabile se il limite destro e il limite sinistro sono diversi o se comunque almeno uno dei due limiti vale $+\infty$ o $-\infty$.

Definizione 6.3. *Un punto x_0 si dice* punto di discontinuità di prima specie *per f se il limite destro e il limite sinistro sono entrambi finiti e diversi. Ogni punto di discontinuità non eliminabile che non sia di prima specie si dice* punto di discontinuità di seconda specie *o* punto di discontinuità essenziale.

6.4 Teoremi sulle funzioni continue

Teorema 6.4. *Sia f una funzione continua nell'intervallo chiuso $[a, b]$. Allora $\exists x_1, x_2 \in [a, b]$ tali che $f(x_1) \geq f(x)$ e $f(x_2) \leq f(x)$ $\forall x \in [a, b]$.*

Osservazioni:

1. Il Teorema 6.4 è noto come *teorema di Weierstrass*. La sua dimostrazione è non banale. Si veda la Figura 6.3 per un'illustrazione grafica del teorema.
2. Il punto x_1 si chiama *punto di massimo assoluto* e il valore $M := f(x_1)$ si dice *massimo assoluto* della funzione f. Il punto x_2 si chiama *punto di minimo assoluto* e il valore $m := f(x_2)$ si dice *minimo assoluto* della funzione f. Scriviamo allora:
$$M := \max_{x\in[a,b]} f(x), \qquad m = \min_{x\in[a,b]} f(x).$$
3. Data una funzione $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, per definizione si ha
$$\max_{x\in[a,b]} f(x) = \max\{y \in \mathbb{R} : \exists x \in [a, b] \text{ tale che } f(x) = y\} = \max C_f,$$
$$\min_{x\in[a,b]} f(x) = \min\{y \in \mathbb{R} : \exists x \in [a, b] \text{ tale che } f(x) = y\} = \min C_f,$$
dove C_f è il codominio della funzione f (cfr. la Definizione 2.3).

4. È fondamentale che l'intervallo sia chiuso: $f(x) = x$ e $f(x) = 1/x$, per $x \in (0,1)$ non hanno né massimo né minimo assoluto.
5. Con le notazioni del punto precedente, può succedere che C_f non abbia massimo. Questo succede se C_f è illimitato superiormente (per esempio se $f(x) = x^2$ in $\mathbb{R}$) oppure se C_f è limitato ma ammette solo estremo superiore (per esempio $f(x) = x^2$ in $(-1,1)$). Analoghe considerazioni valgono per il minimo: C_f può essere illimitato inferiormente o essere limitato ma avere solo estremo inferiore e non minimo.
6. Il massimo di una funzione, se esiste, è unico, ma il punto di massimo di una funzione non è necessariamente unico; per esempio, $f(x) = \sin x$ ha infiniti punti di massimo sulla retta. Analoghe considerazioni valgono per il minimo.

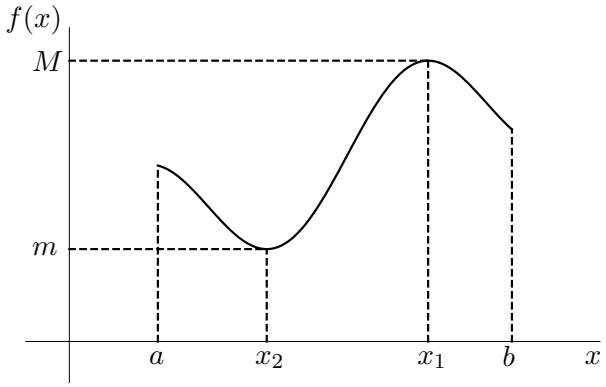


Figura 6.3: Illustrazione del Teorema 6.4 (teorema di Weierstrass).

Teorema 6.5. *Sia f una funzione continua in $[a,b]$ e siano M e m il suo massimo assoluto e il suo minimo assoluto, rispettivamente. Allora $\forall c \in [m,M]$ $\exists \bar{x} \in [a,b]$ tale che $f(\bar{x}) = c$.*

Osservazione: Il Teorema 6.5 è noto come *teorema dei valori intermedi*. Si veda la Figura 6.4 per un'illustrazione grafica del teorema.

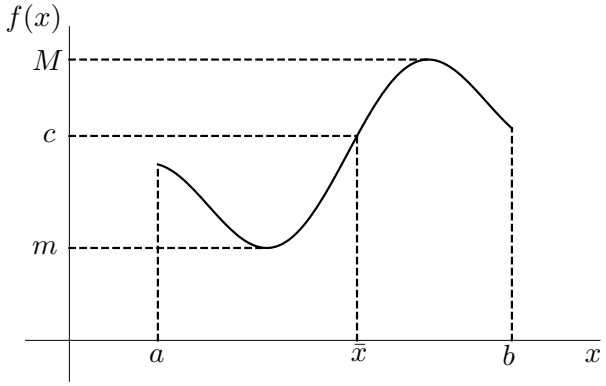


Figura 6.4: Illustrazione del Teorema 6.5 (teorema dei valori intermedi).

Teorema 6.6. *$f : I \to \mathbb{R}$ è continua in $x_0 \in I$ e $f(x_0) \neq 0 \Longrightarrow \exists$ un intorno di x_0 in cui $f(x)$ ha lo stesso segno di $f(x_0)$.*

Osservazione: Il Teorema 6.6 è noto come *teorema della permanenza del segno.*

Teorema 6.7. *$f : I \to \mathbb{R}$ è continua in $x_0 \in I$ e $f(x_0) > L \Longrightarrow \exists$ un intorno di x_0 in cui $f(x)$ rimane maggiore di L.*

Osservazione: Il Teorema 6.7 è una generalizzazione del Teorema 6.6, a cui si riduce nel caso in cui si abbia $L = 0$.

Teorema 6.8. *Sia f una funzione continua in $[a, b]$ e sia $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$. Allora $\exists \bar{x} \in [a, b]$ tale che $f(\bar{x}) = 0$.*

Osservazione: Il Teorema 6.8 è noto come *teorema degli zeri di una funzione continua.*

Teorema 6.9. *Sia f una funzione continua in $[a, b]$ e sia $f(a) > 0$ e $f(b) < 0$. Allora $\exists \bar{x} \in [a, b]$ tale che $f(\bar{x}) = 0$.*

Teorema 6.10. *Se la funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è continua e invertibile, allora la sua inversa f^{-1} è anch'essa continua.*

Osservazione: Il risultato del Teorema 6.10 si estende al caso in cui la funzione f sia definita più in generale in un insieme chiuso e limitato (di cui un intervallo chiuso costituisce un caso particolare).

Complementi (∗):

1. *Dimostrazione del Teorema 6.6.* Sia $\ell = f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$. Per definizione di limite, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tale che per $|x - x_0| < \delta$ si ha $\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$. Se $\ell > 0$, si sceglie $\varepsilon = \ell/2$ e si trova $f(x) > \ell - \varepsilon = \ell/2 > 0$; se $\ell < 0$, si sceglie $\varepsilon = -\ell/2$ e si trova $f(x) < \ell + \varepsilon < \ell/2 < 0$. Quindi $f(x)$ ha il segno di ℓ in un intorno di x_0. ■

2. *Dimostrazione del Teorema 6.7.* Se si definisce $g(x) = f(x) - L$ si ha $g(x_0) = 0$: si può allora applicare il Teorema 6.6 e concludere che in un intorno di x_0 si ha $g(x) = f(x) - L > 0$. ■

3. *Dimostrazione del Teorema 6.8.* Sotto le ipotesi del teorema si ha $f(a) < 0 < f(b)$. Inoltre, per definizione di massimo e di minimo, si ha $m \leq f(x) \leq M$ $\forall x \in [a, b]$: in particolare $m \leq f(a)$ e $f(b) \leq M$. Quindi si ottiene $m \leq f(a) < 0 < f(b) \leq M$. Poiché dunque $0 \in [m, M]$ si può applicare il Teorema 6.5 e concludere che esiste $\bar{x} \in [a, b]$ tale che $f(\bar{x}) = 0$. ■

4. *Dimostrazione del Teorema 6.9.* Si ragiona come per il Teorema 6.8. ■

6.5 Infinitesimi

Definizione 6.11. *Si dice che una funzione $f(x)$ è un* infinitesimo *per $x \to x_0$ se*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0.$$

Analogamente si dice che una funzione $f(x)$ è un infinitesimo *per $x \to +\infty$ (risp. per $x \to -\infty$) se*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \quad (risp. \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0).$$

.

Nel seguito del paragrafo, per non introdurre troppe definizioni, indichiamo i limiti con lim, intendendo che

$$\lim f(x) = \lim_{x\to x_0} f(x), \qquad \lim f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x), \qquad \lim f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x)$$

rispettivamente se $f(x)$ è un infinitesimo per $x \to x_0$ per qualche x_0 finito, se $f(x)$ è un infinitesimo per $x \to +\infty$, se $f(x)$ è un infinitesimo per $x \to -\infty$.

Definizione 6.12. *Due infinitesimi $f(x)$ e $g(x)$ si dicono* infinitesimi dello stesso ordine *se $\lim f(x)/g(x) = \ell$, con ℓ finito e diverso da 0.*

Definizione 6.13. *Dati due infinitesimi $f(x)$ e $g(x)$ diciamo che $f(x)$ è un* infinitesimo di ordine superiore *rispetto a $g(x)$, ovvero che $g(x)$ è un* infinitesimo di ordine inferiore *rispetto a $f(x)$, se $\lim f(x)/g(x) = 0$ (e, di conseguenza, $\lim g(x)/f(x) = +\infty$ oppure $\lim g(x)/f(x) = -\infty$).*

Definizione 6.14. *Un infinitesimo $f(x)$ si dice* infinitesimo di ordine *k rispetto all'infinitesimo $g(x)$ se $f(x)$ e $(g(x))^k$ sono infinitesimi dello stesso ordine. Se una funzione $f(x)$ è infinitesimo di ordine k rispetto a x si usa la notazione $f(x) = O(x^k)$.*

Esempi:

1. Le funzioni x, $\sin x$, $\operatorname{tg} x$ sono infinitesimi dello stesso ordine per $x \to 0$
2. La funzione $f(x) = e^x - 1$ è un infinitesimo di ordine 1 rispetto a x per $x \to 0$.
3. La funzione $f(x) = \cos x - 1$ è un infinitesimo di ordine 2 rispetto a x per $x \to 0$.
4. La funzione $f(x) = \ln(1 + x)$ è un infinitesimo di ordine 1 rispetto a x per $x \to 0$.
5. La funzione $f(x) = x^n$, con $n \in \mathbb{N}$, è un infinitesimo di ordine n rispetto a x per $x \to 0$.
6. La funzione a^{-x} è un infinitesimo di ordine superiore a $x^{-\alpha}$ per $x \to +\infty$, per ogni $a > 1$ e per ogni $\alpha > 0$.
7. La funzione $1/\log_a x$ è un infinitesimo di ordine inferiore a $x^{-\alpha}$ per $x \to +\infty$, per ogni $a > 0$, $a \neq 1$, e per ogni $\alpha > 0$.

8. Se $1>a>b>0$ la funzione a^x è un infinitesimo di ordine inferiore a b^x per $x \to +\infty$.

Osservazione: Se f e g sono infinitesimi di ordine k e p, rispettivamente, allora la funzione f/g è un infinitesimo di ordine $k-p$. Infatti, se

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^k} = \ell \neq 0, \quad \lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{x^p} = \ell' \neq 0,$$

allora si ottiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)/g(x)}{x^{k-p}} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^k}\frac{x^p}{g(x)} = \frac{\ell}{\ell'} \neq 0,$$

da cui segue l'asserto.

6.6 Esercizi

1. $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(e^x-1)}{3x}$.
2. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln\sqrt{1+x}}{x}$.
3. $\lim_{x\to 1} \dfrac{(x-1)^2}{e^{3(x-1)^2}-1}$.
4. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2\sin x}{\log(1+x)}$.
5. $\lim_{x\to 0} \dfrac{a^x-1}{x}$, con $a>0$.
6. $\lim_{x\to 0} \dfrac{4^x-2^x}{x}$.
7. $\lim_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x^2+3}{x^2+2}\right)^x$.
8. $\lim_{x\to\pi/2} \dfrac{(1-\sin x)^2}{(x-\pi/2)^3\cos x}$.
9. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^n-1}{x-1}$, con $n\in\mathbb{N}$.
10. $\lim_{x\to+\infty} \sin(\operatorname{arctg} x)$.
11. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-\sqrt{1-x}}{\sin x}$.
12. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-e^{x+\sin x}}{x}$.

Soluzioni:

1. Si scrive
$$\frac{1-\cos(e^x-1)}{3x} = \frac{1-\cos(e^x-1)}{(e^x-1)^2}\cdot\frac{(e^x-1)^2}{x^2}\cdot\frac{x^2}{3x},$$
da cui si deduce che
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(e^x-1)}{3x} = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 0$$
(si è tenuto conto del limite 7 di pagina 90 e del limite 2 di pag. 104). Quindi il limite è: 0.

2. Si scrive
$$\ln\sqrt{1+x} = \frac{1}{2}\ln(1+x)$$
e si tiene conto del limite 1 di pagina 104. Quindi il limite è: 1/2.

3. Il limite è: 1/3.

4. Il limite è: 0.

5. Si ragiona come per il limite 2 di pag. 104), usando il fatto che
$$\log_a x = \log_a e\cdot\ln x, \qquad \log_a e = \frac{1}{\ln a}.$$
Quindi il limite è: $\ln a$.

6. Scrivendo $4^x - 2^x = 4^x - 1 + 1 - 2^x$ si ottiene
$$\lim_{x\to 0}\frac{4^x-2^x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{4^x-1}{x} + \lim_{x\to 0}\frac{1-2^x}{x} = \ln 4 - \ln 2 = 2\ln 2 - \ln 2,$$
quindi il limite è: $\ln 2$.

7. Si scrive
$$\Big(\frac{x^2+3}{x^2+2}\Big)^x = \frac{\Big(1+\dfrac{3}{x^2}\Big)^x}{\Big(1+\dfrac{2}{x^2}\Big)^x} = \frac{\Big(\Big(1+\dfrac{3}{x^2}\Big)^{x^2/3}\Big)^{1/x}}{\Big(\Big(1+\dfrac{2}{x^2}\Big)^{x^2/2}\Big)^{1/x}},$$
quindi, utilizzando i risultati di §5.7, si trova che il limite è: 1.

8. Si può riscrivere il limite come
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(1-\sin(\pi/2+\Delta x))^2}{(\Delta x)^3\cos(\pi/2+\Delta x)} = -\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(1-\cos(\Delta x))^2}{(\Delta x)^3\sin(\Delta x)},$$
avendo usato le formula di addizione di pag. 50. Quindi, tenendo conto dei limiti 3 e 7 di §5.6, si trova che il limite è: $-1/4$.

9. Si scrive
$$x^n = (1+t)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k,$$
dove $t \to 0$. Quindi il limite è: n.

10. Si usa il fatto che $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \pi/2$ e la continuità di $\sin x$. Quindi il limite è: 1.

11. Si scrive il numeratore
$$e^{2x} - \sqrt{1-x} = e^{2x} - 1 + 1 - \sqrt{1-x},$$
quindi si riscrive la funzione come
$$\frac{e^{2x} - \sqrt{1-x}}{\sin x} = \frac{e^{2x}-1}{\sin x} + \frac{1-\sqrt{1-x}}{\sin x} = \left(\frac{e^{2x}-1}{x} + \frac{1-\sqrt{1-x}}{x}\right)\frac{x}{\sin x}.$$
Si usano allora il limite 3 di pag. 90, l'esercizio 13 di §5.7 e il limite 2 di pag. 104. Quindi il limite è: $5/2$.

12. Si può scrivere la funzione come
$$\frac{e^{2x}\left(1-e^{\sin x - x}\right)}{x} = e^{2x} \cdot \frac{1-e^{\sin x - x}}{\sin x - x} \cdot \frac{\sin x - x}{x} = e^{2x} \cdot \frac{1-e^{\sin x - x}}{\sin x - x} \cdot \left(\frac{\sin x}{x} - 1\right)$$
e, usando il fatto che
$$\lim_{x\to 0} e^{2x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-e^{\sin x - x}}{\sin x - 1} = 1, \qquad \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x} - 1\right) = 0,$$
si trova che il limite è: 0.

7 | Funzioni derivabili

7.1 Derivata

Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione e sia $x_0 \in I$. Poniamo $\Delta f := f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ e definiamo il *rapporto incrementale*

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Definizione 7.1. *La funzione f si dice* derivabile *in x_0 se esiste finito il limite*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Se questo succede il limite si chiama derivata *di f in x_0 e si indica con $f'(x_0)$ o $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)$. Diciamo che f è derivabile in I se è derivabile in ogni $x \in I$.*

Se $f : I \to \mathbb{R}$ è derivabile in I, si può definire la *funzione derivata* $f' : I \to \mathbb{R}$.

Esempi:

1. $f(x) = c$ (costante) $\implies f'(x) = 0$.
2. $f(x) = x \implies f'(x) = 1$.
3. $f(x) = x^2 \implies f'(x) = 2x$.
4. $f(x) = x^3 \implies f'(x) = 3x^2$.
5. $f(x) = x^n \implies f'(x) = n\, x^{n-1}$.
6. $f(x) = \dfrac{1}{x} \implies f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$.
7. $f(x) = \dfrac{1}{x^2} \implies f'(x) = -\dfrac{2}{x^3}$.
8. $f(x) = \dfrac{1}{x^3} \implies f'(x) = -\dfrac{3}{x^4}$.

9. $f(x) = \dfrac{1}{x^n} \Longrightarrow f'(x) = -\dfrac{n}{x^{n+1}}$.
10. $f(x) = x^k$, $k \in \mathbb{Z} \Longrightarrow f'(x) = k\,x^{k-1}$.
11. $f(x) = \sin x \Longrightarrow f'(x) = \cos x$.
12. $f(x) = \cos x \Longrightarrow f'(x) = -\sin x$.
13. $f(x) = e^x \Longrightarrow f'(x) = e^x$.
14. $f(x) = \ln x \Longrightarrow f'(x) = 1/x$.

Dimostrazioni:

1. $\Delta f = 0$.
2. $\Delta f = \Delta x$.
3. $\Delta f = \Delta x\,(2x + \Delta x)$.
4. $\Delta f = \Delta x\,(3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2)$.
5. Per la formula del binomio si ha $\Delta f = \Delta x(nx^{n-1} + \gamma(\Delta x))$, dove $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \gamma(\Delta x) = 0$.
6. $\Delta f = -\Delta x/(x(x + \Delta x))$.
7. $\Delta f = -\Delta x(2x + \Delta x)/(x^2(x + \Delta x)^2)$.
8. $\Delta f = -\Delta x(3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2)/(x^3(x + \Delta x)^3)$.
9. $\Delta f = -\dfrac{(x + \Delta x)^n - x^n}{x^n(x + \Delta x)^n} = -\dfrac{nx^{n-1}\Delta x(1 + \alpha(\Delta x))}{x^{2n}(1 + \beta(\Delta x)}$, dove $\alpha(\Delta x), \beta(\Delta x) \to 0$ per $\Delta x \to 0$.
10. Unendo le 5 e 9.
11. $\sin(x + \Delta x) - \sin x = \sin x(\cos \Delta x - 1) + \cos x \sin \Delta x$, dove $(\cos \Delta x - 1)/\Delta x \to 0$ e $\sin \Delta x/\Delta x \to 1$ per $\Delta x \to 0$.
12. $\cos(x + \Delta x) - \cos x = \cos x(\cos \Delta x - 1) - \sin x \sin \Delta x$, dove $(\cos \Delta x - 1)/\Delta x \to 0$ e $\sin \Delta x/\Delta x \to 1$ per $\Delta x \to 0$.
13. $\Delta f = e^x(e^{\Delta x} - 1)$ e si usa il limite 2 di pagina 104.
14. $\Delta f = \ln(x + \Delta x) - \ln x = \ln(1 + \Delta x/x) \Longrightarrow \Delta f/\Delta x = (1/x)\ln(1 + \Delta x/x)^{x/\Delta x}$ e si usa il limite 1 di pagina 104.

7.2 Proprietà della derivata

Teorema 7.2. *Se una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ è derivabile in $x_0 \in I$, allora f è continua in $x = x_0$.*

Dimostrazione. Se f è derivabile in x_0, esiste il limite

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\Delta f}{\Delta x},$$

dove $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Quindi $\Delta f \to 0$ per $\Delta x \to 0$, così che

$$\lim_{\Delta x \to 0} (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = 0 \Longrightarrow \lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0),$$

e quindi f è continua in x_0. ■

7.2.1 Interpretazione grafica della derivata

Se $x_0 + \Delta x = x_1$ si ha

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \operatorname{tg} \varphi,$$

dove φ è l'angolo che la retta passante per i punti $P_0 = (x_0, f(x_0))$ e $P_1 = (x_1, f(x_1))$ forma con l'asse x (cfr. la Figura 7.1).

Se il punto P_1 tende al punto P_0, muovendosi lungo il grafico, la retta tende alla *retta tangente* al grafico in P_0 e l'angolo φ tende all'angolo α, se α è l'angolo che la retta tangente forma con l'asse x. Quindi $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$. Ne concludiamo che la funzione f è derivabile in x_0 se la curva individuata dal grafico $y = f(x)$ ammette retta tangente nel punto $(x_0, f(x_0))$.

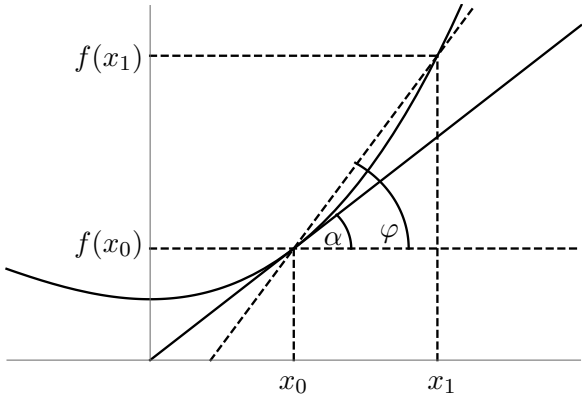


Figura 7.1: Significato geometrico della derivata.

Osservazioni:

1. Se $f(x)$ è una funzione pari, allora $f'(x)$ è dispari. Analogamente se $f(x)$ è dispari, allora la sua derivata $f'(x)$ è pari.
2. L'equazione della retta tangente al grafico di $f(x)$ nel punto x_0 ha equazione

   $$y = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0).$$

   Infatti tale retta deve avere equazione

   $$y = y(x) = ax + b,$$

per a e b opportuni (cfr. §3.3). D'altra parte $a = f'(x_0)$, per quanto visto sopra, e inoltre $y(x_0) = ax_0 + b = f(x_0)$, da cui si ottiene

$$b = f(x_0) - ax_0 = f(x_0) - f'(x_0)\, x_0.$$

Quindi risulta $y(x) = f'(x_0)\, x + f(x_0) - f'(x_0)\, x_0 = f(x_0) + f'(x_0)\, (x - x_0)$.

3. La funzione $f(x) = |x|$ non è derivabile in $x = 0$. Infatti si ha

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1,$$
$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1,$$

quindi il limite destro e il limite sinistro sono diversi. Ne segue che non esiste il limite del rapporto incrementale – e quindi non esiste la derivata – in $x = 0$. Ovviamente la funzione è derivabile in qualsiasi punto $x \neq 0$, e la sua derivata vale $f'(x) = 1$ se $x > 0$ e $f'(x) = -1$ se $x < 0$.

4. Perché una funzione sia derivabile in un punto occorre che esistano e siano uguali il limite destro e il limite sinistro del rapporto incrementale. Per questo motivo, se una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ è definita in un intervallo chiuso $[a, b]$ (in altre parole se $I = [a, b]$, con $a < b$), non ha senso porsi il problema se la funzione è derivabile in $x = a$ o $x = b$, ma ci si limiterà a studiarne la derivabilità nell'intervallo aperto (a, b).

7.2.2 Regole di derivazione

Valgono le seguenti *regole di derivazione*:

1. $g(x) = c\, f(x)$, dove $c \in \mathbb{R}$ è una costante $\Longrightarrow g'(x) = c\, f'(x)$.
2. $h(x) = f(x) + g(x) \Longrightarrow h'(x) = f'(x) + g'(x)$.
3. $h(x) = f(x) \cdot g(x) \Longrightarrow h'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.
4. $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ e $g(x) \neq 0 \Longrightarrow h'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$.

Dimostrazioni $(*)$:

1. $\Delta g = c\Delta f$;
2. $\Delta h = \Delta f + \Delta g$,
3. $\Delta h = f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x)$, quindi

$$\begin{aligned}\Delta h &= f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x + \Delta x)g(x) + f(x + \Delta x)g(x) - f(x)g(x) \\ &= f(x + \Delta x)\,(g(x + \Delta x) - g(x)) + (f(x + \Delta x) - f(x))\, g(x) \\ &= f(x + \Delta x)\Delta g + g(x)\Delta f,\end{aligned}$$

dove $f(x + \Delta x) \to f(x)$ per $\Delta x \to 0$.

4. $\Delta h = \dfrac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x} - \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x+\Delta x))}{g(x)g(x+\Delta x)}$, dove

$$\begin{aligned} &f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x+\Delta x)) \\ &\quad = f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+\Delta x) \\ &\quad = (f(x+\Delta x) - f(x))\, g(x) - f(x)\,(g(x+\Delta x) - g(x)) = \Delta f\, g(x) - \Delta g\, f(x), \end{aligned}$$

quindi si ha

$$\Delta h = \frac{\Delta f}{g(x+\Delta x)} - \frac{\Delta g\, f(x)}{g(x)g(x+\Delta x)},$$

dove $g(x+\Delta x) \to g(x)$ per $\Delta x \to 0$.

Esempi:

1. $f(x) = x^2 \cos x \Longrightarrow f'(x) = 2x\cos x - x^2 \sin x$.
2. $f(x) = \dfrac{x^2}{\sin x} \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{2x\sin x - x^2\cos x}{\sin^2 x}$.
3. $f(x) = \operatorname{tg} x \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.
4. $f(x) = \operatorname{cotg} x \Longrightarrow f'(x) = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.
5. $f(x) = x \ln x \Longrightarrow f'(x) = 1 + \ln x$.

Soluzioni:

1. Si usa la regola di derivazione 3.
2. Si usa la regola di derivazione 4.
3. Si usa la regola di derivazione 4 per $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.
4. Si usa la regola di derivazione 4 per $\operatorname{cotg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$.
5. Si usa la regola di derivazione 3.

7.3 Derivata di una funzione composta

Teorema 7.3. *Se $h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$ allora $h'(x) = f'(g(x))\, g'(x)$.*

Dimostrazione $(*)$: Si ha

$$\frac{\Delta h}{\Delta x} = \frac{f(g(x+\Delta x)) - f(g(x))}{\Delta x} = \frac{f(g(x+\Delta x)) - f(g(x))}{g(x+\Delta x) - g(x)} \cdot \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x},$$

dove $g(x+\Delta x) = u + \Delta u$, dove $u = g(x)$ e $\Delta u \to 0$ quando $\Delta x \to 0$. Quindi si ottiene

$$\frac{\Delta h}{\Delta x} = \frac{f(u+\Delta u) - f(u)}{\Delta u} \cdot \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x},$$

dove

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(u+\Delta u) - f(u)}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{f(u+\Delta u) - f(u)}{\Delta u} = f'(u) = f'(g(x)),$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} = g'(x),$$

che completa la dimostrazione. ■

Osservazione: Alla luce del Teorema 7.3, la proprietà 4 del §7.3 si può anche dimostrare a partire dalla 3, considerando $f(x)/g(x)$ come prodotto delle due funzioni $f(x)$ e $1/g(x)$ e utilizzando il fatto che la derivata di $1/g(x)$ è $-g'(x)/(g(x))^2$.

Esempi:

1. $f(x) = \sin x^2 \Longrightarrow f'(x) = 2x \cos x^2$.
2. $f(x) = \ln(1+x^2) \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$.
3. $f(x) = e^{x^2} \Longrightarrow f'(x) = 2xe^{x^2}$.
4. $f(x) = \cos\big(\ln(1+\sin^2 x)\big) \Longrightarrow f'(x) = -\sin\big(\ln(1+\sin^2 x)\big)\dfrac{2\sin x \cos x}{1+\sin^2 x}$.
5. $f(x) = \ln x^2 \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{2}{x}$.
6. $f(x) = \sqrt{1-x^3} \Longrightarrow f'(x) = -\dfrac{3x^2}{\sqrt{1-x^3}}$.
7. $f(x) = x^\alpha \Longrightarrow f'(x) = \alpha\, x^{\alpha-1}$.
8. $f(x) = a^x \Longrightarrow f'(x) = a^x \ln a$.
9. $f(x) = x^x \Longrightarrow f'(x) = x^x(1+\ln x)$.
10. $f(x) = \ln|x| \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Soluzioni:

1. Si applica il Teorema 7.3.
2. Si applica il Teorema 7.3.
3. Si applica il Teorema 7.3.
4. Si applica il Teorema 7.3.
5. Si applica il Teorema 7.3.
6. Si applica il Teorema 7.3.

7. Si scrive $x^\alpha = e^{\ln x^\alpha} = e^{\alpha \ln x}$ e si applica il Teorema 7.3.
8. Si scrive $a^x = e^{\ln a^x} = e^{x \ln a}$ e si applica il Teorema 7.3.
9. Si scrive $x^x = e^{\ln x^x} = e^{x \ln x}$ e si applica il Teorema 7.3.
10. Si utilizza l'osservazione 3 di §7.2 e si applica il Teorema 7.3 (alternativamente si scrive $\ln|x| = \ln x$ per $x > 0$ e $\ln|x| = \ln(-x)$ per $x < 0$).

7.4 Derivata della funzione inversa

Teorema 7.4. *Se $f : I \to J$ è derivabile e invertibile e $g : J \to I$ è la sua inversa allora si ha $g'(x) = 1/f'(g(x))$.*

Dimostrazione. Si ha $f(g(x)) = x$, quindi derivando rispetto a x, si ottiene, per il teorema di derivazione della funzione composta,

$$f'(g(x))g'(x) = 1 \implies g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))},$$

da cui segue l'asserto. ∎

Esempi:

1. $g(x) = \arcsin x \implies g'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
2. $g(x) = \arccos x \implies g'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
3. $g(x) = \operatorname{arctg} x \implies g'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.
4. $g(x) = \operatorname{arccotg} x \implies g'(x) = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

Soluzioni (cfr. la Figura 4.4 per le funzioni $\arcsin x$ e $\arccos x$):

1. Si ha $-\pi/2 \le \arcsin x \le \pi/2$, quindi $\cos(\arcsin x) = \sqrt{\cos^2(\arcsin x)} = \sqrt{1-x^2}$.
2. Si ha $0 \le \arccos x \le \pi$, quindi $\sin(\arccos x) = \sqrt{\sin^2(\arccos x)} = \sqrt{1-x^2}$.
3. Si ha $\dfrac{1}{\cos^2(\operatorname{arctg} x)} = \dfrac{\cos^2(\operatorname{arctg} x) + \sin^2(\operatorname{arctg} x)}{\cos^2(\operatorname{arctg} x)} = 1 + \operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x) = 1 + x^2$.
4. Si ragiona come nel caso precedente partendo da $1/\sin^2(\operatorname{arctcotg} x)$.

Osservazioni:

1. Poiché $f(x) = e^x$ ha derivata $f'(x) = e^x$, se consideriamo $g(x) = f^{-1}(x) = \ln x$ si ha

$$g'(x) = \frac{1}{f'(\ln x)} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x},$$

consistentemente con la derivata 14 di pag. 114.

2. Viceversa, poiché $f(x) = \ln x$ ha derivata $f'(x) = 1/x$, se scriviamo $g(x) = f^{-1}(x) = e^x$, si ha
$$g'(x) = \frac{1}{f'(e^x)} = \frac{1}{1/e^x} = e^x,$$
consistentemente con la derivata 13 di pag. 114.

7.5 Derivate di ordine superiore

7.5.1 Derivata seconda

Sia $f(x)$ una funzione derivabile. Se la sua derivata $f'(x)$ è a sua volta derivabile indichiamo con $f''(x)$ la sua derivata, che chiameremo *derivata seconda* di $f(x)$.

Esempi:

1. $f(x) = c \Longrightarrow f'(x) = 0 \Longrightarrow f''(x) = 0$;
2. $f(x) = x^3 \Longrightarrow f'(x) = 3x^2 \Longrightarrow f''(x) = 6x$;
3. $f(x) = \sin x \Longrightarrow f'(x) = \cos x \Longrightarrow f''(x) = -\sin x$;
4. $f(x) = e^x \Longrightarrow f'(x) = e^x \Longrightarrow f''(x) = e^x$;
5. $f(x) = e^{x^2} \Longrightarrow f'(x) = 2xe^{x^2} \Longrightarrow f''(x) = 2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2}$;
6. $f(x) = \ln x \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x} \Longrightarrow f''(x) = -\dfrac{1}{x^2}$;

7.5.2 Derivate di ordine superiore

Se $f''(x)$ è a sua volta derivabile possiamo considerare la *derivata terza* di f, che indichiamo con $f'''(x)$, e così via. In generale indiciamo con $f^{(n)}(x)$ la *derivata di ordine n* (o *derivata n-esima*) di $f(x)$, dove $f^{(0)}(x) = f(x)$, $f^{(1)}(x) = f'(x)$, $f^{(2)}(x) = f''(x)$ e $f^{(3)}(x) = f'''(x)$.

Esempi:

1. $f(x) = x^3 \Longrightarrow f'''(x) = 6 \Longrightarrow f^{(4)}(x) = 0$;
2. $f(x) = e^x \Longrightarrow f^{(n)}(x) = e^x \ \forall n \in \mathbb{N}$.
3. $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N} \Longrightarrow f^{(n)}(x) = n!$.
4. $f(x) = x^{-n}$, $n \in \mathbb{N} \Longrightarrow f^{(p)}(x) = (-1)^p \dfrac{(n+p)!}{n!} x^{-n-p} \ \forall p \geq 0$.

Definizione 7.5. *Una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ si dice di classe C^n in I se è derivabile n volte e la derivata di ordine n è continua.*

Osservazioni:

1. Una funzione può essere derivabile un numero finito di volte, ovvero ne esistono le derivate fino all'ordine n, per qualche $n \in \mathbb{N}$, ma non esiste la derivata di ordine $n+1$. Per esempio la funzione $f(x) = |x|^3 = x^2|x|$ è derivabile due volte, ma la derivata seconda non è derivabile: si ha infatti $f'(x) = 3x|x|$ e $f''(x) = 6|x|$, e $f''(x)$ non è derivabile (cfr. l'Osservazione 3 del §7.2.1).
2. Un funzione derivabile infinite volte si dice di classe C^∞.
3. Dire che una funzione è di classe C^n vuol dire che è derivabile almeno n volte, ma può ammettere anche derivate di ordine più alto: per esempio una funzione di classe C^∞ è anche di classe C^n per ogni $n \in \mathbb{N}$.
4. Valgono le relazioni di inclusione $C^{n+1} \subset C^n \ \forall n \in \mathbb{N}$.

7.6 Esercizi

1. Si calcoli la derivata di $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$.
2. Si calcoli la derivata di $f(x) = \dfrac{x^2 + x^3}{1 + x^2}$.
3. Si calcoli la derivata di $f(x) = \sin x \cos x$.
4. Si calcoli la derivata di $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{1+x}{1-x}$.
5. Si calcoli la derivata di $f(x) = \ln \left|\dfrac{x+2}{3-x}\right|$.
6. Si calcoli la derivata di $f(x) = \cos \ln x$.
7. Si calcoli la derivata di $f(x) = \arcsin \ln x^2$.
8. Si calcoli la derivata di $f(x) = x^{x \ln x}$.
9. Si calcoli la derivata di $f(x) = x^{x^x}$.
10. Si calcoli la derivata di $f(x) = 2^{x^2+3x}$.
11. Si calcoli la derivata di $f(x) = (x + \sqrt{x})^{1/3}$.
12. Si calcoli la derivata di $f(x) = \cos(\cos(\ln x))$.
13. Si calcoli la derivata di $f(x) = \ln(\sin(4 + x^3))$.
14. Si calcoli la derivata di $f(x) = \operatorname{arctg}((1 + x^{2/3})^{1/2})$.
15. Si determini dove la funzione $x|x|$ è derivabile e se na calcoli la derivata ove possibile.

16. Si determini dove la funzione $|x-1|(1+x)$ è derivabile e se ne calcoli la derivata ove possibile.
17. Si determini dove la funzione $|x^2-x^3|$ è derivabile e se ne calcoli la derivata ove possibile.
18. Si determini dove la funzione $|\sin x|$ è derivabile e se na calcoli la derivata ove possibile.
19. Si calcoli la derivata di $f(x)=e^{e^{e^x}}$.
20. Si calcoli la derivata di $f(x)=\ln(\ln(\ln x))$.

Soluzioni:

1. Si ha $f'(x)=1+2x+3x^2+4x^3$.
2. Si ha $f'(x)=\dfrac{x(2+3x+x^3)}{(1+x^2)^2}$.
3. Si ha $f'(x)=\cos 2x$.
4. Si ha $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$.
5. Si ha $f'(x)=\dfrac{5}{6+x-x^2}$.
6. Si ha $f'(x)=-\dfrac{\sin(\ln x)}{x}$.
7. Si ha $f'(x)=\dfrac{2}{x\sqrt{1-(\ln(x^2))^2}}$.
8. Si ha $f'(x)=x^{x\ln x}\ln x\,(2+\ln x)$.
9. Si ha $f'(x)=x^{x^x+x-1}\left(1+x\ln x+x(\ln x)^2\right)$.
10. Si ha $f'(x)=2^{x^2+3x}\,(3+2x)\ln 2$.
11. Si ha $f'(x)=\dfrac{1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{3(x+\sqrt{x})^{2/3}}$.
12. Si ha $f'(x)=\dfrac{\sin(\cos(\ln x))\,\sin(\ln x)}{x}$.
13. Si ha $f'(x)=3x^2\mathrm{cotg}(4+x^3)$.
14. Si ha $f'(x)=\dfrac{1}{3x^{1/3}\sqrt{1+x^{2/3}}(2+x^{2/3})}$.

15. La funzione $f(x) = x|x|$ è sicuramente derivabile per $x \neq 0$: si ha $f'(x) = 2x$ per $x > 0$ e $f'(x) = -2x$ per $x < 0$. Per discutere la derivabilità in $x = 0$ si confrontano il limite destro e il limite sinistro del rapporto incrementale. Notando che

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{(\Delta x)^2}{\Delta x} = 0,$$
$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-(\Delta x)^2}{\Delta x} = 0,$$

si conclude che la funzione è derivabile anche in $x = 0$.

16. Si ha $f(x) = x^2 - 1$ se $x \geq 1$ e $f(x) = 1 - x^2$ se $x < 1$. Quindi la funzione $f(x)$ è sicuramente derivabile per $x \neq 1$: si ha $f'(x) = 2x$ per $x > 1$ e $f'(x) = -2x$ per $x < 1$. Poiché

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{(\Delta x)^2 + 2\Delta x}{\Delta x} = 2,$$
$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-(\Delta x)^2 - 2\Delta x}{\Delta x} = -2,$$

la funzione non è derivabile in $x = 1$.

17. Si ha $f(x) = x^2 - x^3 = x^2(1 - x)$ se $x \leq 1$ e $f(x) = x^3 - x^2$ se $x > 1$. Quindi $f(x)$ è derivabile per $x \neq 1$: si ha $f'(x) = 3x^2 - 2x$ per $x > 1$ e $f'(x) = 2x - 3x^2$ per $x < 1$. Non è invece derivabile in $x = 0$ perché

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{(\Delta x)^3 + 3(\Delta x)^2 + 3\Delta x - (\Delta x)^2 - 2\Delta x}{\Delta x} = 1,$$
$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{-(\Delta x)^3 - 3(\Delta x)^2 - 3\Delta x + (\Delta x)^2 + 2\Delta x}{\Delta x} = -1,$$

dove si è tenuto conto che $(\Delta x)^3 + 3(\Delta x)^2 + 3\Delta x - (\Delta x)^2 - 2\Delta x = \Delta x + O((\Delta x)^2)$.

18. La funzione è derivabile per $x \neq k\pi \ \forall k \in \mathbb{Z}$: si ha inoltre

$$f'(x) = \cos x \text{ per } x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (2k\pi, (2k+1)\pi),$$
$$f'(x) = -\cos \text{ per } x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} ((2k+1)\pi, (2k+1)\pi).$$

19. Si ha $f(x) = e^{e^{e^x}} e^{e^x} e^x$.

20. Si ha $f'(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)(\ln(\ln x))}$.

8 | Teoremi sulle funzioni derivabili

8.1 Teoremi di Rolle, Lagrange e Cauchy

Teorema 8.1. *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b) tale che $f(a) = f(b) = 0$. Allora $\exists c \in (a, b)$ tale che $f'(c) = 0$.*

Osservazioni:

1. Il teorema è noto come *teorema di Rolle*.
2. Il significato geometrico del teorema è il seguente (cfr. la Figura 8.1): esiste almeno un punto $c \in (a, b)$ in cui la retta tangente al grafico è parallela all'asse x.
3. Se la derivata non esiste ovunque in (a, b) il risultato non vale: si consideri per esempio $f(x) = |x| - 1$, per $x \in [-1, 1]$.

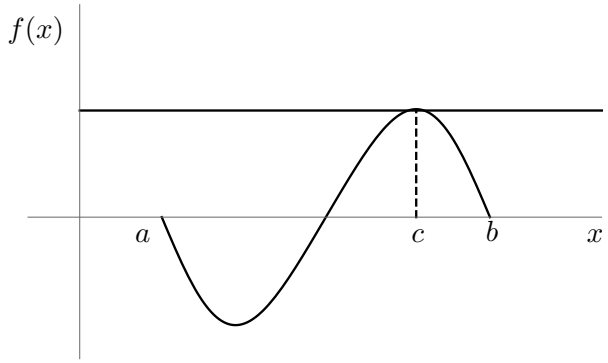


Figura 8.1: Significato geometrico del teorema di Rolle.

Teorema 8.2. *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b) tale che $f(a) = f(b)$. Allora $\exists c \in (a, b)$ tale che $f'(c) = 0$.*

Dimostrazione. Si applica il Teorema 8.1 alla funzione $g(x) := f(x) - f(a)$, notando che si ha $g(a) = g(b) = 0$ e $g'(x) = f'(x)$. ∎

Teorema 8.3. *Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione f continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b). Allora $\exists c \in (a,b)$ tale che $f(b) - f(a) = f'(c)\,(b-a)$.*

Dimostrazione. Definiamo

$$m = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

e consideriamo la funzione

$$h(x) = f(x) - f(a) - m\,(x-a).$$

Si ha allora $h(b) = h(a) = 0$ e per il Teorema 8.1 esiste $c \in (a,b)$ tale che $h'(c) = 0$. D'altra parte $h'(x) = f'(x) - m$, quindi $f'(c) = m$. ■

Osservazioni:

1. Il teorema è noto come *teorema di Lagrange*.
2. Il significato geometrico del teorema è il seguente (cfr. la Figura 8.2). Sia φ l'angolo che il segmento che unisce i punti $P_1 = ((a, f(a))$ e $P_2 = (b, (f(b))$ forma con l'asse x, così che

   $$\operatorname{tg}\varphi = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}.$$

   Esiste pertanto almeno un punto $c \in (a,b)$ in cui si ha $f'(c) = \operatorname{tg}\varphi$, ovvero in cui la retta tangente al grafico forma un angolo φ con l'asse x.

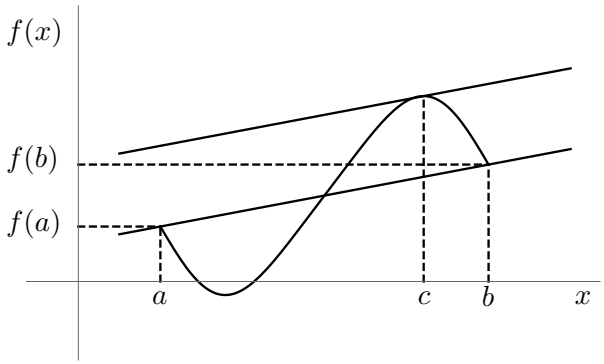


Figura 8.2: Significato geometrico del teorema di Lagrange.

Teorema 8.4. *Siano $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ e $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ due funzioni continue in $[a,b]$ e derivabili in (a,b), e sia g tale che $g'(x) \neq 0\ \forall x \in (a,b)$. Allora $\exists c \in (a,b)$ tale che*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Dimostrazione. Poniamo

$$m = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

e consideriamo la funzione

$$h(x) = f(x) - f(a) - m\,(g(x) - g(a)).$$

Si ha allora $h(b) = h(a) = 0$ e per il Teorema 8.1 esiste $c \in (a, b)$ tale che $h'(c) = 0$. Poiché $h'(x) = f'(x) - m\,g'(x)$, si ha $f'(c) = m\,g'(c)$. ∎

Osservazioni:

1. Il teorema è noto come *teorema di Cauchy*.
2. Si noti che sotto le ipotesi del teorema necessariamente $g(a) \neq g(b)$ (altrimenti per il Teorema 8.1 si avrebbe $g'(c) = 0$ per qualche $c \in (a, b)$, contro l'ipotesi che $g'(x)$ non si annulla mai).
3. Il Teorema 8.3 implica il Teorema 8.2 come caso particolare se $f(b) = f(a)$.
4. Il Teorema 8.4 implica il Teorema 8.3 come caso particolare, prendendo $g(x) = x$.
5. Se si applicasse il Teorema di Lagrange separatamente alle due funzioni f e g, si troverebbe $(f(b) - f(a))/(g(b) - g(a)) = f'(c_1)/g'(c_2)$, con due costanti c_1 e c_2 generalmente diverse, quindi non si può dedurre il Teorema 8.4 dal Teorema 8.3.

8.2 Forme indeterminate

Definizione 8.5. *Siano f e g due funzioni definite in un intervallo $I \subset \mathbb{R}$. Supponiamo che esista $x_0 \in I$ tale che $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Si dice allora che il limite*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

è una forma indeterminata.

Definizione 8.6. *Siano f e g due funzioni definite in un intervallo $I \subset \mathbb{R}$. Supponiamo che esista $x_0 \in I$ tale che $\lim_{x \to x_0} f(x)$ e $\lim_{x \to x_0} g(x)$ sono $+\infty$ oppure $-\infty$. Si dice allora che il limite*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

è una forma indeterminata.

Definizione 8.7. *Siano f e g due funzioni definite in un intervallo illimitato $[a, +\infty)$ di $\mathbb{R}$. Supponiamo che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$. Si dice allora che il limite*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

è una forma indeterminata.

Definizione 8.8. *Siano f e g due funzioni definite in un intervallo illimitato $[a, +\infty)$ di $\mathbb{R}$. Supponiamo che $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ sono $+\infty$ oppure $-\infty$ Si dice allora che il limite*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

è una forma indeterminata.

Osservazioni:

1. Se la funzione $f(x)$ è definita in un intervallo $(-\infty, b]$, si possono dare definizioni analoghe alle Definizioni 8.7 e 8.8, in cui il limite è per $x \to -\infty$. Se le funzioni sono definite in tutto $\mathbb{R}$ si possono considerare entrambi i limiti $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$.
2. Sono state considerate sopra forme indeterminate del tipo $0/0$ o ∞/∞ (qui ∞ indica $\pm\infty$). Esistono in linea di principio altre forme indeterminate: $0 \cdot \infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞. Tuttavia tali forme sono tutte riconducibili a quelle già viste. Infatti:
   - $0 \cdot \infty = 0/0 \Longrightarrow$ se $f(x) \to 0$ e $g(x) \to \infty$ allora
   $$f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}},$$
   dove $1/g(x) \to 0$;
   - $0^0 = e^{0\cdot\ln 0} = e^{0\cdot\infty} \Longrightarrow$ se $f(x) \to 0$ e $g(x) \to 0$, con $f(x) > 0$, allora, data $f(x)^{g(x)}$, si considera
   $$\ln f(x)^{g(x)} = g(x) \ln f(x),$$
   dove $g(x) \to 0$ e $\ln f(x) \to -\infty$;
   - $\infty^0 = e^{0\cdot\ln\infty} = e^{0\cdot\infty} \Longrightarrow$ se $f(x) \to \infty$ e $g(x) \to 0$, con $f(x) > 0$, allora, data $f(x)^{g(x)}$, si considera
   $$\ln f(x)^{g(x)} = g(x) \ln f(x),$$
   dove $\ln f(x) \to +\infty$ e $g(x) \to 0$;
   - $1^\infty = e^{\infty\cdot\ln 1} = e^{\infty\cdot 0} \Longrightarrow$ se $f(x) \to 1$ e $g(x) \to \infty$, allora, data $f(x)^{g(x)}$, si considera
   $$\ln f(x)^{g(x)} = g(x) \ln f(x),$$
   dove $\ln f(x) \to 0$ e $g(x) \to \infty$.
3. Se $f(x) \to +\infty$ e $g(x) \to +\infty$ anche $f(x) - g(x)$ è una forma indeterminata. Analogamente se $f(x) \to -\infty$ e $g(x) \to -\infty$ anche $f(x) - g(x)$ è una forma indeterminata. Tuttavia, in entrambi i casi, ci si può sempre ricondurre ai casi già trattati (si vedano per esempio gli esercizi 9-11 nel §8.3).
4. I Teoremi di de l'Hôpital che verranno studiati in §8.3 forniscono un metodo particolarmente efficiente per studiare forme indeterminate.

8.3 Teoremi di de l'Hôpital

8.3.1 Forme indeterminate della forma 0/0

Teorema 8.9. *Siano* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *e* $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *due funzioni continue in* $[a,b]$ *e derivabili in* (a,b)*, tali che*

1. $\exists x_0 \in (a,b)$ *tale che* $f(x_0) = g(x_0) = 0$*,*
2. $g(x)$, $g'(x) \neq 0$ *in* $(a,b) \setminus \{x_0\}$*.*

Allora, se esiste $\lim_{x\to x_0} f'(x)/g'(x)$*, esiste anche* $\lim_{x\to x_0} f(x)/g(x)$ *e si ha*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Esempi:

1. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{\cos x}{1} = 1.$
2. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{1/(1+x)}{1} = \lim_{x\to 0} \dfrac{1}{1+x} = 1.$
3. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{e^x}{1} = 1.$
4. $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{1} = 0.$

Il Teorema 8.9 si può generalizzare nel modo seguente.

Teorema 8.10. *Siano* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *e* $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *due funzioni continue in* $[a,b]$ *e derivabili due volte in* (a,b)*, tali che*

1. $\exists x_0 \in (a,b)$ *tale che* $f(x_0) = g(x_0) = 0$ *e* $f'(x_0) = g'(x_0) = 0$*,*
2. $g(x)$, $g'(x)$, $g''(x) \neq 0$ *in* $(a,b) \setminus \{x_0\}$*.*

Allora, se esiste $\lim_{x\to x_0} f''(x)/g''(x)$*, esiste anche* $\lim_{x\to x_0} f(x)/g(x)$ *e si ha*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

Esempi:

1. $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{2x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{\cos x}{2} = \dfrac{1}{2}.$
2. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{2x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{e^x}{2} = \dfrac{1}{2}.$
3. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{e^x}{\cos x} = 1.$

4. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)-\sin x+x^2}{e^x-x-\cos x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{\dfrac{1}{1+x}-\cos x+2x}{e^x-1+\sin x} =$
$= \lim_{x\to 0} \dfrac{-\dfrac{1}{(1+x)^2}+\sin x+2}{e^x+\cos x} = \dfrac{1}{2}.$

Osservazione: se anche le derivate seconde delle funzioni f e g si annullano in x_0 si può passare alle derivate terze, e così via. Vale quindi la seguente ulteriore generalizzazione.

Teorema 8.11. *Siano $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ e $g\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ due funzioni continue in $[a,b]$ e derivabili n volte in (a,b), tali che*

1. *$\exists x_0 \in (a,b)$ tale che le funzioni f e g e tutte le loro derivate fino all'ordine $n-1$ si annullano in x_0,*
2. *$g(x), g'(x), \dots, g^{(n)}(x) \neq 0$ in $(a,b)\setminus\{x_0\}$.*

Allora, se esiste $\lim_{x\to x_0} f^{(n)}(x)/g^{(n)}(x)$, esiste anche $\lim_{x\to x_0} f(x)/g(x)$ e si ha

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}.$$

Esempi:

1. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{e^x+e^{-x}}{\cos x} = 2.$
2. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-e^{x+\sin x}}{x^3} = \lim_{x\to 0} \dfrac{2e^{2x}-e^{x+\sin x}(1+\cos x)}{3x^2} =$
$= \lim_{x\to 0} \dfrac{4e^{2x}-e^{x+\sin x}(1+\cos x)^2+e^{x+\sin x}\sin x}{6x} =$
$= \lim_{x\to 0} \dfrac{8e^{2x}-e^{x+\sin x}(1+\cos x)^3+3e^{x+\sin x}(1+\cos x)\sin x+e^{x+\sin x}\cos x}{6x} = \dfrac{1}{6}.$

Complementi (∗):

1. *Dimostrazione del Teorema 8.9* Per il Teorema 8.4 (di Cauchy), per $x\in(a,b)\setminus\{x_0\}$ si ha

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

per ξ compreso tra x_0 e x ($\xi\in(x_0,x)$ se $x>x_0$, $\xi\in(x,x_0)$ se $x<x_0$). In particolare $\xi\to x_0$ per $x\to x_0$, quindi si trova

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\xi\to x_0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

da cui segue l'asserto. ∎

2. *Dimostrazione del Teorema 8.10* Applicando il Teorema 8.9 alle funzioni f' e g' si trova
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{g''(x)},$$
quindi esiste il limite $\lim_{x\to x_0} f'(x)/g'(x)$. Possiamo allora riapplicare il Teorema 8.9 alle funzioni f e g e si ottiene l'asserto. ■

3. *Dimostrazione del Teorema 8.11* Si applica iterativamente il Teorema 8.9 alle coppie di funzioni $f^{(n-1)}$ e $g^{(n-1)}$, ..., f'' e g'', f' e g', f e g, iterativamente. ■

8.3.2 Forme indeterminate della forma ∞/∞

Teorema 8.12. *Siano $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ e $g\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ due funzioni continue in $[a,b]$ e derivabili in (a,b), tali che*

1. *$g(x), g'(x)\neq 0$ in (a,b),*
2. *$\lim_{x\to x_0} f(x)$ e $\lim_{x\to x_0} g(x)$ sono $+\infty$ oppure $-\infty$.*

Allora, se esiste $\lim_{x\to x_0} f'(x)/g'(x)$, esiste anche $\lim_{x\to x_0} f(x)/g(x)$ e si ha
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Teorema 8.13. *Siano $f\colon[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ e $g\colon[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ due funzioni continue in $[a,+\infty)$ e derivabili in $(a,+\infty)$, tali che*

1. *$g(x), g'(x)\neq 0$ in $[a,+\infty)$,*
2. *$\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ sono $+\infty$ oppure $-\infty$.*

Alllora, se esiste $\lim_{x\to+\infty} f'(x)/g'(x)$, esiste anche $\lim_{x\to+\infty} f(x)/g(x)$ e si ha
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Teorema 8.14. *Siano $f\colon(-\infty,b]\to\mathbb{R}$ e $g\colon(-\infty,b]\to\mathbb{R}$ due funzioni continue in $(-\infty,b]$ e derivabili in $(-\infty,b)$, tali che*

1. *$g'(x)\neq 0$ in $(-\infty,b]$,*
2. *$\lim_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ sono $+\infty$ oppure $-\infty$.*

Allora, se esiste $\lim_{x\to-\infty} f'(x)/g'(x)$, esiste anche $\lim_{x\to-\infty} f(x)/g(x)$ e si ha
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Osservazioni:

1. Le dimostrazioni dei Teoremi 8.12, 8.13 e 8.14 sono analoghe a quella del Teorema 8.9 vista sopra.

2. Come il Teorema 8.9 anche i Teoremi 8.12, 8.13 e 8.14 si generalizzano al caso in cui i limiti dei rapporti delle prime n derivate sono forme indeterminate.
3. I teoremi enunciati in questo e nel precedente paragrafo sono noti come *teoremi di de l'Hôpital*.
4. I teoremi di de l'Hôpital permettono di calcolare forme indeterminate considerando i limiti dei rapporti delle derivate delle funzioni. Il viceversa non è vero! In altre parole, se esiste il limite di $f(x)/g(x)$, non si può dedurre alcunché sul limite di $f'(x)/g'(x)$. Per esempio se $f(x) = x + \sin x$ e $g(x) = x$ si ha $\lim_{x\to+\infty}(x + \sin x)/x = 1$, d'altra parte $f'(x)/g'(x) = 1 + \cos x$ non ammette limite per $x \to +\infty$.

8.4 Esercizi

1. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\sin(1/x)}{1/x}$.
2. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^2}$ e, più in generale, $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n}$, con $n \in \mathbb{N}$.
3. $\lim_{x\to0^+} x \ln x$.
4. $\lim_{x\to0^+} x^\alpha \ln x$, $\alpha > 0$.
5. $\lim_{x\to1}(x^2 - 1)\ \ln(x - 1)$.
6. $\lim_{x\to0^+} \dfrac{\ln x}{\operatorname{tg}(\pi/2 - x)}$.
7. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^2 - x + 1}{-x^2 + x + 1}$.
8. $\lim_{x\to0^+} x^x$.
9. $\lim_{x\to+\infty}(x^2 - x)$.
10. $\lim_{x\to+\infty} \left(e^{x^2} - x^2\right)$.
11. $\lim_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x}\right)$.
12. $\lim_{x\to0^+} x^{\sin x}$.
13. $\lim_{x\to+\infty} x^{-\alpha} e^x$, $\alpha > 0$.
14. $\lim_{x\to0^+} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$.

15. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin(x^2)} - 2 + \cos x}{x(e^x - e^{-x})}$.

16. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos(\sin x) - \cos x}{x^2 \sin(x^2)}$.

Soluzioni:

1. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\sin(1/x)}{1/x} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{-(1/x^2)\cos(1/x)}{-1/x^2} = \lim_{x\to+\infty} \cos(1/x) = \lim_{t\to 0} \cos t = 1.$

2. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{2} = +\infty$. Analogamente, per $n \in \mathbb{N}$, si trova, iterando n volte,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{n\,x^{n-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{n(n-1)\,x^{n-2}} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{n(n-1)(n-2)\,x^{n-3}} = \ldots = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{n(n-1)(n-2)\ldots 3\,x^2} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{n(n-1)(n-2)\ldots 2\,x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{n!} = +\infty.\end{aligned}$$

3. $\lim_{x\to 0^+} x \ln x = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{1/x} \lim_{x\to 0^+} \dfrac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0.$

4. $\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \ln x = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{x^{-\alpha}} = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{1/x}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = -\lim_{x\to 0^+} \dfrac{x^\alpha}{\alpha} = 0.$

5. $\lim_{x\to 1} (x^2-1)\,\ln(x-1) = \lim_{x\to 1} (x+1)\,(x-1)\,\ln(x-1) = \lim_{t\to 0} (t+2)\,t \ln t = 0.$

6. $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{\operatorname{tg}(\pi/2 - x)} = -\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\cos^2(\pi/2-x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{-2\cos(\pi/2-x)\,\sin(\pi/2-x)}{1} = 0.$

7. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^2 - x + 1}{-x^2 + x + 1} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{2x-1}{-2x+1} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{2}{-2} = -1.$

8. $\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = e^{\lim_{x\to 0+} x\ln x} = e^0 = 1.$

9. $\lim_{x\to+\infty} (x^2 - x) = \lim_{x\to+\infty} x(x-1) = +\infty.$

10. $e^{x^2} - x^2 = e^{x^2}\,(1 - x^2 e^{-x^2})$, dove $\lim_{x\to+\infty} x^2 e^{-x^2} = \lim_{x\to+\infty} x^2/e^{x^2} = 0$ (cfr. l'esercizio 2) $\Longrightarrow$ $\lim_{x\to+\infty} (e^{x^2} - x^2) = \lim_{x\to+\infty} e^{x^2} = +\infty.$

11. $\lim_{x\to 0}\Big(\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x}\Big) = \lim_{x\to 0}\Big(\dfrac{x - \sin x}{x \sin x}\Big) = \lim_{x\to 0}\Big(\dfrac{1-\cos x}{\sin x + x\cos x}\Big) = \lim_{x\to 0}\Big(\dfrac{\sin x}{2\cos x - x\sin x}\Big) = 0.$

12. $\lim_{x\to 0^+} x^{\sin x} = \lim_{x\to 0^+} e^{(\sin x)\,\ln x} = 1.$

13. Si scrive $x^{-\alpha}e^x = e^x/x^\alpha$ e si applica iterativamante il Teorema 8.13 finché l'esponente della potenza al denominatore non diventa negativo

$$\lim_{x\to+\infty} x^{-\alpha}e^x = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3}} = \ldots = +\infty.$$

14. $\lim_{x\to0^+} (\sin x)^{\operatorname{tg} x} = \lim_{x\to0^+} e^{(\operatorname{tg} x)\,\ln(\sin x)} = \lim_{x\to0^+} e^{(1/\cos x)\,(\sin x)\,\ln(\sin x)} = e^{1\cdot0} = 1.$

15. $\lim_{x\to0} \dfrac{e^{\sin(x^2)} - 2 + \cos x}{x(e^x - e^{-x})} = \lim_{x\to0} \dfrac{2x\,e^{\sin(x^2)}\cos(x^2) - \sin x}{e^x - e^{-x} + x\,(e^x + e^{-x})} =$
$\lim_{x\to0} \dfrac{2\,e^{\sin x^2}\cos(x^2) + 4x^2e^{\sin(x^2)}(\cos(x^2))^2 - 4x^2e^{\sin(x^2)}\sin(x^2) - \cos x}{2e^x + 2e^{-x} + x(e^x - e^{-x})} = \dfrac{1}{4}.$

16. $\lim_{x\to0} \dfrac{\cos(\sin x) - \cos x}{x^2\sin(x^2)} = \lim_{x\to0} \dfrac{-\sin(\sin x)\,\cos x + \sin x}{2x\,\sin(x^2) + 2x^3\cos(x^2)} =$
$\lim_{x\to0} \dfrac{\sin(\sin x)\,\sin x - \cos(\sin x)\,(\cos x)^2 + \cos x}{10\,x^2\cos(x^2) + 2\sin(x^2) - 4x^4\sin(x^2)} =$
$\lim_{x\to0} \dfrac{\sin(\sin x)\,\cos x + \sin(\sin x)\,(\cos x)^3 + 3\cos(\sin x)\,\sin x\,\cos x - \sin x}{24\,x\,\cos(x^2) - 8x^5\cos(x^2) - 36x^3\sin(x^2)} =$
$\lim_{x\to0} \dfrac{\cos(\sin x)(7(\cos x)^2 + (\cos x)^4 - 3) - \sin(\sin x)\,\sin x(1 + 6(\cos x)^2) - \cos x}{24\,\cos(x^2) - 112\,x^4\cos(x^2) - 156\,x^2\sin(x^2) + 16\,x^6\sin(x^2)} = \dfrac{1}{6}.$

9 | Studio del grafico di una funzione

9.1 Asintoti

Definizione 9.1. *Se la distanza tra un punto P del grafico di una funzione f e una retta r tende a zero quando P tende all'infinito, si dice che r è un* asintoto *della funzione f. L'asintoto si dice* asintoto orizzontale *se la retta r ha equazione $y = c$, dove c è costante, si dice* asintoto obliquo *se la retta r ha equazione $y = ax + b$, dove $a \neq 0$ e b sono costanti.*

Definizione 9.2. *Si chiama* asintoto verticale *di una funzione f una retta r di equazione $x = c$, tale che si abbia*

$$\lim_{x\to c} f(x) = \pm\infty \quad \textit{oppure} \quad \lim_{x\to c^+} f(x) = \pm\infty \quad \textit{oppure} \quad \lim_{x\to c^-} f(x) = \pm\infty,$$

dove $\pm\infty$ indica che il limite vale $+\infty$ o $-\infty$.

Osservazioni:

1. Se una funzione f ha per $x \to +\infty$ un asintoto obliquo di equazione $y = ax + b$ deve succedere che
$$\lim_{x\to+\infty} (\, f(x) - ax - b \,) = 0.$$
Questo implica che
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a, \qquad \lim_{x\to+\infty} (f(x) - ax) = b.$$
Analogamente si ragiona se si ha un asintoto obliquo per $x \to -\infty$.
2. Per determinare eventuali asintoti obliqui od orizzontali si procede come segue:
   - si calcola prima il limite di $f(x)/x$ per $x \to +\infty$ o per $x \to -\infty$ e, se il limite esiste, si trova così il valore di a (in particolare se $a = 0$ l'asintoto è orizzontale, se $a \neq 0$ l'asintoto è obliquo),
   - si calcola quindi il limite di $f(x) - ax$, che, se esiste, definisce b.
3. Non è detto che se esiste il limite a di $f(x)/x$ allora esiste necessariamente anche il limite di $f(x) - ax$. Per esempio, se $f(x) = x + \ln x$ si ha $\lim_{x\to+\infty}(x + \ln x)/x = 1$; tuttavia $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - x) = \lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \Longrightarrow$ la funzione $f(x) = x + \ln x$ non ammette alcun asintoto per $x \to +\infty$.

4. Esempi di asintoti orizzontali, obliqui e verticali sono dati in Figura 9.1:
   4.1. la funzione $f(x) = 1 - e^{-x^2}$ ha un asintoto orizzontale $y = 1$ per $x \to \pm\infty$,
   4.2. la funzione $(4 + (x + 2)^3)/x^2$ ha un asintoto obliquo di equazione $y = 2x + 12$ (sia per $x \to +\infty$ sia per $x \to -\infty$) e un asintoto verticale di equazione $x = 0$,
   4.3. la funzione $1/(x + 2)$ ha un asintoto verticale di equazione $x = -2$ e un asintoto orizzontale $y = 0$ (sia per $x \to +\infty$ sia per $x \to -\infty$),
   4.4. la funzione $(x^2 - 4x + 6)/(x - 1)$ ha un asintoto obliquo di equazione $y = x - 4$ (di nuovo, sia per $x \to +\infty$ sia per $x \to -\infty$) e un asintoto verticale $x = 1$.

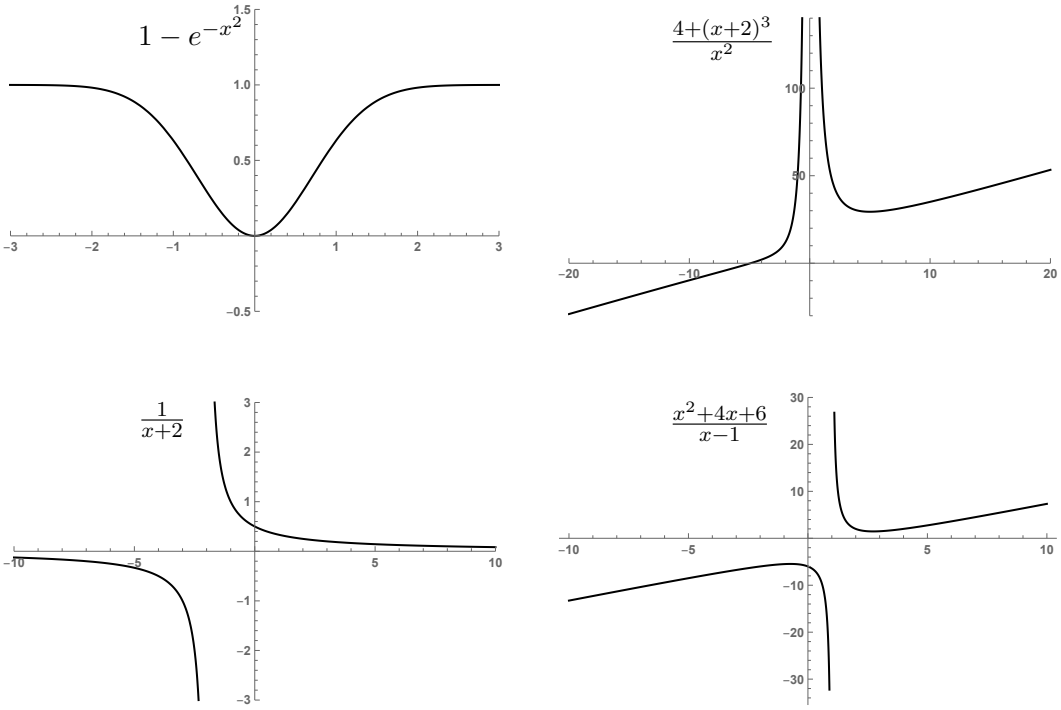


Figura 9.1: Esempi di asintoti.

Esercizi:

1. Si dimostri che $f(x) = 1/x$ ha un asintoto verticale in $x = 0$.
2. Si dimostri che $f(x) = 1/(x + 1)$ ha un asintoto verticale in $x = -1$.
3. Si dimostri che $f(x) = \operatorname{tg} x$ ha infiniti asintoti verticali in $x = \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
4. Si dimostri che $f(x) = \log_a x$ ha un asintoto verticale in $x = 0$.
5. Si dimostri che $f(x) = 1/(x^2 - 1)$ ha due asintoti verticali, uno in $x = -1$ e uno in $x = +1$.
6. Si dimostri che $f(x) = x^2/(1 + x)$ ha un asintoto obliquo di equazione $y = x - 1$ sia per $x \to +\infty$ sia per $x \to -\infty$.

7. Si dimostri che $f(x) = (x^2+4)/(x^2+1)$ ha un asintoto orizzontale di equazione $y = 1$ sia per $x \to +\infty$ sia per $x \to -\infty$.

8. Si dimostri che $f(x) = x + e^x$ ha un asintoto obliquo di equazione $y = x$ per $x \to -\infty$.

9. Si dimostri che $f(x) = (x^2e^x - x)/(x^2e^x + x)$ ha un asintoto orizzontale di equazione $y = 1$ per $x \to +\infty$ e un asintoto orizzontale di equazione $y = 1$ per $x \to -\infty$.

10. Si dimostri che $f(x) = \sqrt{x^2+1} + x$ ha un asintoto obliquo di equazione $y = 2x$ per $x \to +\infty$ e un asintoto orizzontale di equazione $y = 0$ per $x \to -\infty$.

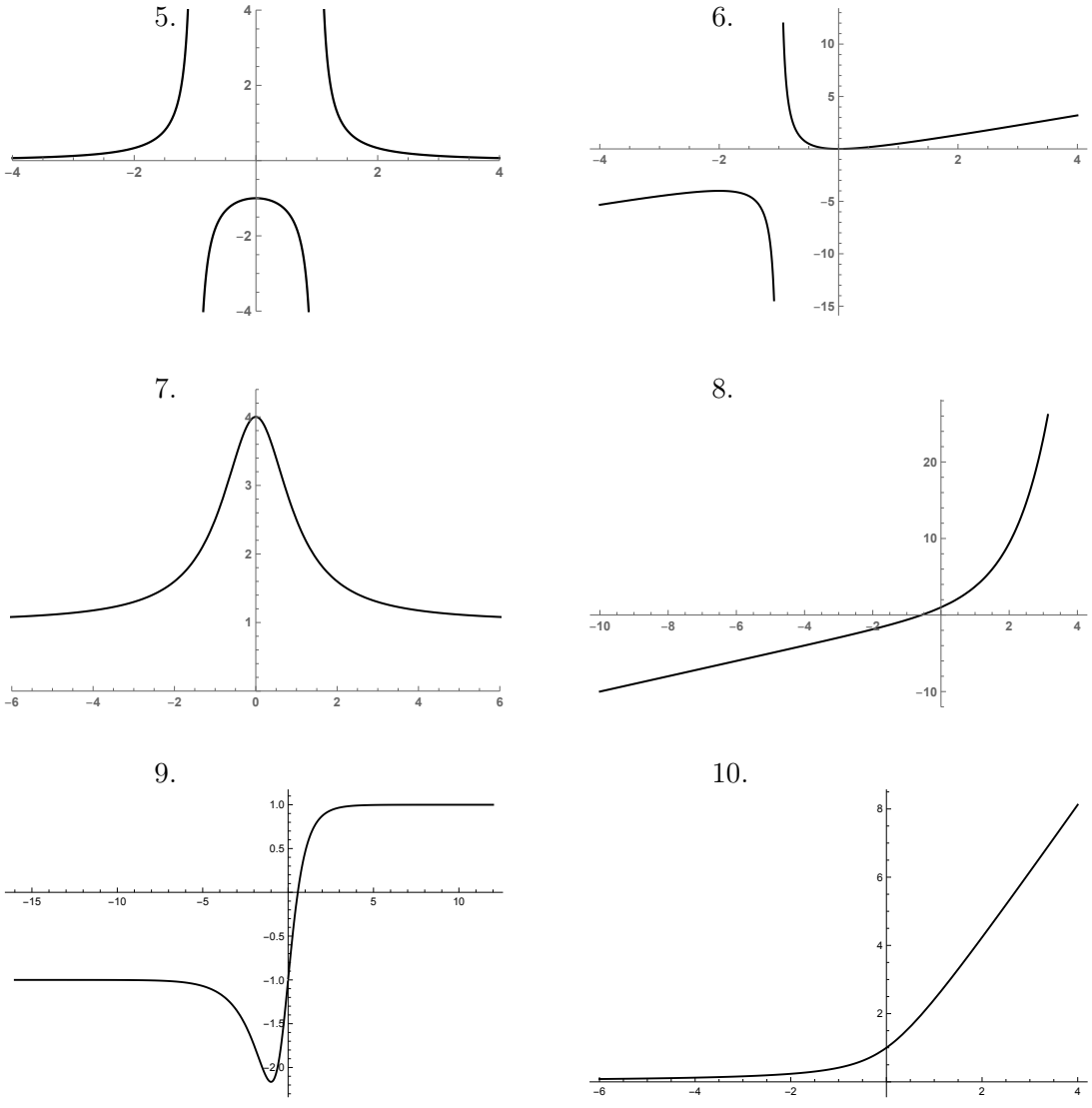


Figura 9.2: Grafici delle funzioni degli esercizi 5-10.

Soluzioni (cfr. la Figura 9.2 per gli esercizi 5–8):

1. Si ha $\lim_{x\to 0^+} 1/x = +\infty$ e $\lim_{x\to 0^-} 1/x = -\infty$.
2. Si ha $\lim_{x\to -1^+} 1/(x+1) = +\infty$ e $\lim_{x\to -1^-} 1/(x+1) = -\infty$.
3. Si ha $\lim_{x\to \pi/2^-} \operatorname{tg} x = +\infty$ e $\lim_{x\to \pi/2^+} \operatorname{tg} x = -\infty$, e si usa il fatto che $\operatorname{tg} x$ è una funzione periodica di periodo π.
4. Si ha $\lim_{x\to 0^+} \log_a x = -\infty$ se $a > 1$ e $\lim_{x\to 0^+} \log_a x = +\infty$ se $a < 1$.
5. Si ha $\lim_{x\to 1^+} 1/(x^2-1) = \lim_{x\to -1^-} 1/(x^2-1) = +\infty$ e $\lim_{x\to 1^-} 1/(x^2-1) = \lim_{x\to -1^+} 1/(x^2-1) = -\infty$.
6. Si ha $\lim_{x\to\pm\infty} (x^2+4)/(x^2+1) = 1$.
7. Si ha $\lim_{x\to\pm\infty} x^2/(x(1+x)) = 1$ e $\lim_{x\to\pm\infty} (x^2/(1+x) - x) = -1$.
8. Si ha $\lim_{x\to -\infty} (x+e)/x = 1$ e $\lim_{x\to -\infty} (x + e^x - x) = 0$.
9. Si ha
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2e^x - x}{x^2e^x + x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2e^x(1 - x^{-1}e^{-x})}{x^2e^x(1 + x^{-1}e^{-x})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2e^x}{x^2e^x} = 1,$$
mentre
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2e^x - x}{x^2e^x + x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x(1 - xe^x)}{x(x + xe^x)} = -\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x} = -1,$$
dal momento che $\lim_{x\to+\infty} x^{-1}e^{-x} = \lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$.
10. Si ha
$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+1} + x\right) &= +\infty,\\
\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1} + x}{x} &= \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1\right) = 2,\\
\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+1} + x - 2x\right) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)}{\sqrt{x^2+1} + x}\\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1} + x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x} = 0,
\end{aligned}$$
mentre
$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+1} + x\right) &= \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)}{\sqrt{x^2+1} - x}\\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1} - x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + |x|} = 0.
\end{aligned}$$

9.2 Funzioni crescenti e decrescenti

Ricordiamo la definizione di funzione crescente o decrescente data nel §4.1 (cfr. la Definizione 4.8), che qui riportiamo, per comodità.

Definizione 9.3. *Una funzione f continua in $[a,b]$ si dice*

- crescente *in* $[a,b]$ *se* $\forall x_1, x_2 \in [a,b]$*, con* $x_2 > x_1$*, si ha* $f(x_2) \geq f(x_1)$*:*
- decrescente *in* $[a,b]$ *se* $\forall x_1, x_2 \in [a,b]$*, con* $x_2 > x_1$*, si ha* $f(x_2) \leq f(x_1)$*;*
- strettamente crescente *in* $[a,b]$ *se* $\forall x_1, x_2 \in [a,b]$*, con* $x_2 > x_1$*, si ha* $f(x_2) > f(x_1)$*, con il segno stretto;*
- strettamente derescente *in* $[a,b]$ *se* $\forall x_1, x_2 \in [a,b]$*, con* $x_2 > x_1$*, si ha* $f(x_2) < f(x_1)$*, con il segno stretto.*

Esempi:

1. x^2 è crescente in $[0,\infty)$ ed è decrescente in $(-\infty, 0]$;
2. $\sqrt{x}$ è crescente in $[0,\infty)$;
3. a^x con $a > 1$ (in particolare e^x) è crescente in $\mathbb{R}$;
4. $\log_a x$ con $a > 1$ (in particolare $\ln x$) è crescente in $(0, +\infty)$;
5. $1/x^2$ è decrescente in $(0,\infty)$ e crescente in $(-\infty, 0)$;
6. $1/x$ è decrescente in $(0,\infty)$ e in $(-\infty, 0)$, ovvero in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$;
7. e^{-x} è decrescente in $\mathbb{R}$;
8. $\sin x$ è crescente per $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ e decrescente per $x \in [-\pi, -\pi/2] \cup [\pi/2, \pi]$;
9. $\cos x$ è crescente per $x \in [-\pi, 0]$ e decrescente per $x \in [0, \pi]$.
10. $\mathrm{tg}\, x$ è crescente per ogni x per cui è definita.

Osservazioni:

1. Se la funzione $f(x)$ è crescente allora $-f(x)$ è decrescente.
2. Se la funzione $f(x)$ è pari ed è crescente per $x > 0$, allora è decrescente per $x < 0$; se $f(x)$ è dispari ed è crescente per $x > 0$, allora è crescente anche per $x < 0$.

Teorema 9.4. *Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b). Allora f è crescente in $[a,b]$ se e solo se $f'(x) \geq 0$ $\forall x \in (a,b)$.*

Teorema 9.5. *Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b). Allora f è decrescente in $[a,b]$ se e solo se $f'(x) \leq 0$ $\forall x \in (a,b)$.*

Osservazione: Se la funzione è crescente, la tangente al grafico forma un angolo $\varphi \in [0, \pi/2)$ con l'asse x, quindi $\operatorname{tg}\varphi \geq 0$. Analogamente se la funzione è decrescente, l'angolo è $\varphi \in (-\pi/2, 0]$ e quindi $\operatorname{tg}\varphi \leq 0$.

Esempi:

1. Se $f(x) = x^4$ si ha $f'(x) = 4x^3$, quindi $f(x)$ è crescente per $x \geq 0$ e decrescente per $x \leq 0$.
2. Se $f(x) = x^5$ si ha $f'(x) = 5x^4 \geq 0$, quindi $f(x)$ è crescente $\forall x \in \mathbb{R}$.

Definizione 9.6. *Sia f una funzione definita in un intervallo $[a, b]$. Un punto $x_1 \in (a, b)$ è un* punto di massimo relativo *(o* locale*) se esiste un intorno $B_{\delta_1}(x_1) = (x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1)$ tale che $f(x) \leq f(x_1)$ $\forall x \in B_{\delta_1}(x_1)$. Il valore $f(x_1)$ si dice* massimo relativo *di f.*

Definizione 9.7. *Un punto di massimo relativo x_1 di una funzione f si dice* punto di massimo relativo stretto *(o* forte *o* proprio*) se $f(x) < f(x_1)$ $\forall x \in B_{\delta_1}(x_1) \setminus \{x_1\}$; il valore $f(x_1)$ si dice in tal caso* massimo relativo stretto *(o* forte *o* proprio*) di f.*

Definizione 9.8. *Sia f una funzione definita in un intervallo $[a, b]$. Un punto $x_2 \in (a, b)$ è un* punto di minimo relativo *(o* locale*) se esiste un intorno $B_{\delta_2}(x_2) = (x_2 - \delta_2, x_2 + \delta_2)$ tale che $f(x) \geq f(x_2)$ $\forall x \in B_{\delta_2}(x_2)$. Il valore $f(x_2)$ si dice* minimo relativo *di f.*

Definizione 9.9. *Un punto di minimo relativo x_2 di una funzione f si dice* punto di minimo relativo stretto *(o* forte *o* proprio*) se $f(x) > f(x_2)$ $\forall x \in B(x_2, \delta_1) \setminus \{x_2\}$; il valore $f(x_2)$ si dice in tal caso* minimo relativo stretto *(o* forte *o* proprio*) di f.*

Definizione 9.10. *I punti di massimo e di minimo relativo di una funzione f si chiamano* punti estremali *di f.*

Definizione 9.11. *I punti in cui si annulla la derivata prima di una funzione f derivabile si chiamano* punti stazionari *di f.*

Teorema 9.12. *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b). Se $x_0 \in (a, b)$ è un punto di massimo o di minimo relativo, allora $f'(x_0) = 0$, ovvero se x_0 è un punto estremale allora è un punto stazionario.*

Osservazioni:

1. Il Teorema 9.12 (che è noto come *teorema di Fermat*) dà una condizione necessaria per l'esistenza di un punto estremale.
2. Il viceversa non è vero: se esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che $f'(x_0) = 0$ non necessariamente x_0 è un punto di massimo o di minimo (esempio: se $f(x) = x^3$ allora $f'(x) = 3x^2$, quindi $f'(0) = 0$; tuttavia $x = 0$ non è né un punto di massimo né un punto di minimo.
3. La funzione $f(x) = x^2(x^2 - 2)$ ha un punto di massimo relativo (stretto) in $x = 0$, ma non ha massimo assoluto essendo illimitata superiormente; ha invece due punti di minimo relativo (stretto) in $x = \pm 1$, che sono anche punti di minimo assoluto (cfr. la Figura 9.3).

4. Se la funzione non è derivabile, i punti di massimo e di minimo relativo vanno cercati in modo diverso. Per esempio se $f(x) = |x|$ si ha un punto di minimo assoluto in $x = 0$, dove la funzione non è derivabile. La funzione $f(x) = (1 - x^{2/3})^2$ ha un massimo relativo in $x = 0$, mentre $f'(x) = -4(1 - x^{2/3})x^{-1/3}/3$ diverge per $x \to 0^{\pm}$ (cfr. la Figura 9.4).
5. In base alle osservazioni precedenti, un punto stazionario non è necessariamente un punto estremale e un punto estremale è necessariamente un punto stazionario solo nel caso in cui la funzione sia derivabile.

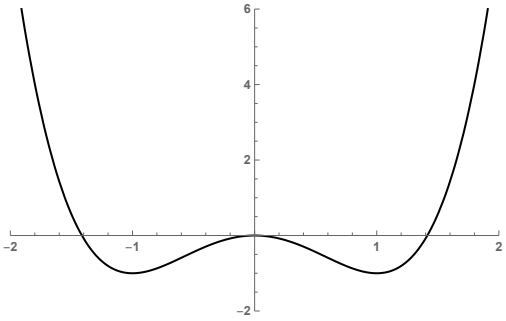


Figura 9.3: Grafico della funzione $x^2(x^2 - 2)$.

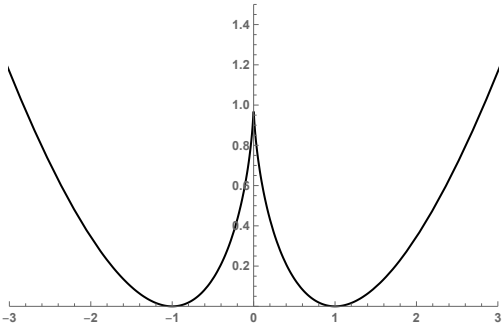


Figura 9.4: Grafico della funzione $(1 - x^{2/3})^2$.

Teorema 9.13. *Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b). Se x_1 è un punto stazionario di f ed esiste $\delta > 0$ tale che $f'(x) > 0$ per $x \in (x_1 - \delta, x_1)$ e $f'(x) < 0$ per $x \in (x_1, x_1 + \delta)$, allora x_1 è un punto di massimo.*

Teorema 9.14. *Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b). Se x_1 è un punto stazionario di f ed esiste $\delta > 0$ tale che $f'(x) < 0$ per $x \in (x_1 - \delta, x_1)$ e $f'(x) > 0$ per $x \in (x_1, x_1 + \delta)$, allora x_1 è un punto di minimo.*

Definizione 9.15. *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b). Se x_0 è un punto stazionario di f ed esiste $\delta > 0$ tale che $f'(x) > 0$ per $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ e per $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ oppure $f'(x) < 0$ per $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ e per $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, allora si dice che x_0 è un* punto di flesso orizzontale.

Complementi (∗):

1. *Dimostrazione del Teorema 9.4.* Sia $x \in (a,b)$ e sia Δx tale che $x + \Delta x \in [a,b]$. Consideriamo il rapporto incrementale
$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$
Se f è crescente allora $\Delta f/\Delta x \geq 0\ \forall \Delta x$. Passando al limite, per il Teorema 5.16, si trova
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \geq 0.$$
Viceversa, fissati $x_1, x_2 \in [a,b]$, con $x_2 > x_1$, per il Teorema 8.3, si ha
$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)\,(x_2 - x_1)$$
per qualche $\xi \in (x_1, x_2)$. Quindi se $f'(x) \geq 0\ \forall x \in [a,b]$ si trova $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$.
2. *Dimostrazione del Teorema 9.5.* Si ragiona come per il Teorema 9.4. Oppure si definisce $g(x) = -f(x)$ e si applica il Teorema 9.4 alla funzione g.
3. *Dimostrazione del Teorema 9.12.* Sia $x_0 \in (a,b)$ un punto di massimo di f. Allora $\exists \delta > 0$ tale che $f(x_0 + \Delta x) \leq f(x_0)$ e quindi $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \leq 0\ \forall |\Delta x| < \delta$. Ne segue che $\Delta f/\Delta x \leq 0$ se $\Delta x \geq 0$ e $\Delta f/\Delta x \geq 0$ se $\Delta x \leq 0$. Poiché la funzione è derivabile esistono il limite destro e il limite sinistro e sono uguali a $f'(x_0)$. Quindi
$$0 \geq \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta f}{\Delta x} \geq 0,$$
ovvero $f'(x_0) = 0$. Il caso in cui x_0 sia un punto di minimo si discute similmente
4. *Dimostrazione del Teorema 9.13.* Sia $x \in (x_1 - \delta, x_1)$. Allora $f(x) - f(x_1) = f'(\xi)\,(x - x_1)$, per un opportuno $\xi_1 \in (x, x_1)$. Quindi $f'(\xi_1) > 0 \Longrightarrow f(x) < f(x_1)$. Analogamente per $x \in (x_1, x_1 + \delta)$ si ha $f(x) - f(x_1) = f'(\xi_2)\,(x - x_1)$, per un opportuno $\xi_2 \in (x_1, x)$. Quindi $f'(\xi_2) < 0 \Longrightarrow f(x) < f(x_1)$. Conclusione: $\forall x \in (x_1 - \delta, x_1 + \delta)$ si ha $f(x) \leq f(x_1) \Longrightarrow$ x_1 è un punto di massimo.
5. *Dimostrazione del Teorema 9.14.* Si procede come nella dimostrazione del Teorema 9.13

9.3 Massimi e minimi assoluti di una funzione

Si ricordi il Teorema 6.7: una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato ammette massimo e minimo. Dal Teorema 9.12 discende che, nella ricerca dei punti di massimo e minimo assoluti di una funzione f derivabile in un intervallo limitato $[a,b]$, possiamo procedere come segue:

1. Si cercano i punti stazionari, i.e. i punti x che risolvono l'equazione $f'(x) = 0$: siano $x_1, x_2, x_3, \ldots$ tali punti. Si calcolano quindi i valori che la funzione f assume in corrispondenza dei punti stazionari, i.e. $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots$

2. Si calcolano i valori $f(a)$ e $f(b)$ che la funzione assume agli estremi dell'intervallo.
3. Il massimo assoluto e il minimo assoluto saranno, rispettivamente,

$$\max\{f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots\},$$
$$\min\{f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots\}.$$

Osservazione: Se la funzione $f(x)$ non è derivabile in qualche punto, allora si devono calcolare anche i valori che la funzione assume nei punti di non derivavbilità e confrontarli con i valori che la funzione assume in corrispondenza dei punti stazionari e degli estremi dell'intervallo. Per esempio il minimo della funzione $f(x) = |x|$ nell'intervallo $[-1, 1]$ è raggiunto in $x = 0$, dove la funzione non è derivabile (cfr. la Figura 5.1).

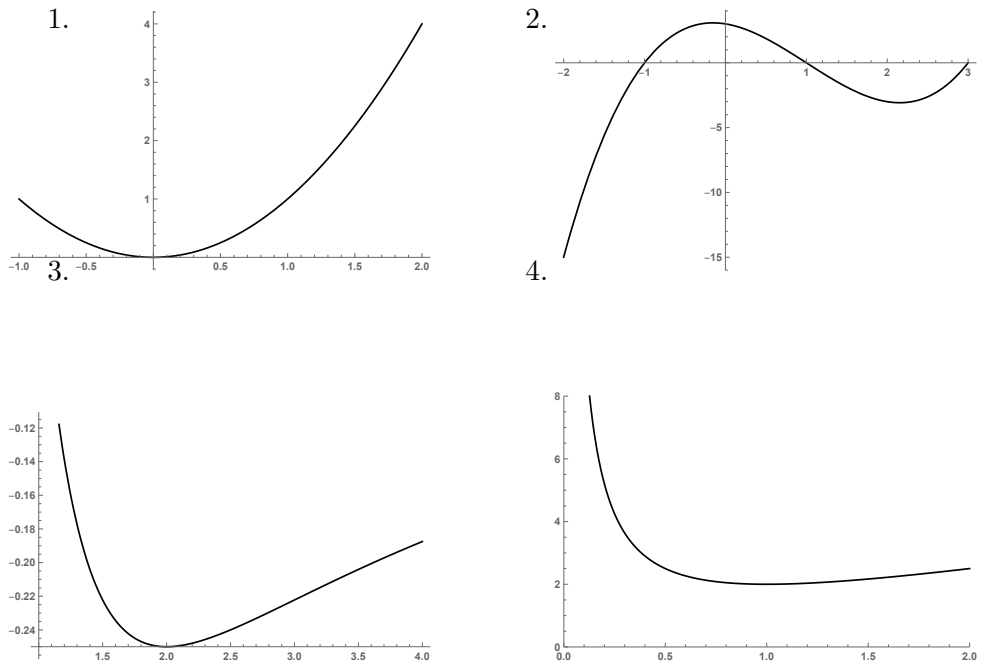


Figura 9.5: Grafici delle funzioni degli esempi di §9.4.

Esempi:

1. Si trovino massimi e minimi assoluti di $f(x) = x^2$, $x \in [-1, 2]$.
2. Si trovino massimi e minimi assoluti di $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$, $x \in [-2, 3]$.
3. Si trovino massimi e minimi assoluti di $f(x) = -1/x + 1/x^2$, $x \in [1, 4]$.
4. Si trovino massimi e minimi assoluti di $f(x) = (1/x) + x$, $x \in (0, 2]$.

Soluzioni:

1. C'è un solo punto stazionario interno: $x = 0$; si ha $f(-1) = 1$, $f(0) = 0$, $f(2) = 4$ (cfr. la Figura 9.5) $\Longrightarrow \max f(x) = f(2) = 4$, $\min f(x) = f(0) = 0$.

2. Ci sono due punti stazionari: $x = 1 \pm 2/\sqrt{3}$; si ha $f(1 - 2/\sqrt{3}) \approx 3.0792$, $f(1 + 2/\sqrt{3}) \approx -3.0792$, $f(-2) = -15$, $f(3) = 0$ (cfr. la Figura 9.5) $\Longrightarrow \max f(x) = f(1 - 2/\sqrt{3})$, $\min f(x) = f(-2)$.
3. C'è un solo punto stazionaro: $x = 2$; si ha $f(1) = 0$, $f(2) = -1/2$, $f(4) = -3/16$ (cfr. la Figura 9.5) $\Longrightarrow \max f(x) = f(1)$, $\min f(x) = f(2)$.
4. C'è un solo punto stazionario: $x = 1$; si ha $f(x) \to +\infty$ per $x \to 0^+$, $f(1) = 2$, $f(2) = 5/2$ (cfr. la Figura 9.5) $\Longrightarrow \min f(x) = f(1) = 2$, mentre non esiste massimo (si noti infatti che $(0, 2]$ è aperto a sinistra).

9.4 Primo studio del grafico di una funzione

In base ai risultati ottenuti finora possiamo tracciare un primo schema da seguire per lo studio del grafico di una funzione $f(x)$:

1. Determinare il dominio D_f della funzione.
2. Studiare l'andamento della funzione agli estremi del dominio; in particolare studiare l'esistenza di eventuali asintoti obliqui od orizzontali o verticali.
3. Determinare – se esistono e se possibile – i punti in cui il grafico attraversa gli assi x e y.
4. Calcolare la derivata prima $f'(x)$.
5. Determinare i punti stazionari, cioè i punti in cui la derivata prima si annulla.
6. Studiare il segno della derivata prima, per individuare gli intervalli in cui la funzione è crescente e gli intervalli in cui essa è decrescente, e determinare di conseguenza i punti estremali (massimi e minimi relativi) e i punti di flesso.
7. Calcolare – se non troppo complicato – la funzione nei punti stazionari, e individuare nel piano cartesiano i punti del grafico della funzione in corrispondenza di essi.
8. Completare il grafico della funzione utilizzando le informazioni sugli intervalli in cui la funzione è cescente o decrescente.

Osservazioni:

1. A seconda dei valori di $f'(x)$ nell'intorno di un punto stazionario x_0 si ha la situazione descritta dalla seguente tabella:

$$\begin{array}{ccccc} x < x_0 & x = x_0 & x > x_0 & & \\ & & & & \\ + & 0 & - & \Longrightarrow & \text{massimo,} \\ - & 0 & + & \Longrightarrow & \text{minimo,} \\ + & 0 & + & \Longrightarrow & \text{flesso,} \\ - & 0 & - & \Longrightarrow & \text{flesso,} \end{array}$$

dove $+$ indica $f'(x) > 0$, 0 indica $f'(x) = 0$ e $-$ indica $f'(x) < 0$.

2. La sola informazione che la funzione sia crescente o decrescente in un intervallo non consente che di disegnare suo grafico in modo approssimativo. Vedremo al §9.7 come raffinare lo studio del grafico attraverso lo studio della derivata seconda, una volta che siano state introdotte le nozioni di funzione convessa e di funzione concava.

Esempi (cfr. la Figura 9.6):

1. $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x^2 - 1)(x - 2)$;
2. $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$;
3. $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$;
4. $(x^2 - 1)/x$.

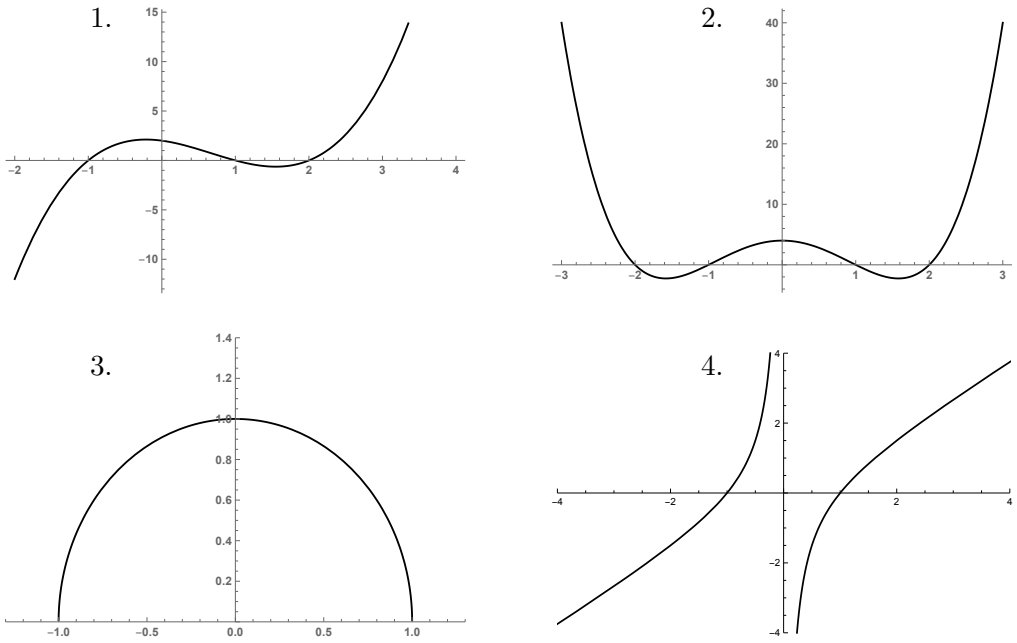


Figura 9.6: Grafici delle funzioni degli esempi di §9.2.

Soluzioni:

1. Il dominio è $D_f = \mathbb{R}$. Si ha $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. Non esistono asintoti. Si ha inoltre $f(x) = 0$ per $x = -1$, $x = 1$ e $x = 2$, e $f(0) = 2$. Poiché $f'(x) = 3x^2 - 4x - 1$, si ha $f'(x) = 0$ per $x = 2 \pm \sqrt{7}$, $f'(x) > 0$ per $x > 2 + \sqrt{7}$ e $x < 2 - \sqrt{7}$, e $f'(x) < 0$ per $x \in (2 - \sqrt{7}, 2 + \sqrt{7})$: quindi la funzione è crescente in $(-\infty, 2 - \sqrt{7})$, ha un punto di massimo relativo stretto in $x = 2 - \sqrt{7}$, è decrescente in $(2 - \sqrt{7}, 2 + \sqrt{7})$, ha un punto di minimo relativo stretto in $x = 2 + \sqrt{7}$, ed è di nuovo crescente in $(2 + \sqrt{7}, +\infty)$. Il grafico è rappresentato in Figura 9.6.
2. Il dominio è $D_f = \mathbb{R}$. La funzione è pari. Si ha $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$. Non esistono asintoti. Si ha $f(x) = 0$ per $x = \pm 1$ e $x = \pm 2$, e $f(0) = 4$. La derivata prima è

$f'(x) = 4x^3 - 10x = 2x(2x^2 - 5)$: si annulla per $x = 0$ e $x = \pm\sqrt{5/2}$, ha segno positivo per $x \in (-\sqrt{5/2}, 0) \cup (\sqrt{5/2}, +\infty)$ e ha segno negativo per $x \in (-\infty, -\sqrt{5/2}) \cup (0, \sqrt{5/2})$. Ne segue che la funzione è decrescente in $(-\infty, -\sqrt{5/2})$, ha un punto di minimo relativo stretto in $x = -\sqrt{5/2}$, è crescente in $(-\sqrt{5/2}, 0)$, ha un punto di massimo relativo stretto in $x = 0$, è decrescente in $(0, \sqrt{5/2})$, ha un punto di minimo relativo stretto in $x = \sqrt{5/2}$, ed è di nuovo crescente in $(\sqrt{5/2}, +\infty)$. Il grafico è rappresentato in Figura 9.6.

3. Il dominio è $D_f = [-1, 1]$. La funzione si annulla agli estremi. La derivata prima, data da $f'(x) = -x/\sqrt{1/x^2}$, è positiva per $x \in (-1, 0)$, si annulla per $x = 0$ ed è negativa per $x \in (0, 1)$: la funzione ha un punto di massimo in $x = 0$, dove assume il valore $f(0) = 1$, è crescente in $[-1, 0]$ e decrescente in $[0, 1]$. Il grafico è rappresentato in Figura 9.6: di fatto, è una semicirconferenza, come si vede notando che $y \geq 0$ e $y^2 = 1 - x^2$, ovvero $x^2 + y^2 = 1$.
4. Il dominio è $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. La funzione ha un asintoto obliquo $y = x$ sia per $x \to +\infty$ che per $x \to -\infty$, e un asintoto verticale in $x = 0$: si ha infatti $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$. Si ha infine $f'(x) = 1 + 1/x^2 > 0$: la funzione è crescente in tutto il dominio. Il grafico è rappresentato in Figura 9.6.

9.5 Studio della derivata seconda

Teorema 9.16. *Sia f una funzione di classe C^2 in $[a, b]$, e sia $x_0 \in (a, b)$ un punto stazionario di f (i.e. $f'(x_0) = 0$). Se $f''(x_0) > 0$ allora x_0 è un punto di minimo, se $f''(x_0) < 0$ allora x_0 è un punto di massimo.*

Esempi (cfr. la Figura 9.7):

1. $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4$;
2. $f(x) = \sin x + \cos x$;
3. $f(x) = x^3 - 2x + 1$;
4. $f(x) = x^3 - 2x + 1$.

Osservazione: Se $f''(x_0) = 0$ non possiamo concludere nulla. Per esempio, se si considerano le funzioni $f(x) = x^4$, $f(x) = x^3$ e $f(x) = -x^4$, si ha in tutti e tre i casi $f'(0) = f''(0) = 0$, tuttavia $x = 0$ è un punto di minimo per x^4, un punto di flesso orizzontale per x^3 e un punto di massimo per $-x^4$, come si vede dalla discussione nel §9.2.

Complementi (∗):

1. *Dimostrazione del Teorema 9.16.* Supponiamo $f''(x_0) < 0$. Poiché $f''(x)$ è continua esiste $\delta > 0$ tale che $f''(x) < 0\ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, per il Teorema 6.6 (teorema della permanenza del segno). Quindi in tale intorno $f'(x)$ è strettamente decrescente. Poiché $f'(x_0) = 0$ si ha $f'(x) > 0$ per $x_0 - \delta < x < x_0$ e $f'(x) < 0$ per $x_0 < x < x_0 + \delta$. Per il Teorema 9.13 concludiamo che x_0 è un punto di massimo. Se invece $f''(x_0) > 0$ si ragiona allo stesso modo utilizzando alla fine il Teorema 9.14.

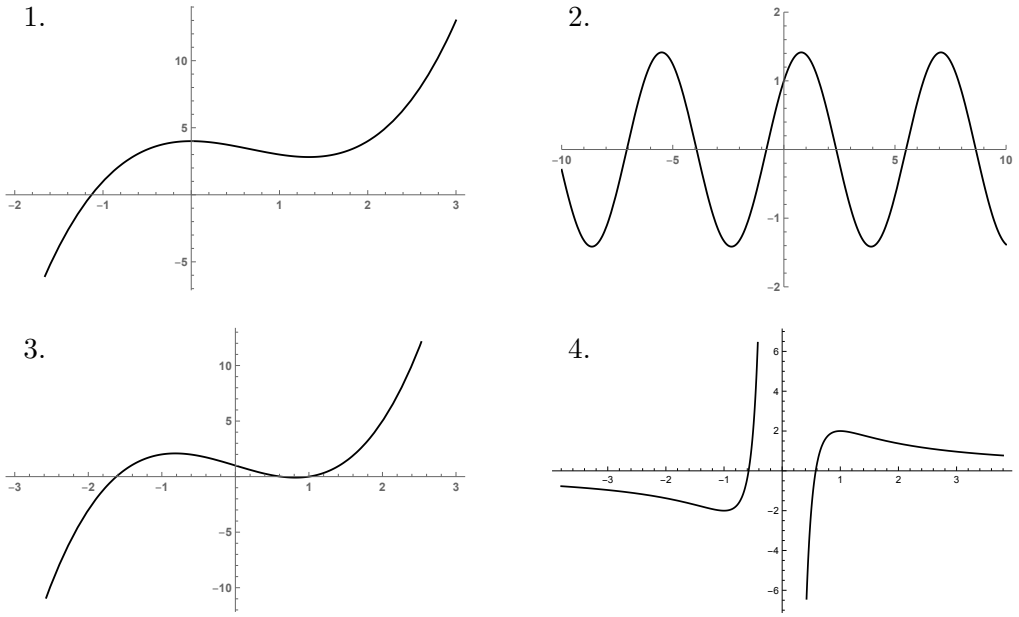


Figura 9.7: Grafici delle funzioni degli esempi di §9.3.

2. *Generalizzazione del Teorema 9.16.* Nel caso in cui la derivata seconda si annulli, si può determinare ugualmente se il punto stazionario è un punto di massimo o di minimo o di flesso andando a guardare la prima derivata di ordine superiore che non si annulli in x_0. Se tale derivata è di ordine dispari, allora x_0 è un punto di flesso orizzontale; se invece la derivata è di ordine pari, allora x_0 è un punto estremale: un punto di massimo relativo se la derivata è negativa, un punto di minimo relativo se la derivata è positiva. Per esempio, nei casi considerati nell'osservazione sopra, per le funzioni x^4 e $-x^4$ la prima derivata che non si annulla in $x = 0$ è la quarta ed è positiva per x^4 e negativa per $-x^4$ (in $x = 0$ la prima funzione ha un punto di minimo, la seconda ha un punto di massimo), mentre per la funzione x^3 (che ha un punto di flesso orizzontale in $x = 0$) la prima derivata non nulla in $x = 0$ è la terza.

9.6 Funzioni convesse e funzioni concave

Definizione 9.17. *Sia f una funzione continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b). Si dice che f è* convessa *in $[a, b]$ se tutti punti $(x, f(x))$, al variare di $x \in [a, b]$, si trovano al di sopra di una qualsiasi retta tangente al grafico. Si dice che f è* concava *in $[a, b]$ se tutti punti $(x, f(x))$ si trovano al di sotto di una qualsiasi retta tangente al grafico.*

Teorema 9.18. *Sia f continua in $[a, b]$ e derivabile due volte in (a, b). Se $f''(x) > 0$ $\forall x \in [a, b]$ allora la funzione f è convessa in $[a, b]$.*

Teorema 9.19. *Sia f continua in $[a, b]$ e derivabile due volte in (a, b). Se $f''(x) < 0$ $\forall x \in [a, b]$ allora la funzione f è concava in $[a, b]$.*

Esempi:

1. $f(x) = x^2$ e $f(x) = a^x$, $a > 0$ (quindi in particolare e^x), sono convesse in $\mathbb{R}$.
2. $f(x) = x^\alpha$, $\alpha > 1$ è convessa in $\mathbb{R}_+$.
3. $f(x) = x^\alpha$, $\alpha < 1$ è concava in $\mathbb{R}_+$.
4. $f(x) = \log_a x$, con $a > 1$, è concava in $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$.
5. $f(x) = \log_a x$, con $0 < a < 1$, è convessa in $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$.
6. $f(x) = x^3$ è convessa per $x \geq 0$ e concava per $x \leq 0$.

Osservazioni:

1. Se f è convessa, allora $-f$ è concava.
2. Una funzione può essere concava e convessa in differenti intervalli. Per esempio la funzione $f(x) = x^3$ ha derivata seconda $f''(x) = 6x$ ed è quindi convessa in $(0, +\infty)$, dove $f''(x) > 0$, e convaca in $(-\infty, 0)$, dove $f''(x) < 0$. Analogamente, la funzione $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$ dell'esempio 4 del §9.4 è convessa in $[1, 3]$ e concava in $[-2, 1]$; infatti si ha $f'(x) = 3x^2 - 6x - 1$ e quindi $f''(x) = 6(x - 1) \Longrightarrow f''(x) > 0$ per $x > 1$ e $f''(x) < 0$ per $x < 1$.

Se la concavità di una funzione di classe C^2 cambia, come nell'esempio dell'osservazione sopra, vuol dire che la derivata seconda cambia segno e quindi che ci sono punti x in cui $f''(x) = 0$.

Definizione 9.20. *Sia f una funzione continua in $[a, b]$ e derivabile due volte in (a, b). Se $\exists x_0 \in [a, b]$ tale che $f''(x_0) = 0$ e $f''(x)$ cambia di segno passando per $x = x_0$, diciamo che x_0 è un* punto di flesso. *Se inoltre $f'(x_0) = 0$ diciamo che x_0 è un* punto di flesso orizzontale, *mentre se $f'(x_0) \neq 0$ diciamo che x_0 è un* punto di flesso obliquo.

Esempi:

1. $f(x) = x^3$ ha un punto di flesso orizzontale in $x = 0$: infatti $f'(x) = 3x^2$ e $f''(x) = 6x$.
2. $f(x) = x^3 + x$ ha un punto di flesso obliquo in $x = 0$: si ha infatti $f'(x) = 3x^2 + 1$ e $f''(x) = 6x$ (cfr. la Figura 9.8).
3. $f(x) = \sin x$ ha punti di flesso obliquo in tutti i punti in cui si annulla: infatti $f'(x) = \cos x$ e $f''(x) = -\sin x$; analogamente $f(x) = \cos x$ ha punti di flesso obliquo in tutti i punti in cui si annulla.
4. $f(x) = e^{-x^2}$ ha punti di flesso obliquo in $x = \pm 1/\sqrt{2}$, è convessa per $|x| > 1/\sqrt{2}$ e concava per $|x| < 1/\sqrt{2}$. Infatti $f'(x) = -2x\, e^{-x^2}$ e $f''(x) = (4x^2 - 2)\, e^{-x^2}$ (cfr. la Figura 9.8).

Osservazione: La Definizione 9.20 coincide con la Definizione 9.15 per i punti di flesso orizzontale, come è facile verificare.

Complementi (∗):

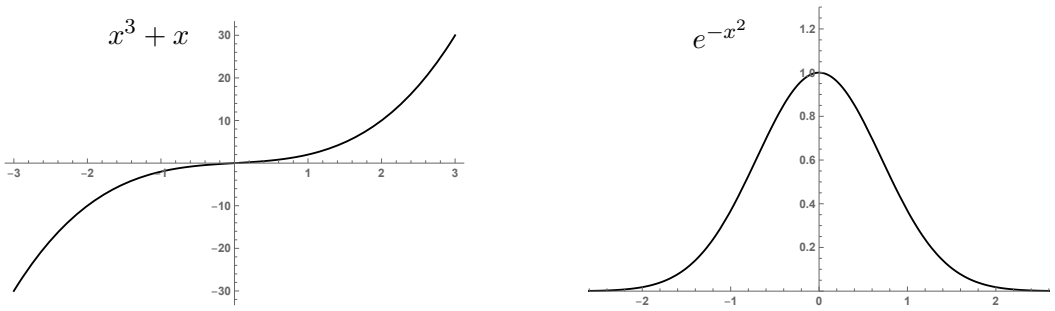


Figura 9.8: Grafici delle funzioni $f(x) = x^3 + x$ e $f(x) = e^{-x^2}$.

1. *Dimostrazione del Teorema 9.18.* Si fissi $x_0 \in [a, b]$: l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$ è $y = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0)$ (cfr. l'Osservazione 2 di pag. 115). La differenza tra il valore $f(x)$ e il punto della retta che corrisponde all'ascissa x è data da
$$f(x) - \big[f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0)\big]\,.$$
Utilizzando il teorema 8.3 (di Lagrange) si trova quindi
$$\begin{aligned} f(x) - \big[f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0)\big] &= [f(x) - f(x_0)] - f'(x_0)\,(x - x_0) \\ &= f'(\xi)\,(x - x_0) - f'(x_0)\,(x - x_0) = (f'(\xi) - f'(x_0))\,(x - x_0), \end{aligned}$$
per un opportuno ξ compreso tra x_0 e x. Riapplicando il teorema di Lagrange si trova
$$f(x) - \big[f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0)\big] = f''(\xi_1)(\xi - x_0)(x - x_0)$$
per un opportuno ξ_1 compreso tra x_0 e ξ. Se $x > x_0$ allora $x_0 < \xi < x$, mentre se $x < x_0$ si ha $x < \xi < x_0$: di conseguenza $(\xi - x_0)(x - x_0) > 0$. Dal momento che $f''(\xi_1) > 0$ per ipotesi, $f(x)$ si trova al di sopra della retta tangente e quindi la funzione f è convessa. ■

2. *Dimostrazione del Teorema 9.19.* Si ragiona allo stesso modo del Teorema 9.18. ■

9.7 Schema per lo studio del grafico di una funzione

Utilizzando gli ultimi risultati possiamo raffinare lo schema da seguire per lo studio di una funzione $f(x)$ rispetto a quanto visto nel §9.4:

1. Determinare il dominio D_f della funzione
2. Determinare l'andamento della funzione agli estremi del dominio, in particolare studiare l'esistenza di eventuali asintoti obliqui od orizzontali o verticali.
3. Determinare – se esistono e se possibile – i punti in cui la funzione $f(x)$ attraversa l'asse x, cioè i punti $\bar{x}$ tali che $f(\bar{x}) = 0$, e – se esiste e se possibile – il punto in cui attraversa l'asse y, cioè il valore $f(0) = 0$.

4. Calcolare la derivata prima $f'(x)$
5. Determinare i punti stazionari di f, cioè i punti $\bar{x}$ tali che $f'(\bar{x}) = 0$.
6. Calcolare la derivata seconda $f''(x)$.
7. Studiare il segno della derivata seconda nei punti stazionari $\bar{x}$ per individuare i punti di minimo relativo (se $f''(\bar{x}) > 0$) e di massimo relativo (se $f''(\bar{x}) < 0$).
8. Alternativamente se $f''(\bar{x}) \neq 0$ e obbligatoriamente se $f''(\bar{x}) = 0$, studiare il segno della derivata prima in un intorno di $\bar{x}$ per determinare se $\bar{x}$ è un punto di minimo (ovvero se $f'(x) < 0$ per $x < \bar{x}$ e $f'(x) > 0$ per $x > \bar{x}$) o se è un punto di massimo (ovvero se $f'(x) > 0$ per $x < \bar{x}$ e $f'(x) < 0$ per $x > \bar{x}$) o infine se è un punto di flesso orizzontale (ovvero se $f'(x)$ ha sempre lo stesso segno in un intorno di $\bar{x}$ tranne che in $\bar{x}$, dove si annulla).
9. Studiare in ogni caso il segno della derivata prima $f'(x)$ per determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente e gli intervalli in cui è decrescente.
10. Studiare il segno della derivata seconda $f''(x)$ per determinare gli intervalli in cui la funzione è convessa e gli intervalli in cui è concava
11. Calcolare la funzione nei punti stazionari, e riportare – se non troppo complicato – nel piano cartesiano i punti del grafico della funzione in corrispondenza di tali punti stazionari.
12. Completare il grafico della funzione utilizzando le informazioni sugli intervalli in cui la funzione è cescente o decrescente.

Osservazioni:

1. Se calcolare la derivata seconda risulta troppo laborioso, può essere più comodo determinare se il punto stazionario $\bar{x}$ è un punto di massimo o di minimo relativo studiando il segno di $f'(x)$ in un intorno di $\bar{x}$, come indicato al punto 8.
2. L'ordine in cui studiare i vari punti elencati sopra non è tassativo: per esempio, dal momento, che lo studio della derivata prima è comunque necessario per studiare dove la funzione è crescente e dove è decrescente, il punto 9 può essere studiato subito dopo il punto 4.
3. Analogamente, il punto 3 può essere studiato all'inizio, soprattutto se risulta semplice; lo si può invece del tutto omettere se risulta eccessivamente laborioso.
4. Anche il punto 11, se risulta poco utile, può essere ignorato.
5. Se la funzione $f(x)$ è definita ma non è derivabile in qualche punto, quando si cercano i punti di massimo e di minimo occorre prendere in considerazione, oltre ai punti stazionari e agli estremi degli intervalli che costituiscono il dominio, anche i punti in cui la funzione non è derivabile (cfr. l'osservazione 4 a pag. 141).
6. Calcolare esplicitamente il valore della funzione in alcuni punti significativi, quali per esempio i punti estremali, è utile per avere una rappresentazione il più accurata possibile del grafico, ma non è strettamente indispensabile.

9.8 Esercizi

1. Si studi il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{2x}{x^2-4}$.
2. Si studi il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{(1+x)^2}$.
3. Si studi il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{e^{2x+1}}{x^2}$.
4. Si studi il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{x^3+x^2+1}{x^2+1}$.
5. Si studi il grafico della funzione $f(x) = x\,e^{-x^2}$.
6. Si studi il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{x^2+3x-1}{x+2}$.
7. Si studi il grafico della funzione $f(x) = e^{-|x|}(x^2+4)$.
8. Si studi il grafico della funzione $f(x) = e^{-|x|}|x^2-1|$.
9. Si studi il grafico della funzione $f(x) = (2-x)\,e^{-x^2+2x+1}$.
10. Si studi il grafico della funzione $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3}{x+3}}$.
11. Si studi il grafico della funzione $f(x) = \ln\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$.
12. Si studi il grafico della funzione $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}$.
13. Si studi il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{-1+(x+2)^2}{x}$.
14. Si studi il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{x^4}{x^2-1}$.
15. Si studi il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x+2}$.
16. Si studi il grafico della funzione $f(x) = e^{x+\ln x^2}$.
17. Si studi il grafico della funzione $f(x) = x\,e^{-1/x^2}$.
18. Si studi il grafico della funzione $f(x) = \ln\left(x^2-3x+2\right)$.
19. Si studi il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{4x+2}$.
20. Si studi il grafico della funzione $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^4+1}{x^2}}$.
21. Si studi il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$.

22. Si studi il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{x^2+2-x}{x^2+1-x}$.
23. Si studi il grafico della funzione $f(x) = e^{x^2-x+1}$.
24. Si studi il grafico della funzione $f(x) = \sqrt{x^2+x+1}$.
25. Si studi il grafico della funzione $f(x) = (x-2)^{2/3} + (x-4)^{2/3}$.
26. Si studi il grafico della funzione $f(x) = \sqrt{x^3-4x}$.
27. Si studi il grafico della funzione $f(x) = \ln(3+x^2) - \ln x^2$.
28. Si studi il grafico della funzione $f(x) = x^4 - x^2 - \ln(1+x^2)$.
29. Si studi il grafico della funzione $f(x) = \left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^2$.
30. Si studi il grafico della funzione $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2-4}{x^2+4}}$.

Soluzioni:

1. Il dominio della funzione
$$f(x) = \frac{2x}{x^2-4}$$
è $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \pm 2\} = (-\infty,-2) \cup (-2,2) \cup (2,+\infty)$. Si ha $f(x) = 0$ se e solo se $x = 0$: quindi $f(x)$ interseca gli assi coordinati solo nell'origine. La funzione $f(x)$ è positiva quando $x > 0$ e $x^2 > 4$ oppure $x < 0$ e $x^2 < 4$: quindi $f(x) > 0$ per $x \in (-2,0) \cup (2,+\infty)$ e $f(x) < 0$ per $x \in (-\infty,-2) \cup (0,2)$; cfr. la Figura 9.9.

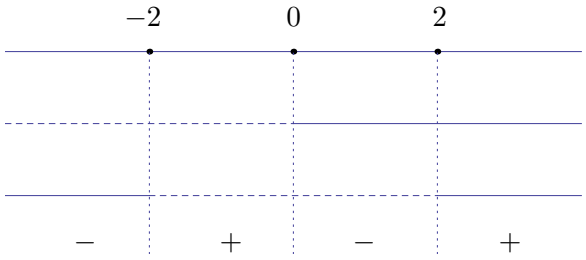


Figura 9.9: Studio del segno della funzione dell'esercizio 1.

Si ha
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{x^2\left(1-\dfrac{4}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{x} = 0^{\pm},$$
dove $0^{\pm}$ significa che la funzione tende a zero da valori positivi se $x \to +\infty$ e da valori negativi se $x \to -\infty$. Inoltre, per $x \to \pm 2$, la funzione diverge: tenendo conto del segno

del numeratore e del denominatore si vede che $f(x)$ tende a $+\infty$ quando $x \to 2^+$ oppure $x \to -2^+$, mentre tende a $-\infty$ quando $x \to 2^-$ oppure $x \to -2^-$. Si ha pertanto

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0^-, \qquad \lim_{x\to-2^-} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to-2^+} f(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x\to2^-} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to2^+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0^+.$$

Ne concludiamo che la funzione ha un asintoto orizzontale $y = 0$ per $x \to \pm\infty$ e ha due asintoti verticali in $x = -2$ e in $x = 2$. La derivata di $f(x)$ è

$$f'(x) = \frac{2(x^2-4) - (2x)^2}{(x^2-4)^2} = -\frac{2(x^2+4)}{(x^2-4)^2}.$$

Per studiare il segno di $f'(x)$ si noti che il denominatore è sempre positivo (quando è definito, i.e. per $x \neq \pm 2$), quindi $f'(x) < 0\ \forall x \in D_f$: ne segue che la funzione è strettamente decrescente su tutto il dominio. La derivata seconda di $f(x)$ è

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\frac{2(2x)(x^2-4)^2 - 2(x^2+4)2(x^2-4)2x}{(x^2-4)^2} = \frac{-4x(x^2-4) + 8x(x^2+4)}{(x^2-4)^3} \\ &= \frac{4x\left(2(x^2+4) - (x^2-4)\right)}{(x^2-4)^3} = \frac{4x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}. \end{aligned}$$

Poiché $x^2 + 12 > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$, si ha: (a) $f''(x) = 0$ se e solo se $x = 0$, (b) $f''(x) > 0$ se $x > 0$ e $x^2 - 4 > 0$ oppure se $x < 0$ e $x^2 - 4 > 0$, (c) $f''(x) < 0$ nei casi restanti (i.e. se $x > 0$ e $x^2 - 4 < 0$ oppure se $x < 0$ e $x^2 - 4 > 0$); cfr. la Figura 9.10.

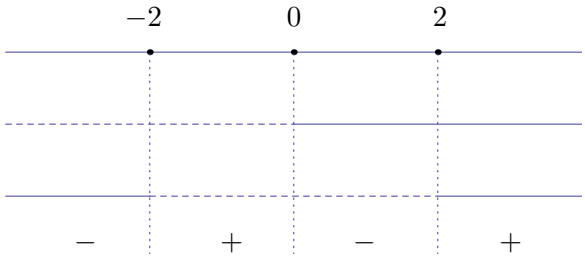


Figura 9.10: Studio del segno della derivata seconda della funzione dell'esercizio 1.

La funzione ha quindi in $x = 0$ un punto di flesso obliquo (poiché $f'(0) = -1/2 \neq 0$), è convessa quando $f''(x) > 0$ e quindi per $x \in (-2, 0) \cup (2, +\infty)$ ed è concava quando $f''(x) < 0$ e quindi per $x \in (-\infty, -2) \cup (0, +2)$. In particolare la funzione $f(x)$ è convessa dove è positiva e concava dove è negativa. Il grafico della funzione $f(x)$ è rappresentato in Figura 9.11.

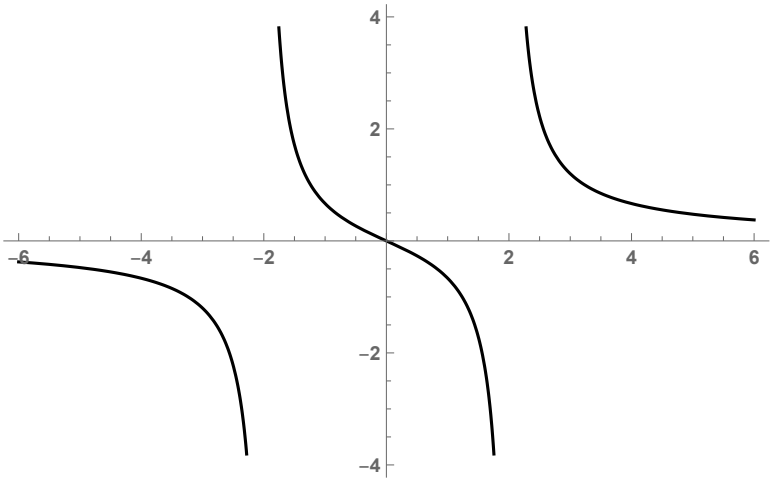


Figura 9.11: Grafico della funzione dell'esercizio 1.

2. Il dominio della funzione
$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{(1+x)^2}$$
è $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x > -1\} = (-1, +\infty)$, poiché il denominatore è diverso da 0 per $x \neq -1$ e il logaritmo è definito per $x > -1$. Il denominatore è sempre positivo (quando definito), quindi $f(x) = 0$ se e solo se $x = 0$ (poiché $\ln(1+x) = \ln 1 = 0$ per $x = 0$): quindi f interseca gli assi coordinati solo nell'origine. La funzione f è positiva quando $\ln(1+x) > 0$, quindi per $x > 0$, e negativa quando $\ln(1+x) < 0$, quindi per $x \in (-1, 0)$. Si ha
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{1+x}}{2(1+x)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{(1+x)^2} = 0,$$
dove si è applicato il teorema di de l'Hôpital per calcolare il limite del rapporto delle due funzioni $\ln(1+x)$ e $(1+x)^2$ (che divergono entrambe per $x \to +\infty$). Si trova inoltre
$$\lim_{x\to-1^+} f(x) = -\infty,$$
poiché, per $x \to -1^+$, il numeratore $\ln(1+x)$ tende a $-\infty$ e il denominatore è positivo e tende a 0. Quindi la funzione ha un asintoto orizzontale $y = 0$ per $x \to +\infty$ e un asintoto verticale in $x = -1$. La derivata di $f(x)$ è
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{1}{1+x}(1+x)^2 - 2(1+x)\ln(1+x)}{(1+x)^4} \\ &= \frac{1-2\ln(1+x)}{(1+x)^3}, \end{aligned}$$
dove $(1+x)^3 > 0$ per $x > -1$. Quindi $f'(x) = 0$ quando
$$2\ln(1+x) = 1 \iff \ln(1+x) = \frac{1}{2} \iff 1+x = e^{1/2} = \sqrt{e} \iff x = x_0 := \sqrt{e} - 1.$$

Poiché il logaritmo è una funzione crescente si ha $\ln(x+1) > 1/2$ per $x > x_0$ e $\ln(1+x) < 1/2$ per $x < x_0$. Ne segue che $f'(x) > 0$ per $x \in (-1, x_0)$ e $f'(x) < 0$ per $x \in (x_0, +\infty)$; in $x = x_0$ la funzione $f(x)$ ha un punto di massimo e si ha

$$f(x_0) = \frac{\ln(1+x_0)}{(1+x_0)^2} = \frac{1/2}{(1+\sqrt{e}-1)^2} = \frac{1}{2e} > 0.$$

La derivata seconda di $f(x)$ è

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-\dfrac{2}{1+x}(1+x)^3 - 3(1+x)^2\,(1-2\ln(1+x))}{(1+x)^6} \\ &= \frac{6\ln(1+x)-5}{(1+x)^4}. \end{aligned}$$

Poiché $(1+x)^4 > 0\ \forall x > -1$, si ha:

(a) $f''(x) = 0$ se e solo se

$$6\ln(1+x) = 5 \iff \ln(1+x) = \frac{5}{6} \iff 1+x = e^{5/6} \iff x = x_1 := e^{5/6} - 1,$$

(b) $f''(x) > 0$ se $x > x_1$,

(c) $f''(x) < 0$ se $x < x_1$.

Si noti che $x_1 > x_0$, poiché $5/6 > 1/2$ e quindi $e^{5/6} > \sqrt{e}$. La funzione ha quindi in $x = x_1$ un punto di flesso obliquo (poiché $f'(x_1) \neq 0$), è convessa ($f''(x) > 0$) per $x \in (x_1, +\infty)$ ed è concava ($f''(x) < 0$) per $x \in (-1, x_1)$. Il grafico della funzione $f(x)$ è rappresentato in Figura 9.12.

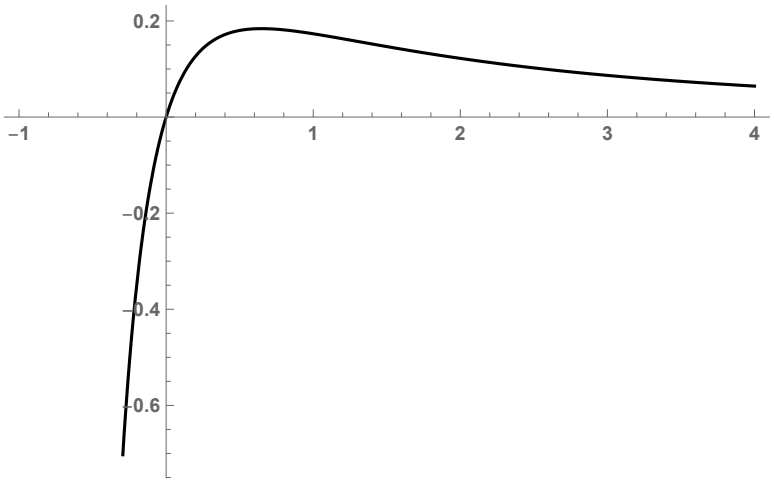


Figura 9.12: Grafico della funzione dell'esercizio 2.

3. Il dominio delle funzione

$$f(x) = \frac{e^{2x+1}}{x^2}$$

è $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, poiché il denominatore non si deve annullare (quindi $x \neq 0$) e l'esponenziale è definito per ogni valore del suo argomento. La funzione $f(x)$ è positiva per ogni x per cui è definita, poiché sia l'esponenziale sia il quadrato sono funzioni sempre positive. Si ha, applicando due volte il teorema di de l'Hôpital,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2e^{2x+1}}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4e^{2x+1}}{2} = +\infty,$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2e^{2x+1}}{2x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{4e^{2x+1}}{2} = 0^+.$$

Si trova inoltre

$$\lim_{x\to0^\pm} f(x) = \lim_{x\to0^\pm} \frac{e}{x^2} = +\infty,$$

poiché il numeratore e^{2x+1} tende a $e^{0+1} = e^1 = e$ per $x \to 0$ (e quindi ha limite finito), mentre x^2 tende a 0. La funzione $f(x)$ ha perciò un asinitoto orizzontale $y = 0$ per $x \to -\infty$ e un asintoto verticale in $x = 0$. Si vede facilmente, sempre attraverso il teorema di de l'Hôpital, che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2e^{2x+1}}{3x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4e^{2x+1}}{6x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{8e^{2x+1}}{6} = +\infty,$$

quindi non esistono asintoti né orizzontali né obliqui a $+\infty$. La derivata di $f(x)$ è

$$f'(x) = \frac{2e^{2x+1}(x-1)}{x^3},$$

quindi $f'(x) = 0$ se e solo se $x = 1$, mentre $f'(x) > 0$ se $x > 1$ e $x > 0$ oppure se $x < 1$ e $x < 0$. In conclusione $f'(x) > 0$ per $x < 0$ oppure $x > 1$ e $f'(x) < 0$ per $0 < x < 1$: quindi $f(x)$ è crescente per $x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ ed è decrescente per $x \in (0, 1)$; cfr. la Figura 9.31. In $x = 1$ la funzione ha un punto di minimo, tale che $f(1) = e^3$.

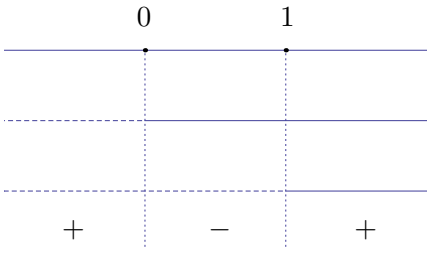


Figura 9.13: Studio del segno della derivata prima della funzione dell'esercizio 3.

La derivata seconda di $f(x)$ è

$$f''(x) = \frac{4\left(2e^{2x+1}(x-1) + e^{2x+1}\right)x^3 - 2e^{2x+1}(x-1)(3x^2)}{x^6}$$
$$= \frac{2e^{2x+1}(2x^2-4x+3)}{x^4}.$$

Poiché $x^4 > 0\ \forall x \neq 0$, il segno di $f''(x)$ è determinato da $g(x) := 2x^2 - 4x + 3$. L'equazione di secondo $g(x) = 0$ non ammette radici reali poiché il discrimante è $\Delta = 4^2 - 4\cdot 6 = -8 < 0$; poiché il coefficiente di x^2 è positivo (vale 2), di ha quindi $g(x) > 0$. In conclusione $f''(x) > 0\ \forall x \in D_f$, quindi la funzione $f(x)$ è sempre convessa. Il grafico della funzione $f(x)$ è rappresentato in Figura 9.14.

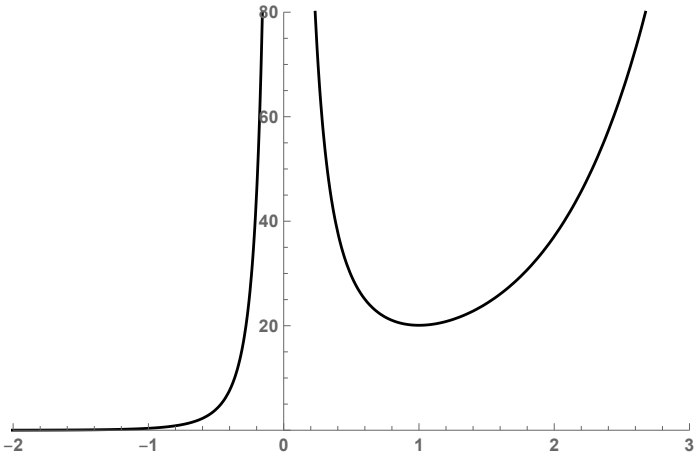


Figura 9.14: Grafico della funzione dell'esercizio 3.

4. La funzione

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 + 1}{x^2 + 1}$$

è il rapporto di due polinomi; poiché $x^2 + 1 > 0$, il dominio di f è $D_f = \mathbb{R}$. Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}\right)}{x^2\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} x = \pm\infty,$$

quindi la funzione diverge per $x \to \pm\infty$. Per studiare l'esistenza di eventuali asintoti obliqui, della forma $y = ax + b$, si calcola innanzitutto il limite

$$a := \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^3} = 1.$$

Poiché il limite $a = 1$ è finito si calcola successivamente il limite

$$b := \lim_{x\to+\infty}(f(x)-x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+x^2+1-x-x^3}{x^2+1}$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x+1}{x^2+1} = \frac{x^2\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2} = 1.$$

Quindi, sia per $x \to +\infty$ che per $x \to -\infty$, si ha un asintoto obliquo definito dall'equazione $y = x + 1$. La derivata di $f(x)$ è

$$f'(x) = \frac{(3x^2+2x)(x^2+1)-(x^3+x^2+1)2x}{(x^2+1)^2}$$
$$= \frac{3x^4+2x^3+3x^2+2x-2x^4-2x^3-2x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2}.$$

Si ha $f'(x) = 0$ per $x = 0$, mentre $f(x) > 0\ \forall x \neq 0$: la funzione f è crescente per ogni $x \in \mathbb{R}$ (e strettamente crescente per $x \neq 0$). La derivata seconda di $f(x)$ è

$$f''(x) = \frac{(4x^3+6x)(x^2+1)^2-(x^4+3x^2)4x(x^2+1)}{(x^2+1)^4}$$
$$= \frac{(4x^3+6x)(x^2+1)-4x(x^4+3x^2)}{(x^2+1)^3}$$
$$= \frac{2x(3-x^2)}{(x^2+1)^3}.$$

Poiché $1 + x^2 > 0\ \forall x \neq 0$, il segno di $f''(x)$ è positivo se $x > 0$ e $3 - x^2 > 0$ (ovvero $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$) oppure $x < 0$ e $3 - x^2 < 0$ (ovvero $x < -\sqrt{3}$ o $x > \sqrt{3}$), ed è negativo altrimenti; cfr. la Figura 9.37. Ne segue che $f''(x) > 0$ (e quindi $f(x)$ è convessa) se $x \in (0, \sqrt{3}) \cup (-\infty, -\sqrt{3})$, mentre $f''(x) < 0$ (e quindi $f(x)$ è concava) se $x \in (-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$;

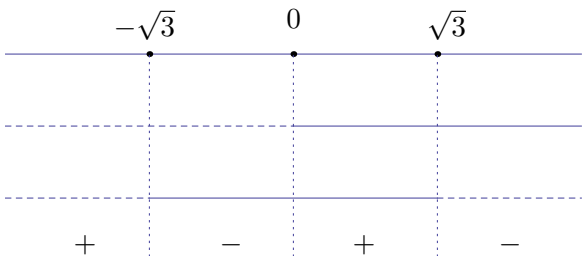


Figura 9.15: Studio del segno della derivata seconda della funzione dell'esercizio 4.

Il grafico della funzione $f(x)$ è rappresentato in Figura 9.16. Osservando il grafico si nota che il grafico della funzione $f(x)$, se abbassato di 1, è simmetrico per riflessione rispetto

all'origine, consistentemente con il fatto che la funzione

$$f(x) - 1 = \frac{x^3 + x^2 + 1}{x^2 + 1} - 1 = \frac{x^3 + x^2 + 1 - x^2 - 1}{x^2 + 1} = \frac{x^3}{x^2 + 1}$$

è una funzione dispari (cfr. la proprietà 4 del §3.9).

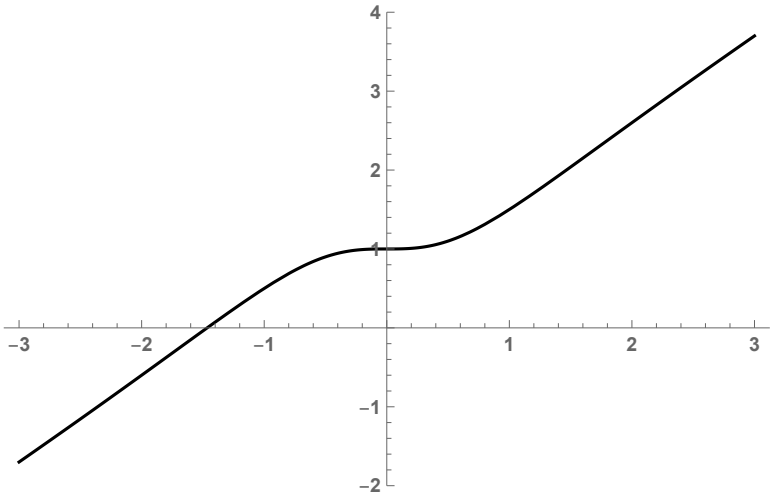


Figura 9.16: Grafico della funzione dell'esercizio 4.

5. La funzione

$$f(x) = x\, e^{-x^2}$$

è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, quindi il suo dominio è $D_f = \mathbb{R}$. La funzione esponenziale è strettamente positiva, quindi il segno di $f(x)$ è dato dal segno di x: $f(x) > 0$ per $x > 0$ e $f(x) < 0$ per $x < 0$. Inoltre $f(x) = 0$ se e solo se $x = 0$, quindi f attraversa gli assi coordinati solo nell'origine. Poiché

$$e^{-x^2} = 1/e^{x^2},$$

applicando il teorema di de l'Hôpital per calcolare il limite del rapporto delle due funzioni x e e^{x^2}, si trova

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2xe^{x^2}} = 0^{\pm},$$

dove $0^{\pm}$ indica che la funzione tende a 0 da valori positivi quando $x \to +\infty$ e da valori negativi quando $x \to -\infty$. Quindi la funzione ha un asintoto orizzontale $y = 0$ per $x \to \pm\infty$. La derivata di $f(x)$ è

$$f'(x) = \left(1 - 2x^2\right) e^{-x^2},$$

da cui si vede che $f'(x) = 0$ se e solo se $x^2 = 1/2$, i.e. per

$$x = \pm x_0, \qquad x_0 := 1/\sqrt{2}.$$

Inoltre $f'(x) > 0$ per $-x_0 < x < x_0$, mentre $f'(x) < 0$ per $x < -x_0$ e per $x > x_0$. Ne segue che $f(x)$ è crescente nell'intervallo $(-x_0, x_0)$ ed è decrescente negli intervalli $(-\infty, -x_0)$ e $x_0, +\infty)$. La derivata seconda di $f(x)$ è

$$\begin{aligned} f''(x) &= -4xe^{-x^2} + 2x^2\left(2x\, e^{-x^2}\right) \\ &= 2x\left(2x^2 - 3\right) e^{-x^2}, \end{aligned}$$

quindi si ha $f''(x) = 0$ se $x = 0$ oppure se $x = \pm x_1$, dove $x_1 := \sqrt{3/2}$. Questo implica che si hanno tre flessi obliqui, in

$$x = 0, \qquad x = -x_1, \qquad x = x_1.$$

Perché risulti $f''(x) > 0$ si deve avere $x > 0$ e $x^2 > 3/2$ (ovvero $x > x_1$ oppure $x < -x_1$) oppure $x < 0$ e $x^2 < 3/2$ (ovvero $-x_1 < x < x_1$). Ne concludiamo che si ha $f''(x) > 0$ (e quindi $f(x)$ è convessa) per $x \in (-x_1, 0) \cup (x_1, +\infty)$, mentre si ha $f''(x) < 0$ (e quindi $f(x)$ è concava) per $x \in (-\infty, -x_1) \cup (0, x_1)$; cfr. la Figura 9.17.

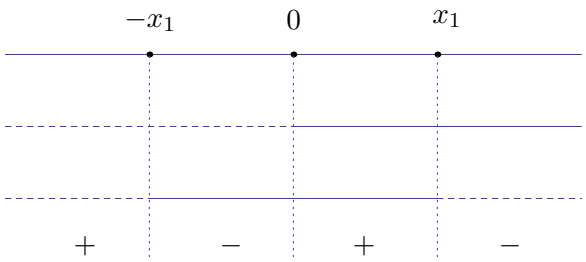


Figura 9.17: Studio del segno della derivata seconda della funzione dell'esercizio 5.

Il grafico della funzione è rappresentato in Figura 9.18.

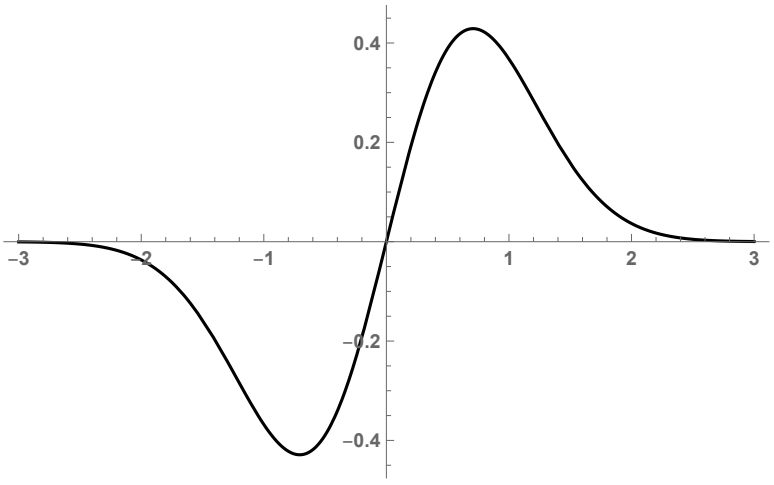


Figura 9.18: Grafico della funzione dell'esercizio 5.

6. Il dominio della funzione
$$f(x) = \frac{x^2 + 3x - 1}{x + 2}$$
è $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq -2\} = (-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$. Per $x = 0$ si ha $f(0) = -1$, mentre risulta $f(x) = 0$ per $x = x_\pm$, dove
$$x_\pm = \frac{1}{2}\left(-3 \pm \sqrt{13}\right),$$
quindi la funzione attraversa l'asse delle ascisse in $x = x_-$ e in x_+ e l'asse delle ordinate in $x = -1$. Inoltre $f(x)$ è positiva quando $x > -2$ e $x \notin (x_-, x_+)$ oppure $x < 2$ e $x \in (x_-, x_+)$, mentre è negativa quando $x > -2$ e $x \in (x_-, x_+)$ oppure $x < 2$ e $x \notin (x_-, x_+)$; in conclusione si ha $f(x) > 0$ per $x \in (x_-, -2) \cup (x_+, +\infty)$ e $f(x) < 0$ per $x \in (-\infty, x_-) \cup (-2, x_+)$; cfr. la Figura 9.19.

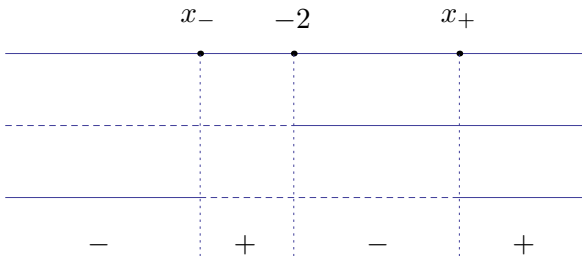


Figura 9.19: Studio del segno della funzione dell'esercizio 6.

Si ha
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2\left(1 + \dfrac{3}{x} - \dfrac{1}{x^2}\right)}{x\left(1 + \dfrac{2}{x}\right)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} x = \pm\infty.$$
Per individuare l'esistenza di eventuali asintoti obliqui della forma $y = ax + b$, si studia per prima cosa il limite
$$a := \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2\left(1 + \dfrac{3}{x} - \dfrac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1 + \dfrac{2}{x}\right)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1,$$
quindi, poiché $a = 1$ è finito, si studia il limite
$$b := \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2 + 3x - 1 - x^2 - 2x}{x + 2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x - 1}{x + 2} = 1,$$
quindi $y = x + 1$ è un asintoto obliquo sia per $x \to +\infty$ che per $x \to -\infty$. Si ha poi
$$\lim_{x\to\pm -2^+} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to\pm -2^-} f(x) = +\infty,$$

poiché $x^2 + 3x - 1 \to -3$ per $x \to -2^{\pm}$, mentre $x + 2$ tende a 0 da valori positivi per $x > -2$ e da valori negativi per $x < -2$. Quindi in $x = -2$ la funzione f ha un asintoto verticale. La derivata di $f(x)$ è

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x+3)(x+2) - (x^2+3x-1)}{(x+2)^2} \\ &= \frac{x^2+4x+7}{(x+2)^2}, \end{aligned}$$

dove $(x+2)^2 > 0 \ \forall x \neq -2$ e $x^2 + 4x + 7 > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ (poiché le radici dell'equazione $x^2 + 4x + 7 = 0$ non sono reali, essendo il suo discriminante $\Delta = 4^2 - 4 \cdot 7 = -12 < 0$, e il coefficiente di x^2 è positivo). Quindi $f'(x) > 0 \ \forall x \in D_f$, da cui segue che la funzione è strettamente crescente. La derivata seconda di $f(x)$ è

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\frac{(2x+4)(x+2)^2 - 2(x^2+4x+7)(x+2)}{(x+2)^4} \\ &= -\frac{(2x+4)(x+2) - 2(x^2+4x+7)}{(x+2)^3} = \frac{6}{(x+2)^3}, \end{aligned}$$

quindi $f''(x) > 0$ se $x < -2$ e $f''(x) < 0$ se $x > -2$: la funzione è convessa per $x < -2$ ed è concava per $x > -2$. Il grafico è rappresentato in Figura 9.20.

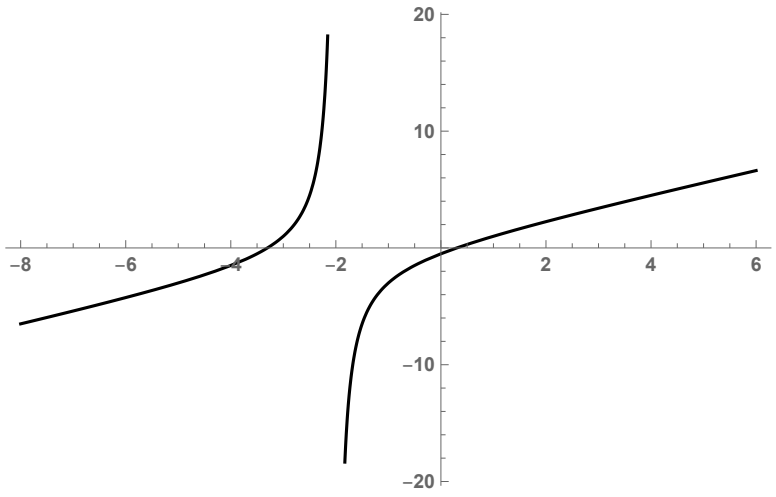


Figura 9.20: Grafico della funzione dell'esercizio 6.

7. La funzione $f(x)$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, quindi il suo dominio è $D_f = \mathbb{R}$. Si ha

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}\left(x^2+4\right), & x \geq 0, \\ e^{x}\left(x^2+4\right), & x < 0, \end{cases}$$

quindi dobbiamo studiare la funzione $f_1(x) := e^{-x}\left(x^2+4\right)$ nel dominio $x \geq 0$ e la funzione $f_2(x) := e^{x}\left(x^2+4\right)$ nel dominio $x < 0$. O, più semplicemente, possiamo studiare la sola funzione $f_1(x)$ per $x \geq 0$ e poi utilizzare il fatto che la funzione $f(x)$ è pari, i.e.

$$f(-x) = e^{-|-x|}\left((-x)^2+4\right) = e^{-|x|}\left(x^2+4\right) = f(x),$$

per ottenere il grafico della funzione per $x < 0$ da quello per $x \geq 0$ tramite una riflessione rispetto all'asse y (cfr. la discussione al §3.9). Quindi studiamo $f_1(x)$ per $x \in [0, +\infty)$. Per $x = 0$ si ha $f(0) = 4$, mentre per $x > 0$ si ha $f(x) > 0$; in particolare non interseca mai l'asse x. Si trova

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+4}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{e^x} = 0,$$

avendo applicato due volte il teorema di de l'Hôpital; quindi $f(x)$ ha un asintoto orizzontale $y = 0$ per $x \to +\infty$. La derivata di $f_1(x)$ è

$$f_1'(x) = -e^{-x}\left(x^2-2x+4\right),$$

quindi $f_1'(x) = 0$ se e solo se $x^2 - 2x + 4 = 0$. D'altra parte l'equazione di secondo grado $x^2 - 2x + 4 = 0$ non ammette radici reali poiché il suo discriminante vale $\Delta = 4 - 16 = -12 < 0$. Poiché il coefficiente di x^2 è positivo, la parabola $y = x^2 - 2x + 4$ si trova sempre nel semipiano superiore: $x^2 - 2x + 4 > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$. Ne segue che $f_1'(x) < 0\ \forall x \in \mathbb{R}_+$: la funzione $f_1(x)$ è strettamente decrescente. Si noti anche che

$$\lim_{x\to 0+} f_1'(x) = -4,$$

quindi la funzione parte da $x = 0$ con tangente obliqua, diretta verso il basso. La derivata seconda di $f_1(x)$ è

$$f_1''(x) = e^{-x}\left(x^2-4x+6-(2x-4)\right) = e^{-x}\left(x^2-4x+6\right).$$

Di nuovo, l'equazione di secondo grado $x^2 - 4x + 6 = 0$ non ammette radici reali poiché il suo discriminante è $\Delta = 16 - 24 = -8 < 0$, così che, tenuto conto che il segno del coefficiente di x^2 è positivo, possiamo concludere che $x^2 - 4x + 6 > 0$ e quindi $f_1''(x) > 0$ per ogni $x \geq 0$. Ne deduciamo che la funzione f_1 è convessa. Il grafico della funzione $f_2(x)$ per $x < 0$ si ottiene, come detto, per riflessione rispetto all'asse y del grafico di $f_1(x)$. Il grafico di $f(x)$ è rappresentato in Figura 9.21.

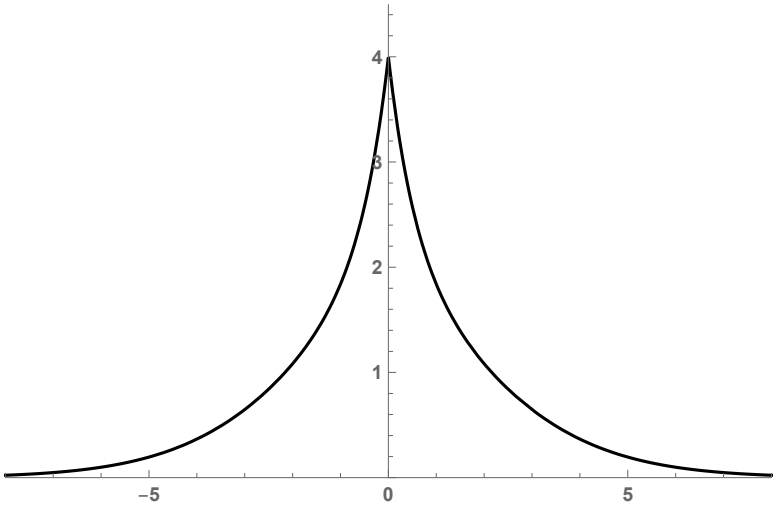


Figura 9.21: Grafico della funzione dell'esercizio 7.

8. Il dominio della funzione
$$f(x) = e^{-|x|}\left|x^2 - 1\right|$$
è $D_f = \mathbb{R}$. La funzione è sempre positiva (e strettamente positiva per $x \neq \pm 1$). Tenendo conto che
$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0 \end{cases},$$
$$|x^2 - 1| = \begin{cases} x^2 - 1, & x^2 - 1 \geq 0 \iff x \geq 1 \text{ oppure } x \leq -1, \\ 1 - x^2, & x^2 - 1 < 0 \iff -1 < x < 1, \end{cases}$$
si ha
$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}\left(x^2 - 1\right), & x \geq 1, \\ e^{-x}\left(1 - x^2\right), & 0 \leq x < 1, \\ e^{x}\left(1 - x^2\right), & -1 \leq x \leq 0, \\ e^{x}\left(x^2 - 1\right), & x < -1. \end{cases}$$
quindi dobbiamo studiare una funzione diversa a seconda di ciascuno degli intervalli nei quali abbiamo suddiviso il dominio D_f.

- Iniziamo dall'intervallo $[1, +\infty)$. In tal caso si ha
$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1) = 0,$$
poiché la funzione $f(x)$ è continua, e
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 1}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{e^x} = 0,$$

per il teorema di de l'Hôpital (applicato due volte). La derivata prima e la derivata seconda di $f(x)$ sono

$$f'(x) = e^{-x}\left(-x^2 + 2x + 1\right), \qquad f''(x) = e^{-x}\left(x^2 - 4x + 1\right),$$

rispettivamente. L'equazione di secondo grado $-x^2 + 2x + 1 = 0$ ha due radici reali $x = 1 \pm \sqrt{2}$, quindi $-x^2 + 2x + 1 > 0$ per $x \in (1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$. Poiché il segno di $f'(x)$ per $x \geq 1$ è determinato dal segno del polinomio $-x^2 + 2x + 1$, ne concludiamo che $f'(x) > 0$ per $x \in [1, 1 + \sqrt{2})$ e $f'(x) < 0$ per $x \in (1 + \sqrt{2}, +\infty)$. Quindi $f(x)$ ha un massimo in $x = 1 + \sqrt{2}$ (dove $f'(x)$ si annulla). Analogamente si trova che l'equazione di secondo grado $x^2 - 4x + 1 = 0$ ha due radici reali $x = 2 \pm \sqrt{3}$, quindi $x^2 - 4x + 1 > 0$ per $x \in (-\infty, 2 - \sqrt{3}) \cup (2 + \sqrt{3}, +\infty)$. Poiché il segno di $f''(x)$ per $x \geq 1$ è determinato dal segno del polinomio $x^2 - 4x + 1$, ne concludiamo che $f''(x) > 0$ per $x > 2 + \sqrt{3})$ e $f''(x) < 0$ per $x \in (1, 2 + \sqrt{3})$. quindi la funzione ha un flesso obliquo in $x = x_1 := 2 + \sqrt{3}$, è convessa per $x > x_1$ ed è concava per $0 < x < x_1$.

- Consideriamo ora l'intervallo $x \in [0, 1]$ (in $x = 1$ le due determinazioni della funzione per $x > 1$ e $x < 1$ coincidono). Si ha

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = 1,$$

di nuovo usando la continuità della funzione. Inoltre

$$f'(x) = e^{-x}\left(x^2 - 2x - 1\right), \qquad f''(x) = e^{-x}\left(-x^2 + 4x + 1\right).$$

A differenza di prima ora si ha $x^2 - 2x - 1 > 0$ per $x < 1 - \sqrt{2}$ oppure per $x > 1 + \sqrt{2}$). Poiché entrambi i punti $x = 1\sqrt{2}$ sono esterni all'intervallo $[0, 1]$, ne concludiamo che $f'(x) < 0$ e quindi f è strettamente decrescente per $x \in [0, 1]$. Discutendo il segno della derivata seconda si vede che $-x^2 + 4x + 1 > 0$ per $x \in (2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3})$. Poiché $0 < 2 - \sqrt{3} < 1 < 2 + \sqrt{3}$, ne concludiamo che $f''(x) < 0$ (e quindi $f(x)$ è concava) per $x \in (0, 2 - \sqrt{3})$ e $f''(x) > 0$ (e quindi $f(x)$ è convessa) per $x \in (2 - \sqrt{3}, 1)$.

- I casi restanti, corrispondenti agli intervalli $[-1, 0]$ e $(-\infty, -1]$, possono essere discussi in modo assolutamente analogo. Oppure, più semplicemente si osserva che la funzione è pari, così che il grafico per $x < 0$ si ottiene dal grafico per $x \geq 0$ attraverso una riflessione rispetto all'asse y (cfr. la proprietà 3 del §3.9).

In conclusione si ottiene il grafico rappresentato in Figura 9.22. Si noti in particolare che il limite destro e il limite sinistro della derivata di $f(x)$ sono diversi per ogni valore di x in cui cambia la determinazione di qualche modulo:

$$\lim_{x \to 0^\pm} f'(x) = \mp 1, \qquad \lim_{x \to 1^\pm} f'(x) = \pm\frac{2}{e}, \qquad \lim_{x \to -1^\pm} f'(x) = \pm\frac{2}{e},$$

quindi, mentre $f(x)$ è continua per ogni $x \in \mathbb{R}$, la sua derivata $f'(x)$ è continua ovunque tranne che in $x \in \{0, \pm 1\}$.

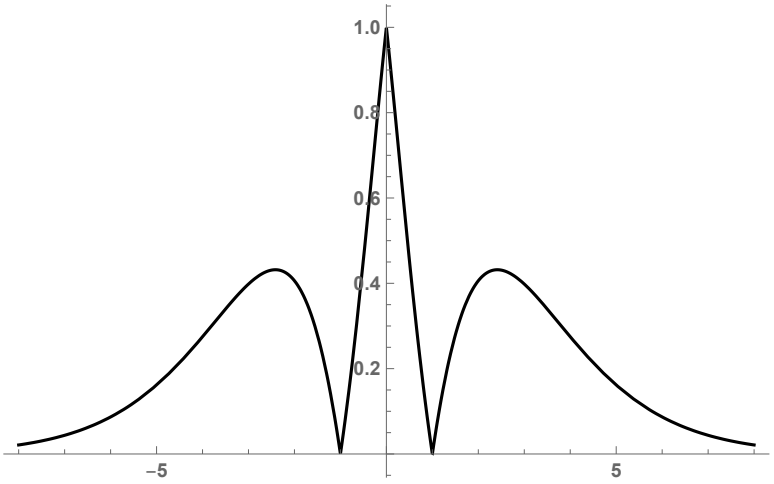


Figura 9.22: Grafico della funzione dell'esercizio 8.

9. Iniziamo al solito dallo studio del dominio. Il dominio della funzione

$$f(x) = e^{-x^2+2x+1}\,(2-x)$$

è $D_f = \mathbb{R}$. Poiché

$$e^{-x^2+2x+1} = \frac{1}{e^{x^2-2x-1}},$$

si ha, per il teorema di de l'Hôpital,

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2-x}{e^{x^2-2x-1}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-1}{e^{x^2-2x-1}(2x-2)} = 0^{\mp},$$

dove le notazioni 0^- e 0^+ indicano che la funzione $f(x)$ tende a 0 da valori negativi per $x \to +\infty$e da valori positivi per $x \to -\infty$: in entrambi i casi la funzione $f(x)$ ha un asintoto orizzontale $y = 0$. La derivata di $f(x)$ è

$$f'(x) = e^{-x^2+2x+1}\left(2x^2 - 6x + 3\right),$$

quindi il segno di $f'(x)$ è dato dal segno del polinomio quadratico $2x^2-6x+3$. L'equazione

$$2x^2 - 6x + 3 = 0$$

ha le due radici reali

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(3 - \sqrt{3}\right), \qquad x_2 = \frac{1}{2}\left(3 + \sqrt{3}\right),$$

quindi, tenendo conto che il segno del coefficiente di x^2 è positivo (vale 2), si ha $f'(x) > 0$ per $x < x_1$ oppure per $x > x_2$ e $f'(x) < 0$ per $x_1 < x < x_2$ (e $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$). Pertanto la funzione $f(x)$ è crescente per $x \in (-\infty, x_1)$, decrescente per $x \in (x_1, x_2)$ e di

nuovo crescente per $x \in (x_2, +\infty)$. In particolare avrà un punto di massimo assoluto in $x = x_1$ e un punto di minimo assoluto in $x = x_2$. La derivata seconda di $f(x)$ è data da

$$f''(x) = -xe^{-x^2+2x+1}\left(2x^2 - 8x + 7\right)$$

Il segno si discute in modo analogo: l'equazione di secondo grado

$$2x^2 - 8x + 7 = 0$$

ha le due radici reali

$$x_3 = \frac{1}{2}\left(4 - \sqrt{2}\right), \qquad x_4 = \frac{1}{2}\left(4 + \sqrt{2}\right),$$

quindi $2x^2 - 8x + 7 > 0$ per $x < x_3$ e per $x > x_4$, mentre $2x^2 - 8x + 7 < 0$ per $x \in (x_3, x_4)$. Si noti che $0 < x_1 < x_3 < x_2 < x_4$. Il segno di $f''(x)$ è determinato dal segno del polinomio

$$-x(2x^2 - 8x + 7),$$

quindi si trova $f''(x) > 0$ se $x < 0$ e $x \notin (x_3, x_4)$ oppure se $x > 0$ e $x \in (x_3, x_4)$: ne segue che $f''(x) > 0$ se $x \in (-\infty, 0) \cup (x_3, x_4)$, mentre $f''(x) < 0$ se $x \in (0, x_3) \cup (x_4, +\infty)$. In $x = 0$, $x = x_3$ e $x = x_4$ la funzione ha un flesso obliquo, è convessa negli intervalli $(-\infty, 0)$ e (x_3, x_4) ed è concava negli intervalli $(0, x_3)$ e $(x_4, +\infty)$. Il grafico della funzione è rappresentato in Figura 9.23.

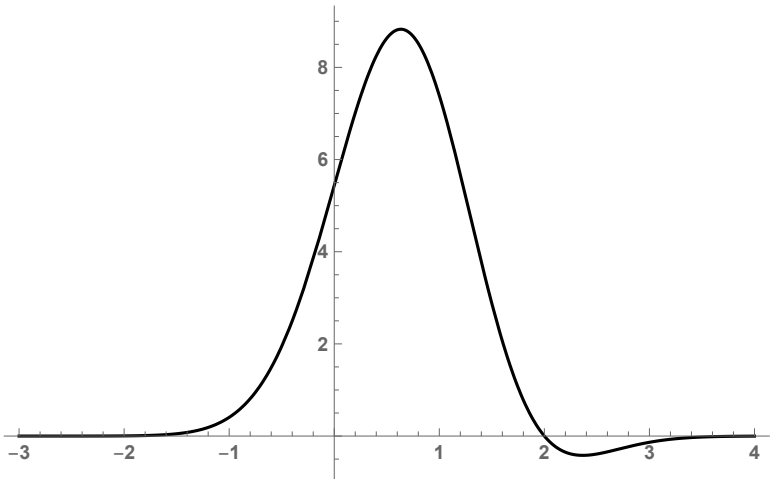


Figura 9.23: Grafico della funzione dell'esercizio 9.

10. Perché la funzione

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x+3}}$$

sia definita occorre innanzitutto che l'argomento della radice sia definito, e quindi $x \neq -3$, inoltre esso deve essere positivo, e quindi

$$\frac{x^3}{x+3} \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad x \geq 0,\ x > -3 \text{ oppure } x \leq 0,\ x < -3,$$

il che comporta che si deve avere $x \geq 0$ oppure $x < -3$. Da questo si deduce che il dominio di f è

$$D_f = (-\infty, -3) \cup [0, +\infty).$$

Inoltre $f(x) \geq 0\ \forall x \in D_f$ ed è nulla solo in $x = 0$: infatti in $x = 0$ la funzione è definita e vale $f(0) = 0$. Al contrario in $x = 3$ la funzione ha un asintoto verticale e

$$\lim_{x \to -3^-} f(x) = +\infty,$$

poiché $x^3 \to -3^3 = -27$ per $x \to -3$, mentre $x+3 \to 0^-$ per $x \to -3^-$. Inoltre, applicando il teorema di de l'Hôpital, si trova

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3}{x+3} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{3x^2}{1} = 3 \lim_{x \to \pm\infty} x^2 = +\infty,$$

che mostra che $x^3/(x+3)$ e quindi anche $f(x)$, che ne è la radice quadrata, diverge a $\pm\infty$. Per studiare l'esistenza di un eventuale asintoto obliquo della forma $y = ax + b$, per $x \to +\infty$, si calcola

$$a := \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x^3}{x+3}} = \lim_{x \to \pm\infty} \sqrt{\frac{x^3}{x^2(x+3)}} = \lim_{x \to \pm\infty} \sqrt{\frac{x^3}{x^3+3x^2}}.$$

D'altra parte, sempre per l'Hôpital, si ha

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3}{x^3+3x^2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{3x^2}{3x^2+6x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{6x}{6x+6} = 1,$$

da cui, usando la continuità della funzione radice quadrata, si ottiene

$$\lim_{x \to \pm\infty} \sqrt{\frac{x^3}{x^3+3x^2}} = \sqrt{\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3}{x^3+3x^2}} = \sqrt{1} = 1,$$

che implica $a = 1$. Si studia quindi il limite

$$b := \lim_{t \to +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{\frac{x^3}{x+3}} - x \right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{\frac{x^3}{x+3}} - \sqrt{x^2} \right),$$

dove si è usato che $x = |x| = \sqrt{x^2}$ per $x > 0$ (noi siamo interessati al limite $x \to +\infty$). Razionalizzando, otteniamo

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{x^3}{x+3}} - \sqrt{x^2} &= \sqrt{\frac{x^3}{x+3}} - \sqrt{x^2 \frac{x+3}{x+3}} \\
&= \sqrt{\frac{1}{x+3}} \left(\sqrt{x^3} - \sqrt{x^3+3x^2} \right) \\
&= \sqrt{\frac{1}{x+3}} \left(\sqrt{x^3} - \sqrt{x^3+3x^2} \right) \cdot \frac{\sqrt{x^3} + \sqrt{x^3+3x^2}}{\sqrt{x^3} + \sqrt{x^3+3x^2}} \\
&= \sqrt{\frac{1}{x+3}} \left(\frac{x^3 - x^3 - 3x^2}{\sqrt{x^3} + \sqrt{x^3+3x^2}} \right) \\
&= -\sqrt{\frac{1}{x+3}} \left(\frac{3x^2}{\sqrt{x^3} + \sqrt{x^3+3x^2}} \right),
\end{aligned}$$

che possiamo riscrivere

$$-\frac{3x^2}{\left(x^{1/2}\sqrt{1+\frac{3}{x}}\right)\left(x^{3/2}\left(1+\sqrt{1+\frac{3}{x}}\right)\right)} = -\frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{x}}\left(1+\sqrt{1+\frac{3}{x}}\right)},$$

dove abbiamo usato che $\sqrt{x} = x^{1/2}$ e $\sqrt{x^3} = x^{3/2}$. Poiché $3/x \to 0$ per $x \to +\infty$ si trova $b = -3/2$. Quindi per $x \to +\infty$ la funzione $f(x)$ ha un asintoto obliquo della forma $y = ax + b$, con $a = 1$ e $b = -3/2$. Con conti assolutamente analoghi si trova che esiste un asintoto obliquo anche per $x \to -\infty$, in questo caso della forma $y = ax + b$ con $a = -1$ e $b = 3/2$. La derivata di $f(x)$ è

$$f'(x) = \frac{x^2(2x+9)}{2\sqrt{\frac{x^3}{x+3}}(x+3)^2}.$$

Per semplificare la discussione distinguiamo i casi $x \geq 0$ e $x < 0$. Se $x \geq 0$, possiamo riscrivere $f'(x)$ come

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x^2(2x+9)(x+3)^{1/2}}{2x^{3/2}(x+3)^2} \\ &= \frac{x^{1/2}(2x+9)}{2(x+3)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Per $x \geq 0$ si ha $x + 3 > 0$ e $2x + 9 > 0$, quindi $f'(x) > 0$ $\forall x > 0$ (e solo in $x = 0$ si ha $f'(x) = 0$), così che la funzione è crescente per $x > 0$. Derivando ulteriormente l'espressione sopra per $f'(x)$ e semplificando si trova

$$f''(x) = \frac{27}{4x^{1/2}(x+3)^{5/2}},$$

da cui si evince che $f''(x) > 0$ per $x > 0$. Quindi la funzione $f(x)$ è convessa per $x > 0$. Se invece $x < -3$ sia x che $x + 3$ sono negativi, quindi, riscrivendo

$$\sqrt{\frac{x^3}{x+3}} = \sqrt{\frac{-x^3}{-(x+3)}} = \sqrt{\frac{(-x)^3}{-(x+3)}},$$

otteniamo

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x^2(2x+9)(-x-3)^{1/2}}{2(-x)^{3/2}(x+3)^2} \\ &= \frac{(-x)^2(2x+9)(-x-3)^{1/2}}{2(-x)^{3/2}(-x-3)^2} \\ &= \frac{(-x)^{1/2}(2x+9)}{2(-x-3)^{3/2}}. \end{aligned}$$

dove abbiamo usato che $x^2 = (-x)^2$ e $(x+3)^2 = (-x-3)^2$. Possiamo ragionare allora come nel caso precedente ($x \geq 0$), con l'unica differenza che ora, mentre $-x-3 > 0$ per $x < -3$, al contrario $2x + 9$ di può annullare per $x < -3$, precisamente per $x = -9/2$. Quindi $f'(x) = 0$ per $x = -9/2$, $f'(x) > 0$ per $x \in (-9/2, -3)$ e $f'(x) < 0$ per $x \in (-\infty, -9/2)$: la funzione f è decrescente per $x \in (-\infty, -9/2)$ e crescente per $x \in (-9/2, -3)$, e ha in $x = -9/2$ un minimo assoluto (positivo). La derivata seconda si calcola analogamente al caso precedente e si trova

$$f''(x) = \frac{27}{4(-x)^{1/2}(-x-3)^{5/2}},$$

che implica che $f''(x) > 0$ anche per $x < -3$. Quindi f è convessa anche nell'intervallo $(-\infty, -3)$. Il grafico della funzione è rappresentato in Figura 9.24.

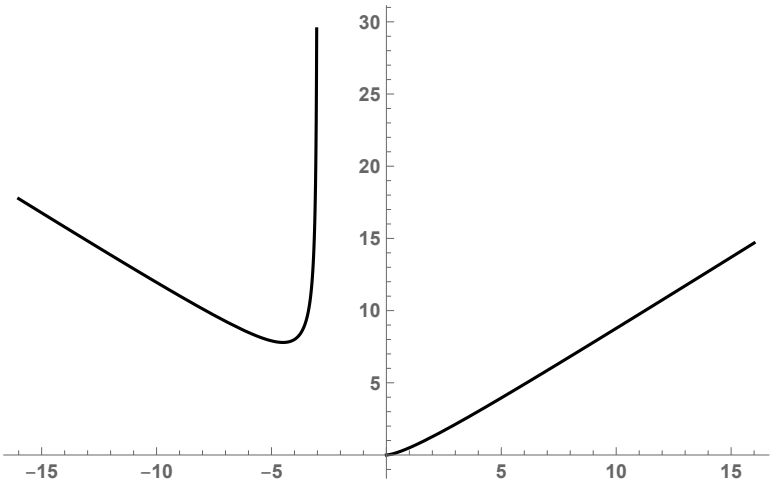


Figura 9.24: Grafico della funzione dell'esercizio 10.

11. La funzione

$$f(x) = \ln \frac{x^2-1}{x^2+1}$$

è definita per x tale che

$$\frac{x^2-1}{x^2+1} > 0 \quad \Longrightarrow \quad x^2 > 1 \quad \Longrightarrow \quad x > 1 \text{ oppure } x < -1,$$

da cui si ottiene $D_f = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1,$$

così che, per continuità,

$$\lim_{x\to+\infty} \ln \frac{x^2-1}{x^2+1} = \ln 1 = 0,$$

quindi la funzione ha un asintoto orizzontale $y = 0$ per $x \to \pm\infty$. Inoltre, poiché

$$\lim_{x\to-1^-} f(x) = \lim_{x\to1^+} f(x) = -\infty,$$

la funzione ha due asintoti verticali, uno in $x = -1$ e uno in $x = 1$. La derivata di $f(x)$ è

$$f'(x) = \frac{4x}{x^4-1},$$

dove $x^4-1 > 0$ per $x \notin (-1,1)$. Quindi $f'(x) > 0$ (i.e. f è crescente) per $x > 0$ e $f'(x) < 0$ (e f è decrescente) per $x < 0$. La derivata seconda di $f(x)$ è

$$f''(x) = -\frac{4(1+3x^4)}{(x^4-1)^2},$$

quindi $f''(x) < 0$ per ogni $x \in D_f$, da ci si deduce che $f(x)$ è concava. Il grafico della funzione è rappresentato in Figura 9.25.

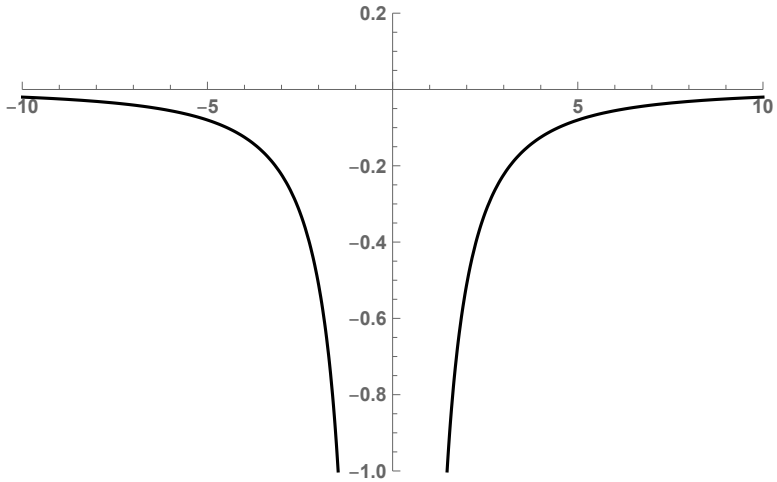


Figura 9.25: Grafico della funzione dell'esercizio 11.

12. Perché la funzione

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}$$

sia definita occorre che l'argomento della radice sia definito e non negativo. Poiché $x^2+1 > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, dobbiamo richiedere $x^2 - 1 > 0$, tenendo conto che il segno uguale va escluso poiché l'argomento della radice non è definito per $x^2 = 1$. In conclusione $f(x)$ è definita per $x > 1$ o $x < -1$, quindi il suo dominio è dato da

$$D_f = (-\infty,-1) \cup (1,+\infty).$$

In particolarela funzione $f(x)$ ha due asintoti verticali, uno in $x = -1$ e uno in $x = 1$. Inoltre si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+1}{x^2-1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{2x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{2} = 1,$$

per il teorema di de l'Hôpital, e, dal momento che la funzione radice quadrata è una funzione continua, ne segue che

$$\lim_{x\to\pm\infty} \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}} = \sqrt{1} = 1.$$

Quindi la funzione $f(x)$ ha un asintoto orizzontale $y = 1$ sia per $x \to +\infty$ che per $x \to -\infty$. La derivata di $f(x)$ è

$$f'(x) = -\frac{2x}{(x^2-1)^2}\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2+1}} = -\frac{2x}{\sqrt{(x^2-1)^3(x^2+1)}},$$

così che il segno di $f'(x)$ è determinato dal segno di x: in particolare $f'(x) > 0$ per $x < -1$ e $f'(x) < 0$ per $x > 1$, i.e. la funzione è decrescente nell'intervallo $(-\infty, -1)$ e crescente nell'intervallo $(1, +\infty)$. La derivata seconda di $f(x)$ è

$$f''(x) = \frac{(x^2-1)^2(6x^4+4x^2+2)}{(x^2-1)^{3/2}(x^2+1)^{3/2}},$$

da cui si vede che $f''(x) > 0\ \forall x \in D_f$: infatti $x^2 + 1 > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 1 > 0\ \forall x \in D_f$ e $6x^4 + 4x^2 + 2 > 0\ \forall x \in D_f$ essendo somma di quantità positive. Questo comporta che la $f(x)$ è convessa per ogni $x \in D_f$. Il grafico della funzione è rappresentato in Figura 9.26.

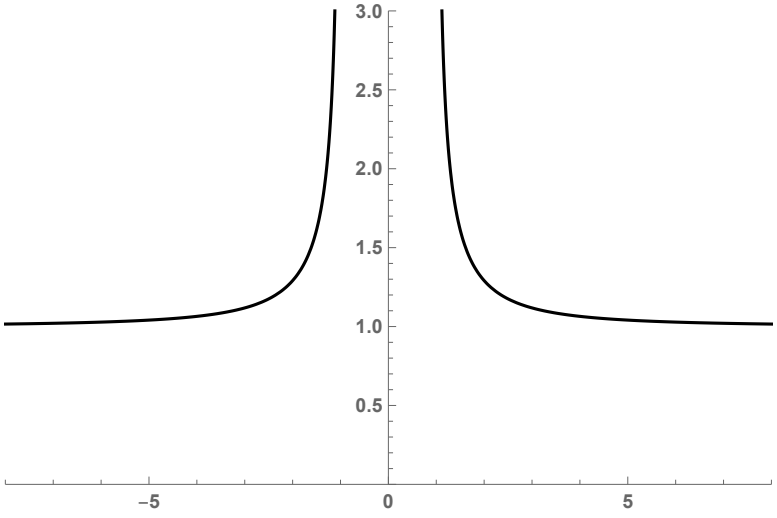


Figura 9.26: Grafico della funzione dell'esercizio 12.

13. Il dominio della funzione

$$f(x) = \frac{-1+(x+2)^2}{x}$$

è $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Applicando il teorema di de l'Hôpital, si determina il comportamento agli estremi, e si trova

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2(x+2)}{1} = \pm\infty,$$

che mostra che la funzione diverge per $x \to \pm\infty$; inoltre,

$$\lim_{x\to 0^\pm} f(x) = \lim_{x\to 0^\pm} \frac{3}{x} = \pm\infty,$$

poiché il numeratore tende a 3 quando x tende a 0. Quindi la funzione ha un asintoto verticale in $x = 0$. Si studia l'esistenza di eventuali asintoti obliqui della forma $y = ax + b$, calcolando, nell'ordine, i due limiti

$$a := \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad b := \lim_{x\to\pm\infty} \left(f(x) - ax\right),$$

e verificando se sono entrambi finiti. Si trova, applicando ancora una volta il teorema di de l'Hôpital,

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-1 + (x+2)^2}{x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2(x+2)}{2x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{2} = 1.$$

Il fatto che il limite a sia finito consente di calcolare

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{-1 + (x+2)^2}{x} - x \right) \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-1 + x^2 + 4x + 4 - x^2}{x} \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4x + 3}{x} \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4}{1} = 4, \end{aligned}$$

dove l'ultimo passaggio segue ancora una volta dal teorema di de l'Hôpital. Quindi $f(x)$ ha un asintoto obliquo $y = x + 4$ sia per $x \to +\infty$ che per $x \to -\infty$. La derivata di $f(x)$ è

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x(x+2) - (-1 + (x+2)^2)}{x^2} \\ &= \frac{2x^2 + 4x + 1 - x^2 - 4x - 4}{x^2} \\ &= \frac{x^2 - 3}{x^2}. \end{aligned}$$

Poiché $x^2 > 0 \ \forall x \neq 0$ si ha $f'(x) = 0$ se e solo se $x^2 = 3$, ovvero $f'(x) = 0$ quando $x = \pm\sqrt{3}$. Inoltre $f'(x) > 0$ quando $x > \sqrt{3}$ oppure $x < -\sqrt{3}$, mentre $f'(x) < 0$ quando $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$. Ne concludiamo che la funzione $f(x)$ è crescente per $x \in (-\infty, -\sqrt{3})$, ha un punto di massimo in $x = -\sqrt{3}$, è decrescente per $x \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$, ha un punto di

minimo in $x = \sqrt{3}$ ed è crescente per $x \in (\sqrt{3}, +\infty)$. La derivata seconda di $f(x)$ si calcola facilmente notando che

$$f'(x) = 1 - \frac{3}{x^2} \quad \Longrightarrow \quad f''(x) = \frac{6}{x^3},$$

quindi $f''(x) > 0$ se $x > 0$ e $f''(x) < 0$ se $x < 0$: la funzione è convessa nell'intervallo $(0, +\infty)$ e concava nell'intervallo $(-\infty, 0)$. Il grafico è rappresentato in Figura 9.27.

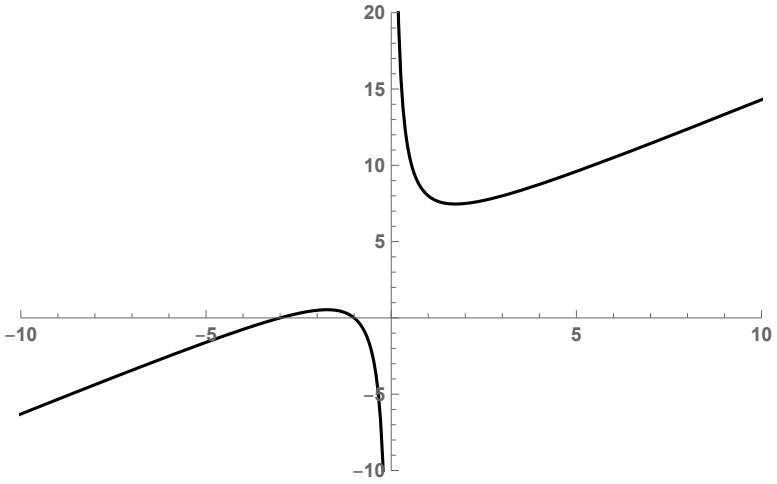


Figura 9.27: Grafico della funzione dell'esercizio 13.

14. La funzione

$$f(x) = \frac{x^4}{x^2 - 1}$$

è definita per ogni x tale che $x^2 \neq 1$, i.e. per ogni $x \neq \pm 1$. Quindi il dominio della funzione è $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \pm 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$. Si ha

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^4}{x^2 \left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \to \pm\infty} x^2 = +\infty,$$

quindi la funzione diverge all'infinito. Poiché

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^4}{x^3 \left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \to \pm\infty} x = \pm\infty,$$

possiamo escludere l'esistenza di asintoti obliqui. Si ha inoltre

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to -1^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to -1^-} f(x) = +\infty,$$

poiché $x^4 \to 1$ per $x \to \pm 1$ da destra o da sinistra, indifferentemente, mentre $x^2 - 1 > 0$ per $x > 1$ e per $x < -1$ e $x^2 - 1 < 0$ per $x \in (-1, 1)$. Si hanno quindi due asintoti verticali, uno in $x = -1$ e uno in $x = 1$. La derivata di $f(x)$ è

$$f'(x) = \frac{2x^3(x^2 - 2)}{(x^2 - 1)^2}.$$

Poiché il denominatore è sempre positivo (dove la funzione è definita), si ha $f'(x) = 0$ quando $x = 0$ oppure $x = \pm\sqrt{2}$: si hanno perciò 3 punti stazionari. Inoltre $x^2 - 2 > 0$ per $x \notin (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ e $x^2 - 2 < 0$ per $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Quindi $f'(x) > 0$ se $x > 0$ e $x \notin (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, ovvero se $x \in (\sqrt{2}, +\infty)$, oppure se $x < 0$ e $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, ovvero se $x \in (-\sqrt{2}, 0)$. Analogamente $f'(x) < 0$ se $x > 0$ e $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, ovvero se $x \in (0, \sqrt{2})$, oppure se $x < 0$ e $x \notin (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, ovvero se $x \in (-\infty, -\sqrt{2})$. In conclusione, $f(x)$ è decrescente per $x \in (-\infty, -\sqrt{2})$, ha un punto di minimo in $x = -\sqrt{2}$, è crescente per $x \in (-\sqrt{2}, 0)$, ha un punto di massimo in $x = 0$, è decrescente per $x \in (0, \sqrt{2})$, ha un punto di minimo in $x = \sqrt{2}$ ed è crescente per $x \in (\sqrt{2}, +\infty)$; cfr. la Figura 9.28.

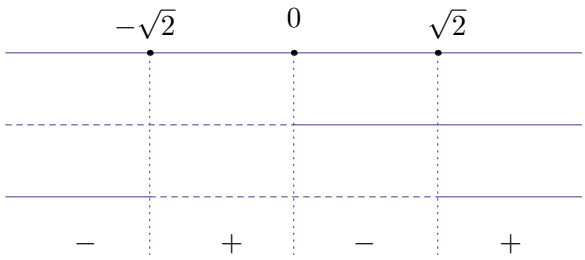


Figura 9.28: Studio del segno della derivata prima della funzione dell'esercizio 14.

La derivata seconda di $f(x)$ è

$$f''(x) = \frac{2x^2(x^4 - 3x^2 + 6)}{(x^2 - 1)^3}.$$

Per studiare il segno di $f''(x)$ si può innanzitutto notare che $x^4 - 3x^2 + 6 > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Questo può essere verificato scrivendo $x^2 = t$ e notando che l'equazione $x^4 - 3x^2 + 6 = 0$ diventa l'equazione di secondo grado $t^2 - 3t + 6 = 0$ in termini di t. Il discriminante dell'equazione è $\Delta = 9 - 24 = -15 < 0$, quindi l'equazione non ammette radici reali. Ne segue che $t^2 - 3t + 6 > 0 \ \forall t \in \mathbb{R}$, poiché il coefficiente di t^2 è positivo (vale 1), e quindi anche $x^4 - 3x^2 + 6 > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$. Poiché anche $x^2 \geq 0$, ne concludiamo che $f''(x)$ ha il segno della funzione $(x^2 - 1)^3$, ovvero di $x^2 - 1$, così che, in conclusione, che $f''(x) \geq 0$ se $x^2 > 1$, ovvero se $x > 1$ oppure $x < -1$, e $f''(x) \leq 0$ se $x^2 < 1$, ovvero se $x \in (-1, 1)$. Si noti inoltre che $f''(x) = 0$ se e solo se $x = 0$. Tuttavia $x = 0$ non è un punto di flesso, poiché si ha $f''(x) > 0$ sia a destra che a sinistra di $x = 0$: in altre parole il segno di $f''(x)$ non cambia attraversando il punto $x = 0$. (Analogamente si sarebbe potuto osservare, con riferimento alla Figura 9.28, che $f'(x) > 0$ per $x < 0$ e $f'(x) < 0$ per $x > 0$: questo mostra che $x = 0$

deve essere un punto di massimo relativo, consistentemente con quanto già trovato). Dalla discussione precedente segue che la funzione $f(x)$ è convessa negli intervalli $(-\infty, -1)$ e $(1, +\infty)$ e concava nell'intervallo $(-1, 1)$. Si noti che la funzione $f(x)$ è pari in x: quindi in relatà sarebbe stato sufficiente studiare la funzione per $x > 0$: il grafico per $x > 0$ si ottiene da quello per $x > 0$ tramite una riflessione rispetto all'asse verticale (cfr. la proprietà 3 del §3.9). Il grafico della funzione $f(x)$ è rappresentato in Figura 9.29.

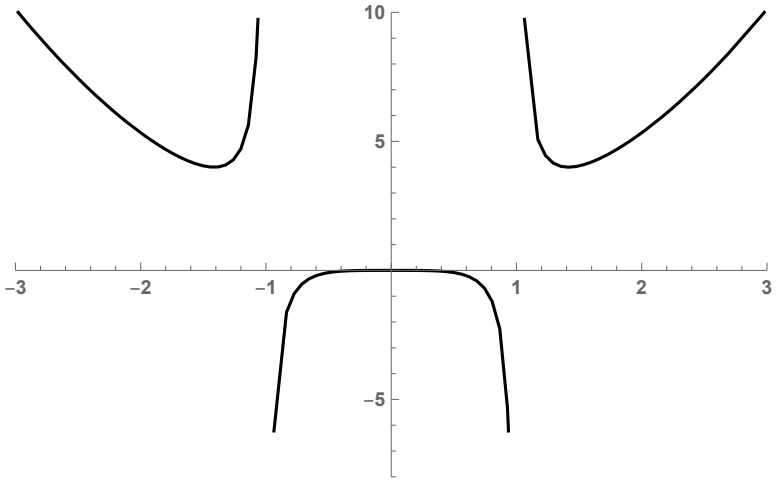


Figura 9.29: Grafico della funzione dell'esercizio 14.

15. Il dominio della funzione

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 2}$$

è $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq -2\} = (-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$. Per $x = 0$ si ha $f(0) = -1/2$, mentre risulta $f(x) = 0$ per $x = \pm 1$, quindi la funzione attraversa l'asse delle ascisse in $x = -1$ e in $x = 1$ e l'asse delle ordinate in $y = -1/2$. Studiando il segno si trova che $f(x) > 0$ per $x > 1$ e per $x \in (-2, -1)$, mentre $f(x) < 0$ per $x < -2$ e per $x \in (-1, 1)$. Si ha

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)}{x \left(1 + \dfrac{2}{x}\right)} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} x = +\infty.$$

Per individuare l'esistenza di eventuali asintoti obliqui, della forma $y = ax + b$, si studia per prima cosa il limite

$$a := \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)}{x^2 \left(1 + \dfrac{2}{x}\right)} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1,$$

quindi poiché $a = 1$ è finito si studia il limite

$$b := \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2 - 1 - x(x+2)}{x+2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-3}{x+2} = 0,$$

quindi $y = x$ è un asintoto obliquo sia per $x \to +\infty$ che per $x \to -\infty$. Si ha poi

$$\lim_{x\to\pm-2^+} f(x) = \infty, \qquad \lim_{x\to\pm-2^-} f(x) = -\infty,$$

poiché $x^2 - 1 \to 3$ per $x \to 2^{\pm}$, mentre $x + 2$ tende a 0 da valori positivi per $x > -2$ e da valori negativi per $x < -2$. Quindi in $x = -2$ la funzione $f(x)$ ha un asintoto verticale. La derivata di $f(x)$ è

$$f'(x) = \frac{x^2 + 4x + 1}{(x+2)^2},$$

dove $(x + 2)^2 > 0\ \forall x \neq -2$. L'equazione di secondo grado $x^2 + 4x + 1 = 0$ ammette le due radici reali $x_1 = -2 - \sqrt{3}$ e $x_2 = -2 + \sqrt{3}$, quindi, tenendo conto che il segno el coefficiente di x^2 è positivo (vale 1), si ha $x^2 + 4x + 1 > 0$ per $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$ e $x^2 + 4x + 1 < 0$ per $x \in (x_1, x_2)$. Quindi la funzione $f(x)$ è crescente per $x \in (-\infty, x_1)$, ha un punto di massimo in $x = x_1$, è descrescente per $x \in (x_1, x_2)$, ha un punto di minimo in $x = x_2$ ed è crescente per $x \in (x_2, +\infty)$. La derivata seconda di $f(x)$ è

$$f''(x) = \frac{6}{(x+2)^3},$$

quindi $f''(x) > 0$ se $x > -2$ e $f''(x) < 0$ se $x < -2$: la funzione è convessa nell'intervallo $(-2, +\infty)$ ed è concava nell'intervallo $(-\infty, -2)$. Il grafico della funzione è rappresentato in Figura 9.30.

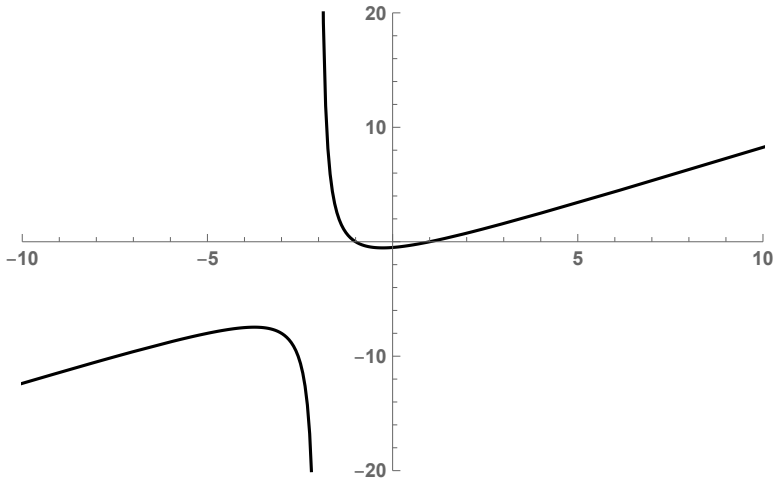


Figura 9.30: Grafico della funzione dell'esercizio 15.

16. Si ha $e^{x+\ln x^2} = e^x e^{\ln x^2}$. La funzione $\ln x^2$ è definita per ogni $x \neq 0$ (poiché $x^2 > 0$ per $x \neq 0$), quindi $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$. Inoltre risulta $e^{\ln x^2} = x^2$ per $x \neq 0$; possiamo perciò riscrivere la funzione come

$$f(x) = e^{x+\ln x^2} = x^2 e^x$$

per ogni $x \in D_f$. Poiché entrambe le funzioni x^2 e e^x tendono a $+\infty$ per $x \to +\infty$, si ha

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Inoltre $f(x)/x = x\, e^x$ per $x \neq 0$, così che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty,$$

da cui si evince che non esistono asintoti obliqui per $x \to +\infty$. Per $x \to -\infty$, si ha $e^x \to 0$; possiamo pertanto studiare il comportamento della funzione $f(x)$ per $x \to -\infty$ scrivendo $e^x = 1/e^{-x}$ e usando il fatto che $e^{-x} \to +\infty$ per $x \to -\infty$. Si trova, applicando il teorema di de l'Hôpital per calcolare la forma indeterminata,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{-e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{e^{-x}} = 0.$$

Il risultato ottenuto mostra l'esistenza di un asintoto orizzontale $y = 0$ per $x \to -\infty$. La funzione $f(x)$ non è definita in $x = 0$, d'altra parte esistono il limite destro e il limite sinistro per $x \to 0$:

$$\lim_{x\to0^{\pm}} x^2 e^x = 0.$$

Poiché i due limiti sono uguali la funzione $f(x)$ può essere estesa a una funzione $f_{\text{ext}}(x)$ continua in $\mathbb{R}$, ponendo

$$f_{\text{ext}}(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

La derivata di $f(x)$ è

$$f'(x) = e^x \left(2x + x^2\right) = e^x x \,(2 + x)\,,$$

quindi $f'(x) = 0$ per $x = 0$ e per $x = -2$. Si ha $f'(x) > 0$ se $x > 0$ e $x > -2$ (e quindi se $x > 0$) oppure se $x < 0$ e $x < -2$ (e quindi se $x < -2$), mentre $f'(x) < 0$ per $x \in (-2, 0)$. In conclusione $f(x)$ è crescente per $x \in (-\infty, -2)$ ha un punto di massimo in $x = -2$, è decrescente per $x \in (-2, 0)$, ha un punto di minimo in $x = 0$ ed è crescente per $x \in (0, +\infty)$; cfr. la Figura 9.31.

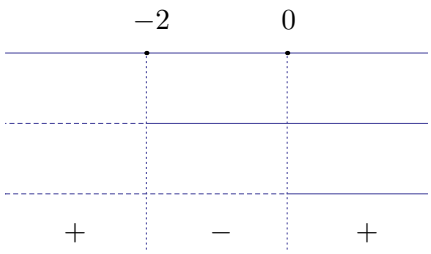


Figura 9.31: Studio del segno della derivata prima della funzione dell'esercizio 16.

La derivata seconda di $f(x)$ è

$$f''(x) = e^x \left(x^2 + 4x + 2\right),$$

quindi il segno di $f''(x)$ è determinato dal segno del polinomio $x^2 + 4x + 2$. L'equazione di secondo grado

$$x^2 + 4x + 2 = 0$$

ha due radici reali

$$x_1 = -2 - \sqrt{2}, \qquad x_2 = -2 + \sqrt{2},$$

dove $x_1 < -2 < x_2 < 0$. Tenendo conto che il segno del coefficiente di x^2 è positivo (vale 1), si ha $x^2 + 4x + 2 > 0$ per $x < x_1$ oppure per $x > x_2$, mentre $x^2 + 4x + 2 < 0$ per $x_1 < x < x_2$. Si trova perciò $f''(x) > 0$ per $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$ e $f''(x) < 0$ per $x \in (x_1, x_2) \Longrightarrow$ la funzione $f(x)$ è convessa per $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$ ed è concava per $x \in (x_1, x_2)$. I punti x_1 e x_2 sono punti di flesso obliquo, poiché $f'(x_1) \neq 0$ e $f'(x_2) \neq 0$. Il grafico della funzione è rappresentato in Figura 9.32.

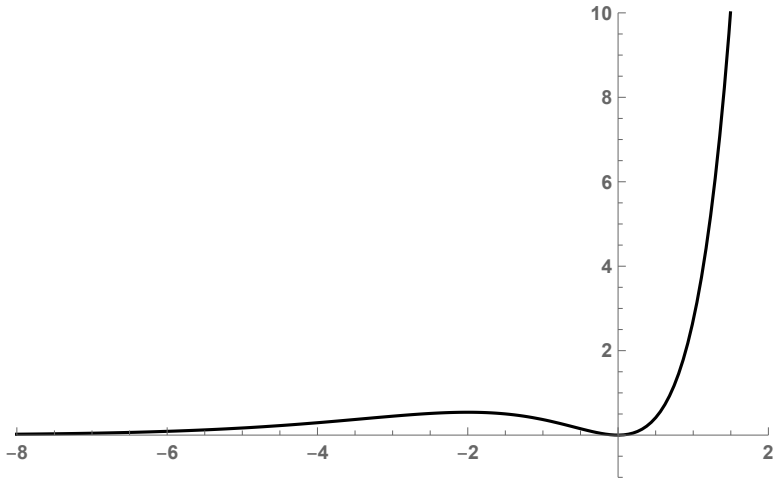


Figura 9.32: Grafico della funzione dell'esercizio 16.

17. La funzione
$$f(x) = x\, e^{-1/x^2}$$
è definita per ogni $x \neq 0$, quindi $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Per $x \to \pm\infty$, si ha $1/x^2 \to 0$, quindi $e^{-1/x^2} \to e^0 = 1$. Ne segue che
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} x \cdot \lim_{x\to\pm\infty} e^{-1/x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} x \cdot 1 = \pm\infty.$$
Per studiare l'esistenza di eventuali asintoti obliqui della forma $y = ax + b$, si calcola innanzitutto il limite
$$a := \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \cdot \lim_{x\to\pm\infty} e^{-1/x^2} = 1,$$
e, poiché a risulta finito, successivamente il limite
$$b := \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - x) = \lim_{x\to\pm\infty} x \left(e^{-1/x^2} - 1\right).$$
Per studiare l'ultimo limite (che è una forma indeterminata del tipo $\infty \cdot 0$), conviene cambiare variabile e definire $t = 1/x$, così che $t \to 0$ per $x \to \pm\infty$. Si ha allora
$$\lim_{x\to\pm\infty} x \left(e^{-1/x^2} - 1\right) = \lim_{t\to 0} \frac{e^{-t^2} - 1}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{-2te^{-t^2}}{1} = 0,$$
dove si è usato il teorema di de l'Hôpital. Quindi $b = 0$. La retta di equazione $y = x$ è quindi un asintoto obliquo per $x \to \pm\infty$. La derivata di $f(x)$ è
$$f'(x) = \frac{x^2 + 2}{x^2}\, e^{-1/x^2},$$
quindi $f'(x) > 0\ \forall x \neq 0$: la funzione $f(x)$ è crescente per ogni $x \in D_f$. Ragionando come prima si mostra facilmente che $f'(x) \to 0$ per $x \to 0^{\pm}$. Infatti, definendo $t = 1/x^2$, riscriviamo
$$f'(x) = \left(1 + \frac{2}{x^2}\right) e^{-1/x^2} = (1 + 2t)\, e^{-t} = \frac{1 + 2t}{e^t},$$
e quindi, usando che $t \to +\infty$ se $x \to 0^{\pm}$ e applicando due volte il teorema di de l'Hôpital, si trova
$$\lim_{x\to 0^{\pm}} f'(x) = \lim_{t\to+\infty} \frac{1 + 2t}{e^t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{2}{e^t} = 0.$$
La derivata seconda di $f(x)$ è
$$f''(x) = -\frac{4}{x^3} e^{-1/x^2} + \left(1 + \frac{2}{x^2}\right) \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2} = 2 \left(\frac{2 - x^2}{x^5}\right) e^{-1/x^2}.$$
Si vede quindi che $f''(x) = 0$ se e solo se $x^2 = 2$, ovvero $x = \pm\sqrt{2}$, mentre $f''(x) > 0$ se $2 - x^2 > 0$ e $x^5 > 0$ (ovvero se $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ e $x > 0$), oppure se $2 - x^2 < 0$ e $x^5 < 0$ (ovvero se $x \notin (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ e $x < 0$), e $f''(x) < 0$ se $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ e $x < 0$ oppure se $x \notin (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ e $x > 0$. In conclusione (cfr. la Figura 9.33)

- $f''(x) > 0$ (e quindi $f(x)$ è convessa) per $x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (0, \sqrt{2})$,
- $f''(x) < 0$ (e quindi $f(x)$ è concava) per $x \in (-\sqrt{2}, 0) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$.
- in $x = -\sqrt{2}$ e $x = \sqrt{2}$ si hanno punti di flesso obliquo.

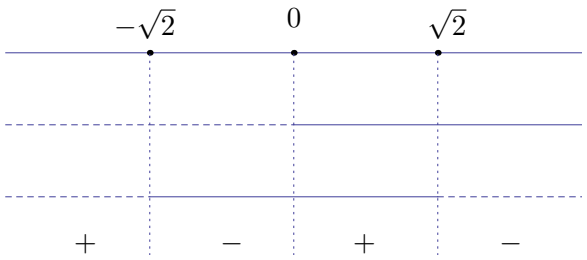


Figura 9.33: Studio del segno della derivata seconda della funzione dell'esercizio 17.

Si noti inoltre che

$$\lim_{x\to 0^{\pm}} f''(x) = 2 \lim_{t\to\pm\infty} \frac{2t^5 - t^3}{e^t} = \lim_{t\to\pm\infty} \frac{10t^4 - 3t^2}{e^t} = \lim_{t\to\pm\infty} \frac{40t^3 - 6t}{e^t}$$
$$= \lim_{t\to\pm\infty} \frac{120t^2 - 6}{e^t} = \lim_{t\to\pm\infty} \frac{240t}{e^t} = \lim_{t\to\pm\infty} \frac{240}{e^t} = 0.$$

Quindi, sebbene la funzione $f(x)$ non sia definita in $x = 0$, essa tende a 0 per $x \to 0^{\pm}$ insieme con la sua derivata prima e la sua derivata seconda. Il grafico della funzione è rappresentato in Figura 9.34.

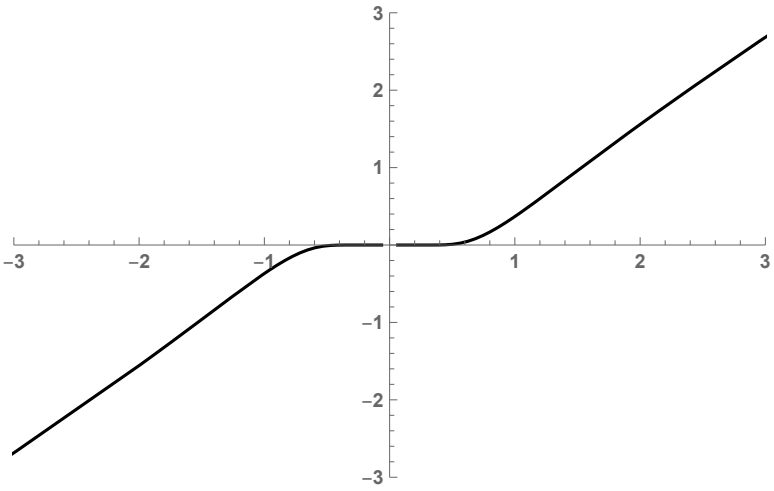


Figura 9.34: Grafico della funzione dell'esercizio 17.

18. La funzione

$$f(x) = \ln\left(x^2 - 3x + 2\right)$$

è definita per x tale che $x^2 - 3x + 2 > 0$. L'equazione di secondo grado $x^2 - 3x + 2 = 0$ ha due radici reali: $x = 1$ e $x = 2$. Quindi, tenendo conto che il coefficiente di x^2 è positivo si ha $f(x) > 0$ per $x < 1$ oppure per $x > 2$. Da qui concludiamo che $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x < 1 \text{ oppure } x > 2\} = (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$. Poiché

$$\lim_{x \to \pm\infty} x^2 - 3x + 2 = +\infty,$$

usando il fatto che il logaritmo è una funzione continua si trova

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \ln\left(\lim_{x \to \pm\infty} \left(x^2 - 3x + 2\right)\right) = +\infty.$$

Per mostrare che non esistono asintoti obliqui, si osserva che

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\dfrac{2x-3}{x^2-3x+2}}{x} \\
&= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x-3}{x(x^2-3x+2)} \\
&= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x-3}{x^3-3x^2+2x)} \\
&= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2}{3x^2-6x+2)} \\
&= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2}{3x^2\left(1 - \dfrac{2}{x} + \dfrac{2}{x^2}\right)} = 0.
\end{aligned}$$

In effetti la funzione $f(x)$ diverge logaritmicamente per $x \to \pm\infty$ (quindi più lentamente di qualsiasi potenza). La derivata di $f(x)$ è

$$f'(x) = \frac{2x-3}{x^2-3x+2}.$$

Il denominatore è positivo per $x \in D_f$. Il numeratore si annulla per $x = 3/2$, è positivo per $x > 3/2$ e negativo per $x < 3/2$. Il valore $x = 3/2$ appartiene all'intervallo $(1, 2)$ che si trova al di fuori del dominio D_f: ne concludiamo che, all'interno del dominio D_f, si ha

- $f'(x) > 0$ (e quindi la funzione $f(x)$ è crescente) per $x > 2$;
- $f'(x) < 0$ (e quindi la funzione $f(x)$ è decrescente) per $x < 1$.

La derivata seconda di $f(x)$ è

$$f''(x) = -\frac{2x^2-6x+5}{(x^2-3x+2)^2}.$$

Anche per la derivata seconda il denominatore è sempre positivo. Inoltre, il polinomio quadratico $2x^2 - 6x + 5$ al numeratore è sempre positivo poiché il discriminante dell'equazione di secondo grado

$$2x^2 - 6x + 5 = 0$$

è $\Delta = 36-40 = -4 < 0$, e quindi l'equazione non ammette radici reali. poiché il coefficiente 2 di x^2 è positivo ne segue che $2x^2 - 6x + 5 > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$. Ne segue che $f''(x) < 0\ \forall x \in D_f$, quindi la funzione $f(x)$ è concava per ogni $x \in D_f$. Il grafico della funzione è rappresentato in Figura 9.35.

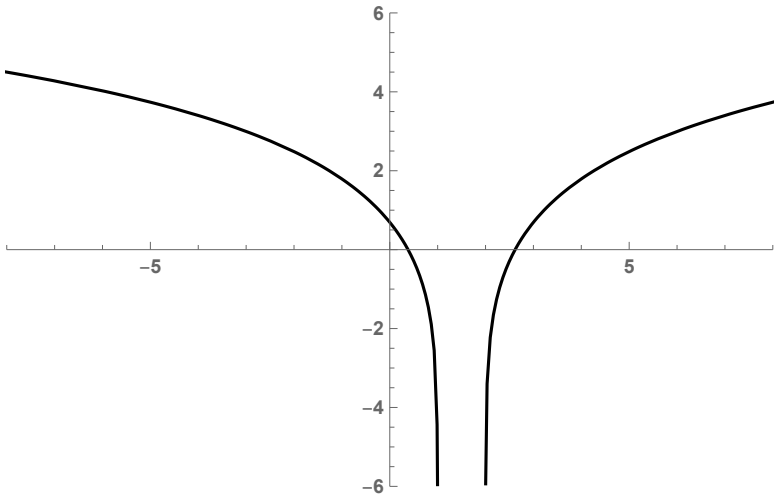


Figura 9.35: Grafico della funzione dell'esercizio 18.

19. La funzione

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{4x + 2}$$

è definita per ogni $x \neq -1/2$, quindi $D_f = (-\infty, -1/2) \cup (-1/2, +\infty)$. Il polinomio al numeratore è sempre positivo (poiché il discriminante dell'equazione di secondo grado

$$x^2 + x + 1 = 0$$

è $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$ e il segno del coefficiente di x^2 è positivo). Quindi $f(x) > 0$ per $x \in (-1/2, +\infty)$ e $f(x) < 0$ per $x \in (-\infty, -1/2)$. La funzione non attraversa mai l'asse x e attraversa l'asse y in $y = f(0) = 1/2$. Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2 + x + 1}{4x + 2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x + 1}{4} = \pm\infty.$$

Per studiare l'esistenza di eventuali asintoti della forma $y = ax + b$ si calcola prima il limite

$$\begin{aligned} a :&= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2 + x + 1}{x(4x + 2)} \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2 + x + 1}{4x^2 + 2x)} \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x + 1}{8x + 2} \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

e successivamente, poiché a è finito, il limite

$$\begin{aligned} b :&= \lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-\frac{1}{4}x\right)\\ &= \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2+x+1}{4x+2}-\frac{1}{4}x\right)\\ &= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{4x^2+4x+4-4x^2-2x}{4(4x+2)}\\ &= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x+4}{16x+8}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2}{16}=\frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Si noti che, per entrambi i limiti, si tratta di studiare forme indeterminate che possono essere studiate utilizzando il teorema di de l'Hôpital. Si ha quindi un asintoto obliquo

$$y=\frac{1}{4}+\frac{1}{8},$$

sia per $x\to+\infty$ che per $x\to-\infty$. Si ha inoltre

$$\lim_{x\to-2^+} f(x)=+\infty, \qquad \lim_{x\to-2^-} f(x)=-\infty,$$

poiché $x^2+x+1\to 3$ per $x\to-2^{\pm}$, mentre il denominatore tende a 0 da valori positivi quando $x\to-2^+$ e da valori negativi quando $x\to-2^-$. In $x=-2$ la funzione ha quindi un asintoto verticale. La derivata di $f(x)$ è

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{4x^2+4x-2}{(4x+2)^2}\\ &= \frac{1}{2}\,\frac{2x^2+2x-1}{(2x+1)^2}. \end{aligned}$$

Poiché il denominatore è sempre positivo per $x\in D_f$ si ha $f'(x)>0$ se e solo se

$$2x^2+2x-1>0.$$

L'equazione di secondo grado $2x^2+2x-1=0$ ha le due radici

$$x_1=\frac{1}{2}\cdot\left(-1-\sqrt{3}\right), \qquad x_2=\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{3}\right),$$

quindi tenendo conto che il coefficiente di x^2 è positivo, si trova

- $f'(x)>0$ per $x<x_1$ e per $x>x_2$,
- $f'(x)<0$ per $x\in(x_1,x_2)$ tale che $x\neq -1/2$.

In conclusione la funzione $f(x)$ è crescente per $x\in(-\infty,x_1)$, ha un massimo in $x=x_1$, è decrescente negli intervalli $(x_1,-1/2)$ e $(-1/2,x_2)$, ha un minimo in $x=x_2$ ed è crescente

per $x \in (x_2, +\infty)$. La derivata seconda di $f(x)$ è

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{1}{2}\frac{(4x+2)(2x+1)^2 - 4(2x^2+2x-1)(2x+1)}{(2x+1)^4} \\ &= \frac{1}{2}\frac{(4x+2)(2x+1) - 4(2x^2+2x-1)}{(2x+1)^3} \\ &= \frac{1}{2}\frac{(8x^2+8x+2-8x^2-8x+4)}{(2x+1)^3} \\ &= \frac{3}{(2x+1)^3}, \end{aligned}$$

quindi $f''(x) > 0$ per $x > -1/2$ e $f''(x) < -1/2$: la funzione è convessa nell'intervallo $(-1/2, +\infty)$ ed è concava nell'intervallo $(-\infty, -1/2)$. Il grafico della funzione è rappresentato in Figura 9.36.

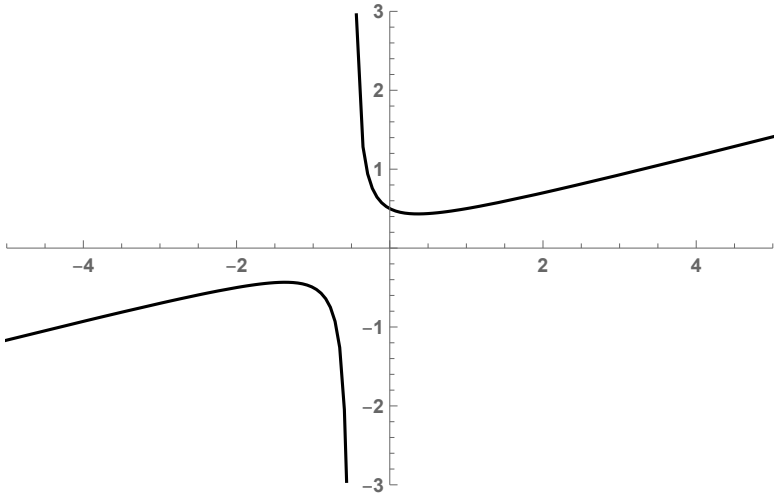


Figura 9.36: Grafico della funzione dell'esercizio 19.

20. Poiché $x^4 + 1 > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$, la funzione

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^4+1}{x^2}}$$

è definita per ogni $x \neq 0$, quindi $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Si ha $f(x) > 0$ per ogni $x \in D_f$. Quindi la funzione non attraversa mai gli assi coordinati. Per studiare il comportamento della funzione agli estremi, si calcolano i limiti

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt{\frac{x^4\left(1+\frac{1}{x^4}\right)}{x^2}} = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt{\frac{x^4}{x^2}} = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt{x^2} = +\infty.$$

Inoltre si ha

$$\lim_{x\to 0^{\pm}} f(x) = +\infty.$$

La funzione ha quindi un asintoto verticale in $x = 0$. Per studiare l'esistenza di eventuali asintoti della forma $y = ax + b$, si verifica innanzitutto se il limite

$$a := \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$$

è finito. Si trova, per $x \to +\infty$,

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x^4\left(1+\frac{1}{x^4}\right)}{x^2}} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x^4\left(1+\frac{1}{x^4}\right)}{x^2\cdot x^2}} \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt{\frac{x^4}{x^4}} = 1, \end{aligned}$$

dove si è tenuto conto che $x = \sqrt{x^2}$ per $x > 0$. Analogamente, osservando che per $x < 0$ si ha $x = -(-x) = -\sqrt{(-x)^2} = -\sqrt{x^2}$, si trova, per $x \to -\infty$,

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x^4\left(1+\frac{1}{x^4}\right)}{x^4}} \\ &= -\lim_{x\to\pm\infty} \sqrt{\frac{x^4}{x^2\cdot x^2}} = -1. \end{aligned}$$

Poiché a è finito, si calcola, per $x \to +\infty$,

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x\to+\infty} (f(x) - x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{\frac{x^4+1}{x^2}} - x\right) \\ &= \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{\frac{x^4+1}{x^2}} - \sqrt{\frac{x^4}{x^2}}\right) \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^4+1} - \sqrt{x^4}}{\sqrt{x^2}} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^4+1} - \sqrt{x^4}}{\sqrt{x^2}} \cdot \frac{\sqrt{x^4+1} + \sqrt{x^4}}{\sqrt{x^4+1} + \sqrt{x^4}} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4+1-x^4}{\sqrt{x^2}\cdot(\sqrt{x^4+1} + \sqrt{x^4})} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2}\cdot(\sqrt{x^4+1} + \sqrt{x^4})} = 0, \end{aligned}$$

Analogamente si trova $b = 0$ per $x \to -\infty$. In conclusione la funzione $f(x)$ ha un asintoto obliquo $y = x$ per $x \to +\infty$ e un asintoto obliquo $y = -x$ per $x \to -\infty$. La derivata di $f(x)$ è

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{x^4+1}{x^2}}} \frac{4x^3 \cdot x^2 - 2x(x^4+1)}{x^4}$$
$$= \frac{2x(2x^4 - x^4 - 1)}{2x^4\sqrt{\dfrac{x^4+1}{x^2}}} = \frac{x^4-1}{x^3\sqrt{\dfrac{x^4+1}{x^2}}}.$$

A numeratore si ha $x^4 - 1 = 0$ se e solo se $x = \pm 1$, mentre $x^4 - 1 > 0$ per $x < -1$ oppure per $x > 1$ e $x^4 - 1 < 0$ per $-1 < x < 1$. Ne segue che $f'(x) > 0$ per $x \in (-1, 0) \cup (1, +\infty)$ e $f'(x) < 0$ per $x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$; cfr. la Figura 9.37. Si ha $f'(x)$ per $x = -1$ e per $x = +1$, che sono entrambi punti di mimimo.

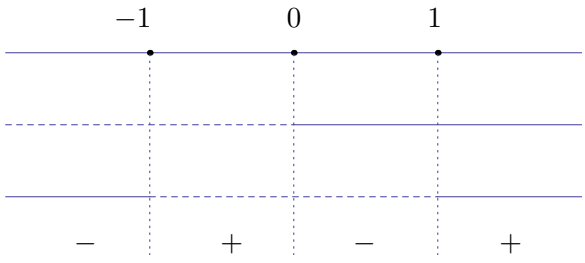


Figura 9.37: Studio del segno della derivata prima della funzione dell'esercizio 20.

La derivata seconda di $f(x)$ è

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{4x^3\left(x^3\sqrt{\frac{x^4+1}{x^2}}\right) - \left(x^4-1\right)\left(3x^2\sqrt{\frac{x^4+1}{x^2}} + x^3\frac{x^4-1}{x^3\sqrt{\frac{x^4+1}{x^2}}}\right)}{x^6\cdot\frac{x^4+1}{x^2}} \\
&= \frac{4x^3\left(x^3\cdot\frac{x^4+1}{x^2}\right) - \left(x^4-1\right)\left(3x^2\cdot\frac{x^4+1}{x^2} + x^3\frac{x^4-1}{x^3}\right)}{x^6\cdot\frac{x^4+1}{x^2}\sqrt{\frac{x^4+1}{x^2}}} \\
&= \frac{4x^4\left(x^4+1\right) - \left(x^4-1\right)\left(3\left(x^4+1\right) + \left(x^4-1\right)\right)}{x^4\left(x^4+1\right)\sqrt{\frac{x^4+1}{x^2}}} \\
&= \frac{4x^8+4x^4-3x^8+3-x^8+2x^4-1}{x^4(x^4+1)\sqrt{\frac{x^4+1}{x^2}}} \\
&= \frac{6x^4+2}{x^4(x^4+1)\sqrt{\frac{x^4+1}{x^2}}},
\end{aligned}
$$

da cui si vede che $f''(x) > 0$ per ogni x per cui la funzione è definita. Quindi $f(x)$ è convessa per ogni $x \in D_f$. Il grafico della funzione è rappresentato in Figura 9.38.

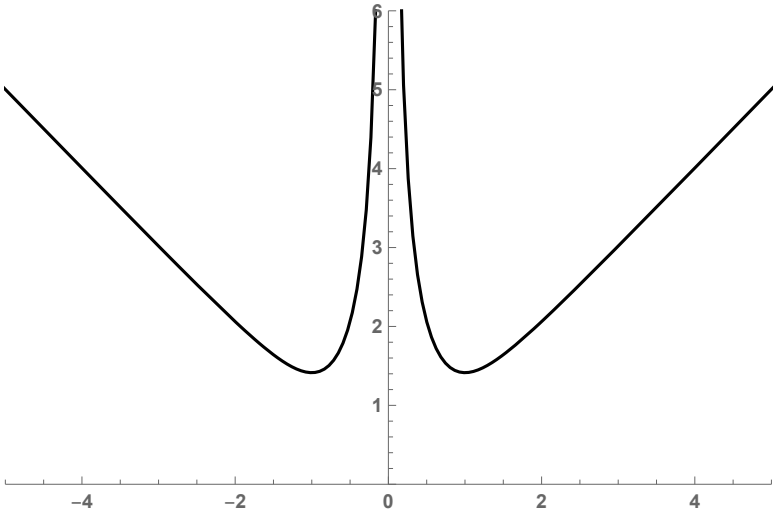


Figura 9.38: Grafico della funzione dell'esercizio 20.

21. La funzione

$$f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$$

è definita per ogni $x \neq 1$, quindi $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 1\} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$. Poiché $(x-1)^2 > 0 \ \forall x \neq 1$, si ha $f(x) > 0$ se $x > 0$ e $f(x) < 0$ se $x < 0$. Inoltre $f(0) = 0$, quindi $f(x)$ attraversa gli assi coordinati solo nell'origine. Usando il teorema di de l'Hôpital si trova

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^2}{2(x-1)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{6x}{2} = \pm\infty.$$

La presenza di eventuali asintoti della forma $y = ax + b$ si studia calcolando innanzitutto il limite

$$\begin{aligned} a :&= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x(x-1)^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x^3 - 2x^2 + x} \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^2}{3x^2 - 4x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{6x}{6x - 4} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{6}{6} = 1. \end{aligned}$$

Poiché a è finito, si studia allora il limite

$$\begin{aligned} b :&= \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - x) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^3}{(x-1)^2} - x \right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3 - x(x-1)^2}{(x-1)^2} \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3 - x^3 + 2x^2 - x}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2 - x}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4x - 1}{2x - 2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4}{2} = 2. \end{aligned}$$

Ne concludiamo che $y = x + 2$ è un asintoto obliquo per $x \to \pm\infty$. Si ha inoltre

$$\lim_{x\to 1^\pm} f(x) = +\infty,$$

poiché $x^3 \to 1$ per $x \to 1^\pm$, mentre $(x-1)^2 \to 0$ da valori positivi per $x \to 1^\pm$. Quindi la funzione ha un asintoto verticale in $x = 1$. La derivata di $f(x)$ è

$$f'(x) = \frac{3x^2(x-1)^2 - 2x^3(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{3x^2(x-1) - 2x^3}{(x-1)^3} = \frac{x^3 - 3x^2}{(x-1)^3} = \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3},$$

così che $f(x) = 0$ per $x = 0$ e per $x = 3$. Inoltre, per $x \neq 0$, si può ragionare come segue: si ha $(x-1)^3 > 0$ per $x > 1$ e $(x-1)^3 < 0$ per $x < 1$, così che abbiamo che $f'(x) > 0$ quando $x > 1$ e $x > 3$ oppure $x < 1$ e $x < 3$ e $f'(x) > 0$ quando $x > 1$ e $x < 3$ oppure $x < 1$ e $x > 3$. Di conseguenza $f'(x) > 0$, e quindi $f(x)$ è crescente, per $x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$, mentre $f'(x) < 0$, e quindi $f(x)$ è decrescente, per $x \in (1, 3) \setminus \{0\}$ (in $x = 0$ si ha $f'(0) = 0$). Infine la funzione ha in $x = 3$ un punto di minimo e in $x = 0$ un punto di flesso orizzontale.

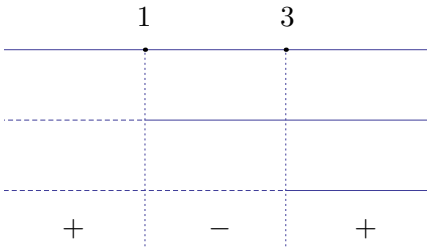


Figura 9.39: Studio del segno della derivata prima della funzione dell'esercizio 21.

La derivata seconda di $f(x)$ è

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(3x^2-6x)(x-1)^3 - 3(x^3-3x^2)(x-1)^2}{(x-1)^6} \\ &= \frac{(3x^2-6x)(x-1) - 3(x^3-3x^2)}{(x-1)^4} \\ &= \frac{3x^3-3x^2-6x^2+6x-3x^3+9x^2}{(x-1)^4} \\ &= \frac{6x}{(x-1)^4}. \end{aligned}$$

Quindi $f''(x) = 0$ se e solo se $x = 0$. Poiché $f'(0) = 0$ ritrociamo quindi che $x = 0$ è un punto di flesso orizzontale. Per $x \neq 1$, si ha $f''(x) > 0$ se $x > 0$ e $f''(x) < 0$ per $x < 0$: quindi la funzione è convessa negli intervalli $(0, 3)$ e $(3, +\infty)$ ed è concava nell'intervallo $(-\infty, 0)$. Il grafico della funzione $f(x)$ è rappresentato in Figura 9.40.

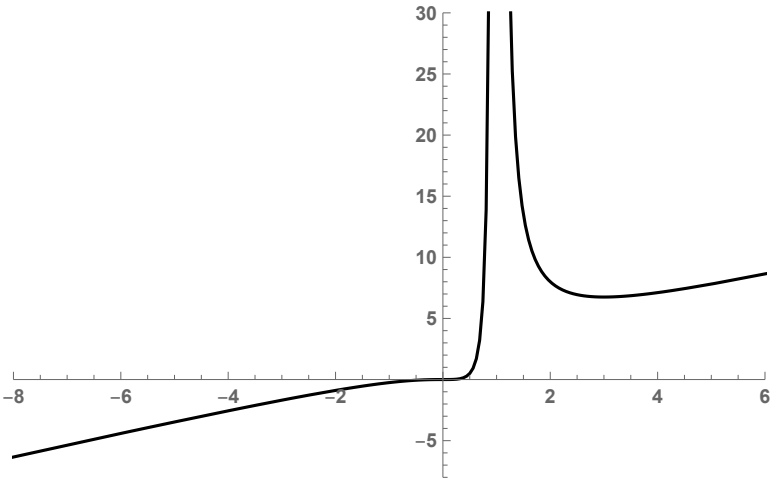


Figura 9.40: Grafico della funzione dell'esercizio 21.

22. La funzione

$$f(x) = \frac{x^2 + 2 - x}{x^2 + 1 - x}$$

è definita per ogni x tale che $x^2 + 1 - x \neq 0$. L'equazione di secondo grado

$$x^2 + 1 - x = 0$$

non ammette radici reali poiché il suo discriminante è $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$, quindi, $x^2 + 1 - x \neq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$. Più precisamente, tenendo conto che il coefficiente di ^{2} è positivo, possiamo concludere che $x^2 + 1 - x > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$. Si ha, applicando il teorema di de l'Hôpital,

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2\left(1 + \dfrac{2}{x^2} - \dfrac{1}{x}\right)}{x^2\left(1 + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1,$$

quindi la funzione $f(x)$ ha un asintoto orizzontale $y = 1$ sia per $x \to +\infty$ che per $x \to -\infty$. La derivata di $f(x)$ è

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x-1)(x^2+1-x) - (x^2+2-x)(2x-1)}{(x^2+1-x)^2} \\ &= \frac{2x^3 + 2x - 2x^2 - x^2 - 1 + x - 2x^3 + x^2 - 4x + 2 + 2x^2 - x}{(x^2+1-x)^2} \\ &= \frac{1-2x}{(x^2+1-x)^2}. \end{aligned}$$

Quindi $f'(x) = 0$ per $x = 1/2$, mentre $f'(x) > 0$ per $x < 1/2$ e $f'(x) < 0$ per $x > 1/2$: la funzione $f(x)$ è crescente nell'intervallo $(-\infty, 1/2)$ ha un punto di massimo in $x = 1/2$ ed è decrescente nell'intervallo $(1/2, +\infty)$. La derivata seconda di $f(x)$ è

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-2(x^2+1-x) - (1-2x)2(2x-1)}{(x^2+1-x)^3} \\ &= 2\frac{-x^2 - 1 + x + (1-2x)^2}{(x^2+1-x)^3} \\ &= 2\frac{-x^2 - 1 + x + 1 + 4x^2 - 4x}{(x^2+1-x)^3} \\ &= 2\frac{3x^2 - 3x}{(x^2+1-x)^3} \\ &= \frac{6x(x-1)}{(x^2+1-x)^3}. \end{aligned}$$

Tenendo conto che il denominatore è sempre positivo, si ha $f''(x) = 0$ per $x = 0$ e $x = 1$, mentre $f''(x) > 0$ per $x < 0$ oppure $x > 1$ e $f''(x) < 0$ per $0 < x < 1$ (cfr. la Figura 9.41).

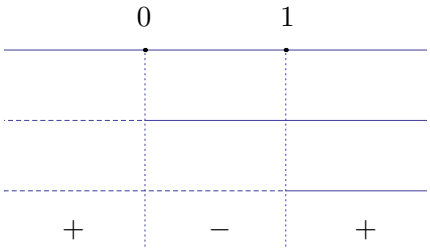


Figura 9.41: Studio del segno della derivata seconda della funzione dell'esercizio 23.

Ne segue che la funzione $f(x)$ è convessa negli intervalli $(-\infty, 0)$ e $(1, +\infty)$ e concava nell'intervallo $(0, 1)$. Inoltre ha un punto di flesso obliquo in $x = 0$ e in $x = 1$. Il grafico della funzione è rappresentato in Figura 9.42.

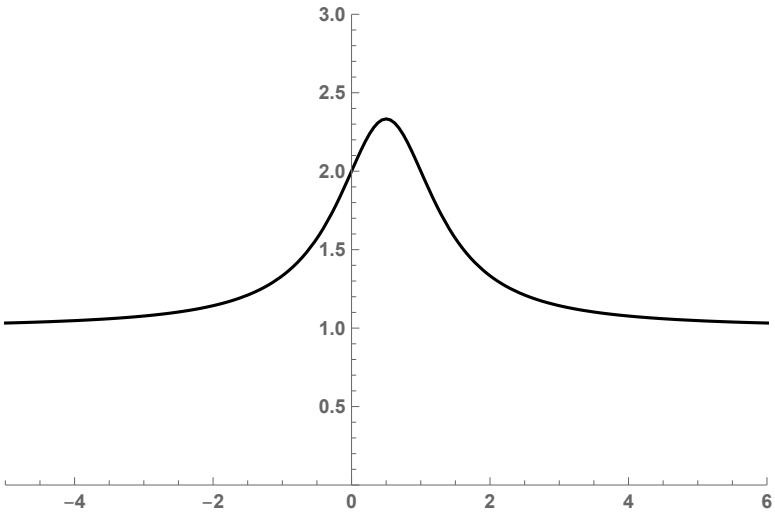


Figura 9.42: Grafico della funzione dell'esercizio 22.

23. La funzione

$$f(x) = e^{x^2-x+1}$$

è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, quindi $D_f = \mathbb{R}$. Inoltre $f(x) > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$. Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(x^2 - x + 1\right) = \lim_{x\to\pm\infty} x^2 \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to\pm\infty} x^2 = +\infty,$$

quindi, usando la continuità della funzione esponenziale, si ottiene

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \exp\left(\lim_{x\to\pm\infty} \left(x^2 - x + 1\right)\right) = +\infty.$$

Poiché, per il teorema di de l'Hôpital, si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{e^{x^2-x+1}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(2x-1)e^{x^2-x+1}}{1} = \pm\infty,$$

possiamo escludere l'esistenza di asintoti obliqui. La derivata di $f(x)$ è

$$f'(x) = e^{x^2-x+1}\,(2x-1)\,,$$

quindi $f'(x) > 0$ per $x > 1/2$, $f'(x) = 0$ per $x = 1/2$ e $f'(x) < 0$ per $x < 1/2$: ne concludiamo che la funzione è decrescente nell'intervallo $(-\infty, 1/2)$, ha un punto di minimo assoluto in $x = 1/2$ ed è crescente nell'intervallo $(1/2, +\infty)$. La derivata seconda di $f(x)$ è

$$f''(x) = e^{x^2-x+1}\left(4x^2-4x+3\right),$$

quindi il segno di $f''(x)$ è determinato dal segno del polinomio $4x^2 - 4x + 3$. Si ha

$$4x^2 - 4x + 3 > 0$$

poiché il discriminante dell'equazione di secondo grado è $\Delta = 16 - 48 = 32 < 0$ e il coefficiente di x^2 è positivo. Quindi la funzione è convessa per ogni $x \in \mathbb{R}$. Il grafico della funzione è rappresentato in Figura 9.43.

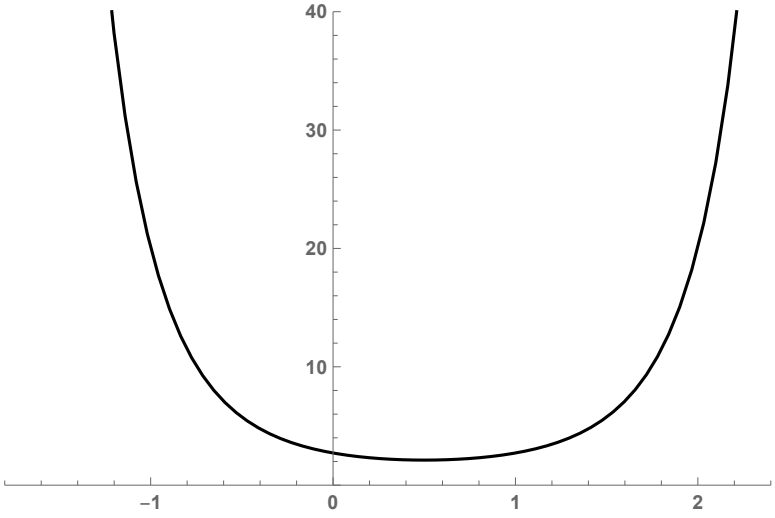


Figura 9.43: Grafico della funzione dell'esercizio 23.

24. L'equazione di secondo grado

$$x^2 + x + 1$$

ha discriminante $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$, quindi non ammette radici reali. Poiché il segno del coefficiente di x^2 è positivo, il polinomio $x^2 + x + 1$ è sempre positivo, quindi il dominio della funzione

$$f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$$

è $D_f = \mathbb{R}$. Inoltre $f(x) > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$, quindi la funzione non attraversa mai l'asse x. Attraversa invece l'asse y in $y = f(0) = 1$. Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt{x^2\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} = +\infty.$$

Inoltre, tenendo conto che $x = \sqrt{x^2}$ per $x > 0$ e $x = -\sqrt{x^2}$ per $x < 0$, si ha

$$a := \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt{\frac{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2}} = \pm 1.$$

Per concludere se esistano, per $x \to \pm\infty$, asintoti obliqui della forma $y = ax + b$, poiché abbiamo trovato $a = \pm 1$, resta da studiare, per $x \to \pm\infty$, il limite

$$\begin{aligned}
b &:= \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) \mp x) \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} \left(\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2}\right) \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} \left(\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2}\right) \cdot \frac{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2}} \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+x+1-x^2}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2}} \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2}} \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{|x|\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)} \\
&= \pm\frac{1}{2},
\end{aligned}$$

che mostra che esistono un asintoto obliquo

$$y = x + \frac{1}{2}$$

per $x \to +\infty$ e un asintoto obliquo

$$y = -x - \frac{1}{2}$$

per $x \to -\infty$. La derivata di $f(x)$ è

$$f'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}},$$

quindi $f'(x) > 0$ per $x > -1/2$ e $f'(x) < 0$ per $x < -1/2$: la funzione $f(x)$ è decrescente nell'intervallo $(-\infty, -1/2)$, ha un punto di minimo assoluto in $x = -1/2$ ed è crescente

nell'intervallo $x \in (-1/2, +\infty)$. La derivata seconda di $f(x)$ è

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{x^2+x+1} - \dfrac{(2x+1)^2}{2\sqrt{x^2+x+1}}}{x^2+x+1} \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{4(x^2+x+1) - (2x+1)^2}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}} \\ &= \frac{3}{4(x^2+x+1)^{3/2}}, \end{aligned}$$

quindi $f''(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$. Ne segue che la funzione $f(x)$ è convessa su tutto l'asse reale. Il grafico è rappresentato in Figura 9.44.

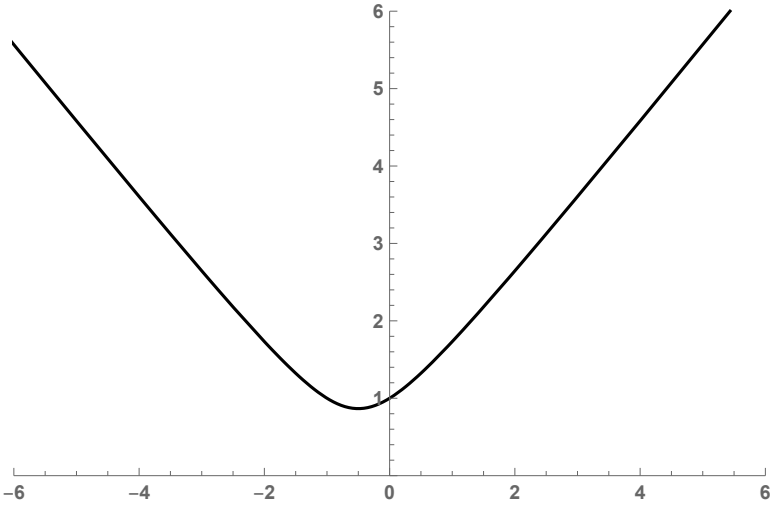


Figura 9.44: Grafico della funzione dell'esercizio 24.

25. La funzione

$$f(x) = (x-2)^{2/3} + (x-4)^{2/3}$$

è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, quindi il suo dominio è $D_f = (-\infty, +\infty)$. Inoltre si ha $f(x) \geq 0$; in particolare $f(x) = 0$ se e solo se $x = 2$ oppure $x = 4$. Ne concludiamo che il grafico della funzione interseca l'asse x nei punti $x = 2$ e $x = 4$, mentre attraversa l'asse y in $y = f(0) = 2^{2/3} + 4^{2/3} = 4^{1/3} + 16^{1/3}$. Inoltre si ha

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty.$$

La derivata di $f(x)$ è

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2}{3}(x-2)^{-1/3} + \frac{2}{3}(x-4)^{-1/3} \\ &= \frac{2}{3}\left(\frac{1}{(x-2)^{1/3}} + \frac{1}{(x-4)^{1/3}}\right) \\ &= \frac{2}{3}\left(\frac{(x-4)^{1/3} + (x-2)^{1/3}}{\big((x-2)(x-4)\big)^{1/3}}\right), \end{aligned}$$

che è definita per ogni $x \neq 2, 4$. Per discutere il segno di $f'(x)$, distinguiamo i seguenti casi:

- se $x < 2$, si ha $x-2 < 0$ e $x-4 < 0 \Longrightarrow (x-2)^{1/3} < 0$ e $(x-4)^{1/3} < 0 \Longrightarrow (x-2)(x-4) > 0$, così che il numeratore di $f'(x)$ è negativo e il suo denominatore è positivo $\Longrightarrow f'(x) < 0$;
- se $x > 4$, si ha $x-2 > 0$ e $x-4 > 0 \Longrightarrow (x-2)^{1/3} > 0$ e $(x-4)^{1/3} > 0 \Longrightarrow (x-2)(x-4) > 0$, così che sia il numeratore che il denominatore di $f'(x)$ sono positivi $\Longrightarrow f'(x) > 0$;
- se $x \in (2,4)$, si ha $x-2 > 0$ e $x-4 < 0 \Longrightarrow (x-2)^{1/3} > 0$ e $(x-4)^{1/3} < 0 \Longrightarrow (x-2)(x-4) < 0$, così che il denominatore di $f'(x)$ è negativo; per determinare il segno del numeratore bisogna studiare il segno della funzione

  $$g(x) := (x-4)^{1/3} + (x-2)^{1/3}, \qquad 2 < x < 4.$$

  Si ha $g(x) > 0$ se

  $$(x-4)^{1/3} > -(x-2)^{1/3} = (2-x)^{1/3}.$$

  Poiché la funzione $t \mapsto t^{1/3}$ è crescente, l'ultima relazione è soddisfatta se e solo se $x-4 > 2-x$, ovvero se e solo se $2x-6 > 0$, che implica $x > 3$; ne concludiamo che $g(x) > 0$ per $x \in (3,4)$, mentre $g(x) < 0$ per $x \in (2,3) \Longrightarrow f'(x) > 0$ se $x \in (2,3)$ e $f'(x) < 0$ se $x \in (3,4)$.

In conclusione si ha la situazione illustrata nella Figura 9.45.

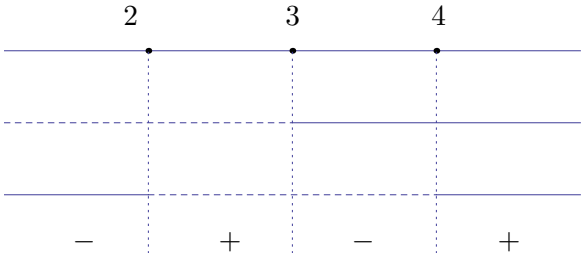


Figura 9.45: Studio del segno della derivata prima della funzione dell'esercizio 25.

In particolare la funzione ha un punto di massimo relativo in $x = 0$. La derivata seconda di $f(x)$ è

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)(x-2)^{-4/3} + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)(x-4)^{-4/3} \\ &= -\frac{2}{9}\left((x-2)^{-4/3} + (x-4)^{-4/3}\right), \end{aligned}$$

che, analogamente alla derivata prima, è definita per ogni $x \neq 2, 4$. Si deduce che $f''(x) < 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ per cui è definita (cioè per ogni $x \neq 2, 4$), dal momento che le funzioni $(x-2)^{-4/3}$ e $(x-4)^{-4/3}$ sono sempre strettamente positive dove sono definite. Quindi la funzione $f(x)$ è concava in ciascuno dei tre intervalli $(-\infty, 2)$, $(2, 4)$ e $(4, +\infty)$ in cui è derivabile. Il grafico della funzione $f(x)$ è rappresentato nella Figura 9.46.

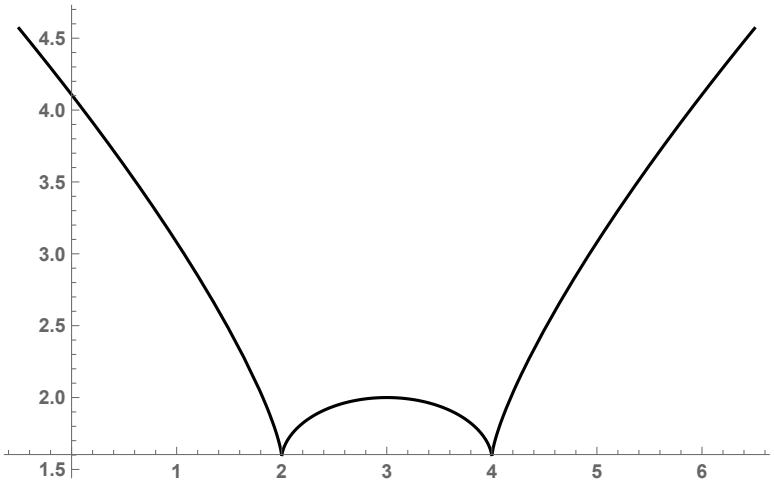


Figura 9.46: Grafico della funzione dell'esercizio 25.

26. La funzione

$$f(x) = \sqrt{x^3 - 4x}$$

è definita i valori $x \in \mathbb{R}$ tali che $x^3 - 4x \geq 0$. Si ha $x^3 - 4x = x(x^2 - 4)$, quindi $x^3 - 4x \geq 0$ se $x \geq 0$ e $x^2 - 4 \geq 0$ oppure se $x \leq 0$ e $x^2 - 4 \leq 0$. Il segno di $x^2 - 4$ si deduce dallo studio della disequazione $x^2 - 4 \geq 0$: tale disequazione è soddisfatta se $x \geq 2$ o $x \leq -2$. In conclusione si ha la situazione rappresentata in Figura 9.47: $x^3 - 4x \geq 0$ per $x \in [-2, 0]$ oppure per $x \geq 0$.

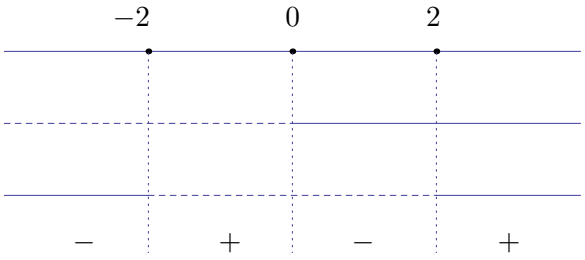


Figura 9.47: Studio del segno di $x^3 - 4x$.

Quindi il dominio della funzione $f(x)$ è $D_f = [-2, 0] \cup [2, +\infty)$. Inoltre si ha $f(x) \geq 0$ $\forall x \in D_f$; in particolare $f(x) = 0$ se e solo se $x = -2$ oppure $x = 0$ oppure $x = 2$.

Per studiare il comportamento della funzione per $x \to +\infty$, si studia il limite

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^3 - 4x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^3 \left(1 - \frac{4}{x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty} x^{3/2} = +\infty.$$

Poiché, ragionando in maniera analoga, si trova

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x^3 - 4x}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x \left(1 - \frac{4}{x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty,$$

ne concludiamo che non esistono asintoti (né orizzontali né obliqui) per $x \to +\infty$. La derivata di $f(x)$ è

$$f'(x) = \frac{3x^2 - 4}{2\sqrt{x^3 - 4x}}. \tag{9.1}$$

Il denominatore è sempre positivo (per i valori di $x \in D_f$), quindi il segno di $f'(x)$ è determinato dal segno del numeratore: si ha $f'(x) = 0$ se e solo se $x^2 = 4/3$, ovvero se e solo se $x = 2/\sqrt{3}$ oppure $x = -2/\sqrt{3}$. D'altra parte si ha $2/\sqrt{3} \in (0, 2)$, quindi $2/\sqrt{3}$ non appartiene al dominio della funzione. Ne segue che l'unico punto stazionario di $f(x)$ è $x_0 := -2/\sqrt{3} \in (-2, 0)$. Poiché $3x^2 - 4 \geq 0$ per $x \geq 2\sqrt{3}$ oppure per $x \leq -2\sqrt{3}$, mentre $3x^2 - 4 < 0$ per $x \in (-2/\sqrt{3}, 2/\sqrt{3})$, se ci limitiamo ai valori $x \in D_f$, possiamo concludere che $f'(x) > 0$ (e quindi $f(x)$ è crescente) se $x \in (-2, -2/\sqrt{3})$ oppure $x \in (0, +\infty)$, mentre $f'(x) < 0$ (e quindi $f(x)$ è decrescente) se $x \in (-2/\sqrt{3}, 0)$. In particolare si vede che $x = x_0$ è un punto di massimo relativo per la funzione $f(x)$. Dall'espressione della derivata prima si vede anche che

$$\lim_{x\to-2^+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to0^-} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to2^+} f(x) = +\infty,$$

da cui si deduce che la tangente al grafico forma con l'asse delle ascisse un angolo $\pi/2$ per $x = -2$ e per $x = 2$, e un angolo $-\pi/2$ per $x = 0$ (in altre parole la retta tangente

al grafico è una retta verticale in corrispondenza dei punti $x = -2$, $x = 0$ e $x = 2$). La derivata seconda della funzione $f(x)$ è data da

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{6x \cdot 2\sqrt{x^3 - 4x} - (3x^2 - 4)\dfrac{3x^2 - 4}{\sqrt{x^3 - 4x}}}{4(x^3 - 4x)} \\ &= \frac{\dfrac{1}{\sqrt{x^3 - 4x}}\left(12x(x^3 - 4x) - (3x^2 - 4)^2\right)}{4(x^3 - 4x)} \\ &= \frac{3x^4 - 24x^2 - 16}{4(x^3 - 4x)\sqrt{4x^3 - 4x}} \\ &= \frac{3x^4 - 24x^2 - 16}{4(x^3 - 4x)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Il segno di $f''(x)$ è determinato dal segno del numeratore. Per studiare il segno di

$$g(x) = 3x^4 - 24x^2 - 16,$$

è conveniente porre $x^2 = t$ e scrivere $g(x) = 3t^2 - 24t - 16$, in modo da studiare la disequazione $2t^2 - 24t - 16 \geq 0$. Si trova che

$$3y^2 - 24t - 16 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad t = 4 \pm \frac{8}{\sqrt{3}}.$$

Quindi, in termini di x, se definiamo $x_0 := \sqrt{4 + 8/\sqrt{3}}$, si ha $g(x) = 0$ se e solo se $x = x_0$, poiché $4 - 8/\sqrt{3} < 0$. Inoltre risulta $g(x) > 0$ se $x^2 > 4 + 8/\sqrt{3}$, ovvero se $x > x_0$ oppure $x < -x_0$. Tenuto conto che $x_0 > 2$, si vede che, all'interno del dominio D_f, si ha $g(x) > 0$ per $x > x_0$, mentre $g(x) < 0$ per $x \in (-2, 0)$ e per $x \in (0, x_0)$. In conclusione, nell'intervallo $[-2, 0]$ la funzione è concava. Nell'intervallo $[0, +\infty)$, la funzione è concava fino a x_0, ha un punto di flesso obliquo in x_0 ed è convessa per $x > x_0$. Il grafico della funzione è rappresentato in Figura 9.48.

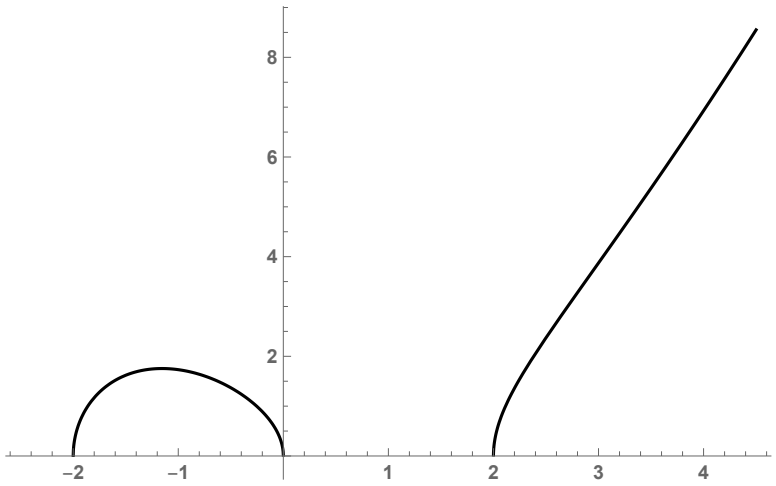


Figura 9.48: Grafico della funzione dell'esercizio 26.

27. La funzione

$$f(x) = \ln(3 + x^2) - \ln x^2$$

è definita per ogni $x \neq 0$, quindi $D_f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Infatti $3 + x^2 > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ e $x^2 > 0$ per ogni $x \neq 0$. Per studiare il comportamento della funzione per $x \to \pm\infty$, è conveniente riscrivere (ricordando la proprietà del logaritmo $\ln a - \ln b = \ln(a/b)$)

$$f(x) = \ln \frac{3 + x^2}{x^2}.$$

Si ha allora, usando la continuità della funzione logaritmo,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\pm\infty} f(x) &= \lim_{x\to\pm\infty} \ln \frac{3 + x^2}{x^2} \\
&= \ln\left(\lim_{x\to\pm\infty} \frac{3 + x^2}{x^2}\right) \\
&= \ln\left(\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2\left(1 + \dfrac{3}{x^2}\right)}{x^2}\right) \ln\left(\lim_{x\to\pm\infty} \left(1 + \frac{3}{x^2}\right)\right) \\
&= \ln 1 = 0,
\end{aligned}$$

che mostra che esiste un asintoto orizzontale $y = 0$ sia per $x \to +\infty$ che per $x \to -\infty$. Inoltre si ha

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} f(x) &= \ln 3 - \lim_{x\to 0^+} \ln x^2 = \ln 3 + \infty = +\infty, \\
\lim_{x\to 0^-} f(x) &= \ln 3 - \lim_{x\to 0^-} \ln x^2 = \ln 3 + \infty = +\infty,
\end{aligned}$$

quindi esiste un asintoto verticale $x = 0$, e la funzione tende a $+\infty$ per x che tende a 0 sia da destra che da sinistra. La derivata di $f(x)$ è data da

$$f'(x) = \frac{2x}{3+x^2} - \frac{2x}{x^2} = \frac{2x}{3+x^2} - \frac{2}{x} = \frac{2x^2 - 2(3+x^2)}{x(3+x^2)} = -\frac{6}{x(3+x^2)}.$$

Poiché $3 + x^2 > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$, si ha $f'(x) > 0$ se $x < 0$ e $f'(x) < 0$ per $x > 0$: la funzione $f(x)$ è crescente per $x < 0$ ed è decrescente per $x > 0$. La derivata seconda della funzione $f(x)$ è

$$f''(x) = -\left(\frac{6}{x^3+3x}\right)' = \frac{6(3x^2+3)}{(x^3+3x)^2}.$$

Si vede immediatamente che $f''(x) > 0$ per ogni x per cui la funzione è definita (ovvero per ogni $x \neq 0$), da cui si deduce che la funzione $f(x)$ è convessa. Il grafico della funzione è rappresentato in Figura 9.49.

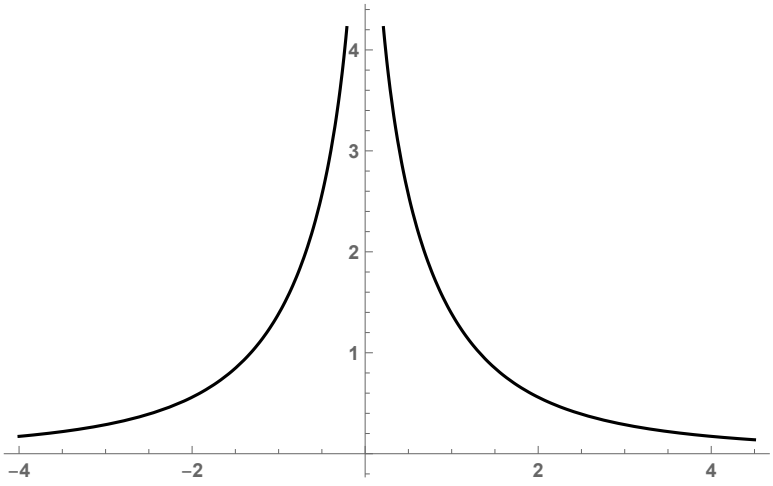


Figura 9.49: Grafico della funzione dell'esercizio 27.

28. Poiché $1 + x^2 > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$, la funzione

$$f(x) = x^4 - x^2 + \ln\left(1 + x^2\right)$$

è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$. Quindi si ha $D_f = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$.

Si ha inoltre

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} x^4 \left(1 - \frac{1}{x^2} + \frac{\ln(1+x^2)}{x^4}\right),$$

dove

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^4} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\dfrac{2x}{1+x^2}}{4x^3} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{2x^2(1+x^2)} = 0.$$

Si ha pertanto

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} x^4\left(1 - \frac{1}{x^2} + \frac{\ln(1+x^2)}{x^4}\right) = \lim_{x\to\pm\infty} x^4 = +\infty.$$

Poiché, analogamente, si trova che

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^4}{x}\left(1 - \frac{1}{x^2} + \frac{\ln(1+x^2)}{x^4}\right) = \lim_{x\to\pm\infty} x^3 = \pm\infty,$$

ne concludiamo che la funzione non ha asintoti né orizzontali né obliqui per $x \to \pm\infty$. La derivata prima di $f(x)$ vale

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3 - 2x + \frac{2x}{1+x^2} = \frac{2x(2x^2-1)(1+x^2)+2x}{1+x^2} \\ &= \frac{2x^3(1+2x^2)}{1+x^2} = \frac{2x^3+4x^5}{1+x^2}. \end{aligned}$$

Poiché sia $1+2x^2$ che $1+x^2$ sono strettamente positivi, il segno di $f'(x)$ è determinato dal segno di x^3: se $x > 0$ si ha $f'(x) > 0$ e, analogamente, se $x < 0$ si ha $f'(x) < 0$. Ne segue che la funzione $f(x)$ è crescente per $x > 0$ e decrescente per $x < 0$, così che $x = 0$ costituisce un punto di minimo relativo. La derivata seconda di $f(x)$ è data da

$$f''(x) = \frac{\left(6x^2+20x^4\right)\left(1+x^2\right) - \left(2x^3+4x^5\right)2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2x^2\left(6x^4+11x^2+3\right)}{(1+x^2)^2}.$$

Si ha $f''(x) = 0$ se e solo se $x = 0$, poiché $6x^4+11x^2+3 > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$. Inoltre $f''(x) > 0$ per ogni $x \neq 0$: la funzione $f(x)$ è convessa in tutto il suo dominio. Il grafico di $f(x)$ è rappresentato nella Figura 9.50.

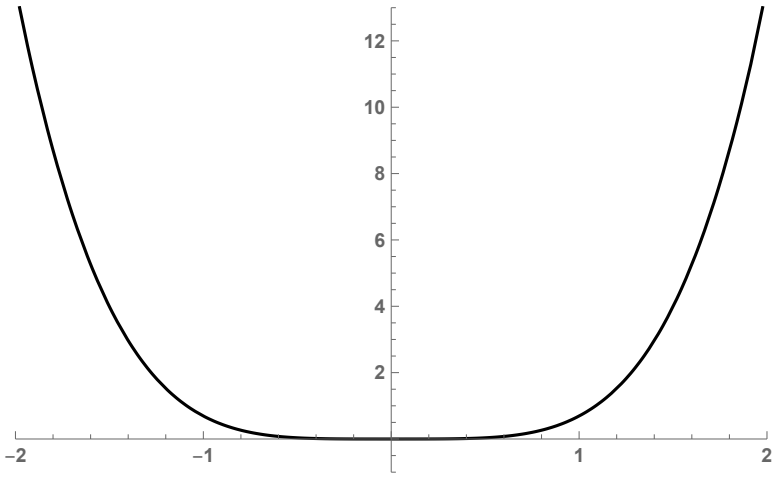


Figura 9.50: Grafico della funzione dell'esercizio 28.

29. Poiché $x^2+1 \geq 1 > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$, la funzione

$$f(x) = \left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^2 = \frac{(x^2-1)^2}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4-2x^2+1}{x^4+2x^2+1}$$

è definita per ogni $x \in \mathbb{R} \Longrightarrow D_f = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$. Per studiare l'andamento per $x \to \pm\infty$, si considera

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^4\left(1-\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^4}\right)}{x^4\left(1+\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^4}\right)} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1-\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^4}}{1+\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^4}} = 1,$$

da cui si evince che la funzione $f(x)$ ha un asintoto orizzontale $y = 1$ per $x \to \pm\infty$. La derivata prima è

$$f'(x) = 2\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)' = 2\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)\frac{2x(x^2+1)-(x^2-1)2x}{(x^2+1)^2}$$

$$= = 2\frac{2x(x^2-1-x^2+1)}{(x^2+1)^3} = 8\frac{x(x^2-1)}{(x^2+1)^3} = 8\frac{x^3-x}{(x^2+1)^3}.$$

Poiché $(x^2+1)^3 > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$, il segno di $f'(x)$ è determinato dalla funzione $x(x^2-1)$. Si ha $f'(x) = 0$ se $x = 0$ oppure $x = \pm 1$, quindi ci sono tre punti stazionari: $x = 0$, $x = -1$ e $x = +1$. Inoltre $x^2-1 > 0$ per $x > 1$ oppure $x < -1$, mentre $x^2-1 < 0$ per $x \in (-1, 1)$. Si ha quindi la situazione rappresentata in Figura 9.51.

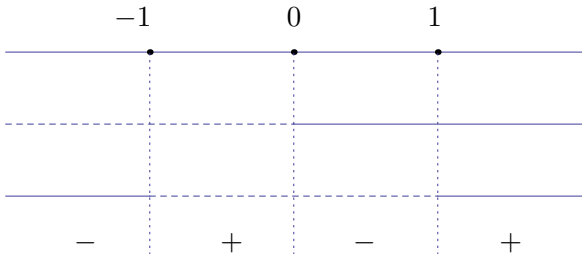


Figura 9.51: Studio del segno di $x^3 - x = x(x^2-1)$.

In conclusione, la funzione $f(x)$ è decrscente per $x < -1$ e per $x \in (0, 1)$, mentre è crescente per $x \in (-1, 0)$ e per $x > 1$. Di conseguenza $x = 0$ è un punto di massimo relativo e $x = \pm 1$ sono due punti di minimo relativo; si vede imediatamente che $f(0) = 1$ e $f(\pm 1) = 0$. Per calcolare la derivata seconda di $f(x)$, si applica la regola di derivazione del rapporto di due funzioni, tenendo conto che

$$(x^3-x)' = 3x^2-1,$$
$$((x^2+1)^3)' = 3(x^2+1)^2 \cdot 2x = 6x(x^2+1)^2.$$

Si trova quindi

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(3x^2-1)\,(x^2+1)^3 - (x^3-x)\,(6x(x^2+1)^2)}{(1+x^2)^6} \\ &= 8\frac{(3x^2-1)\,(x^2+1) - 6x\,(x^3-x)}{(1+x^2)^4} \\ &= 8\frac{3x^4+3x^2-x^2-1-6x^4+6x^2}{(1+x^2)^4} = 8\frac{-3x^4+8x^2-1}{(1+x^2)^4}. \end{aligned}$$

Il segno di $f''(x)$ è determinato dal segno di $g(x) := -3x^4 + 8x^2 - 1$. Se poniamo $x^2 = t$ (ovvero $x = \pm\sqrt{t}$), riscriviamo $g(x) = g(\pm\sqrt{t}) = G(t) := -3t^2 + 8t - 1$, così che, per determinare il segno di $g(x)$, dobbiamo studiare la disequazione di secondo grado $G(t) > 0$. Si ha $G(t) = 0$ per $t = t_1$ oppure $t = t_2$, dove

$$t_1 = \frac{4-\sqrt{13}}{3}, \qquad t_2 = \frac{4+\sqrt{13}}{3},$$

entrambi positivi. Tenuto conto del segno del coefficiente di t^2 in $G(t)$ concludiamo che $G(t)$ è positiva per $t \in (t_1, t_2)$ e negativa per $t \in [0, t_1)$ e $t \in (t_2, +\infty)$. Quindi, in termini di x, si ha $g(x) > 0$ per $x \in (x_1, x_2)$ oppure per $x \in (-x_2, -x_1)$, dove

$$x_1 = \sqrt{\frac{4-\sqrt{13}}{3}}, \qquad x_2 = \sqrt{\frac{4+\sqrt{13}}{3}},$$

mentre $g(x) < 0$ per $x < -x_2$ oppure $x \in (-x_1, x_1)$ oppure $x > x_2$. Ne segue che la funzione $f(x)$ è convessa per $x \in (x_1, x_2)$ oppure per $x \in (-x_2, -x_1)$ e concava per $x < -x_2$ oppure $x \in (-x_1, x_1)$ oppure $x > x_2$. I punti $x = -x_2$, $x = -x_1$, $x = x_1$ e $x = x_2$ sono punti di flesso obliquo, in cui cambia la concavità della funzione. Il grafico di $f(x)$ è rappresentato in Figura 9.52.

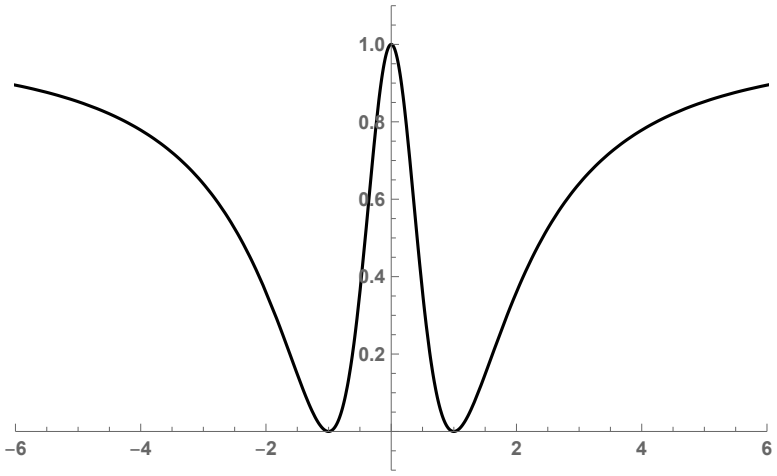


Figura 9.52: Grafico della funzione dell'esercizio 29.

30. La funzione

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2-4}{x^2+4}}$$

è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ tale che $x^2 \geq 4$, quindi per $x \geq 2$ oppure $x \leq -2$ (il denominatore è sempre strettamente positivo). Quindi si ha

$$D_f = \mathbb{R} = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty).$$

Usando la continuità della funzione radice quadrata, si trova

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt{\frac{x^2-4}{x^2+4}} = \sqrt{\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-4}{x^2+4}},$$

dove

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-4}{x^2+4} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2\left(1-\dfrac{4}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\dfrac{4}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1-\dfrac{4}{x^2}}{1+\dfrac{4}{x^2}} = 1.$$

Pertanto la funzione ha un asintoto orizzontale $y = 1$ sia per $x \to \infty$ che per $x \to -\infty$. Inoltre

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to 2^+} f(x) = 0,$$

quindi la funzione $f(x)$ non ha asintoti verticali. La derivata prima di $f(x)$ vale

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{x^2-4}{x^2+4}}} \left(\frac{x^2-4}{x^2+4}\right)' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^2+4}{x^2-4}}\, \frac{2x(x^2+4)-(x^2-4)2x}{(x^2+4)^2}$$

$$= x\sqrt{\frac{x^2+4}{x^2-4}}\, \frac{x^2+4-x^2+4}{(x^2+4)^2} \frac{8x}{(x^2+4)^{3/2}(x^2-4)^{1/2}}.$$

Poiché il denominatore è sempre positivo per $x \in D_f$, si vede immediatamente che $f'(x) > 0$ (e quindi $f(x)$ è crescente) per $x > 0$ e $f'(x) < 0$ (e quindi $f(x)$ è decrescente) per $x < 0$. La derivata seconda di $f(x)$ è data da

$$f''(x) = 8\frac{(x^2+4)^{3/2}(x^2-4)^{1/2} - x\left(3x(x^2+4)^{1/2}(x^2-4)^{1/2} + (x^2+4)^{3/2}x(x^2-4)^{-1/2}\right)}{(x^2+4)^3(x^2-4)}$$

$$= 8\frac{(x^2+4)^{1/2}}{(x^2-4)^{1/2}}\, \frac{(x^2+4)(x^2-4) - x^2\left(3(x^2-4)+(x^2+4)\right)}{(x^2+4)^3(x^2-4)}$$

$$= 8\frac{(x^2+4)^{1/2}}{(x^2-4)^{1/2}}\, \frac{(x^4-16-4x^4+8)}{(x^2+4)^3(x^2-4)} = -\frac{8(3x^4+8)}{(x^2+4)^{5/2}(x^2-4)^{3/2}},$$

dove si è tenuto conto che

$$((x^2+4)^{3/2})' = \frac{3}{2}(x^2+4)^{1/2}2x = 3x(x^2+4)^{1/2},$$

e, analogamente, che

$$((x^2-4)^{1/2})' = \frac{1}{2}(x^2-4)^{-1/2}2x = x(x^2-4)^{-1/2}.$$

Si ha $f''(x) < 0$ per ogni $x \in D_f$: ne segue che la funzione $f(x)$ è concava. Il grafico di $f(x)$ è rappresentato in Figura 9.53.

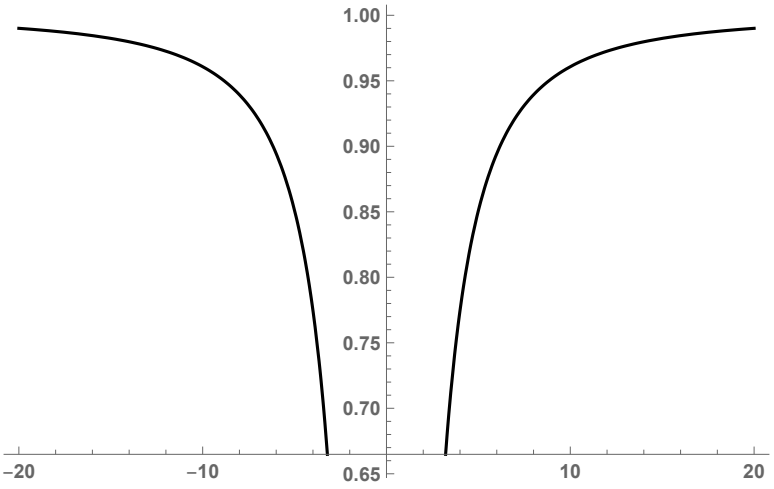


Figura 9.53: Grafico della funzione dell'esercizio 30.

10 | Integrali

10.1 Integrali definiti

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Siano M e m il massimo e il minimo di f in $[a, b]$, rispettivamente (per il Teorema di Weierstrass sappiamo che esistono). Suddividiamo il segmento $[a, b]$ in n parti nel modo seguente: fissiamo $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ e poniamo $\Delta x_1 = x_1 - x_0$, $\Delta x_2 = x_2 - x_1$, $\ldots$, $\Delta x_n = x_n - x_{n-1}$. Indichiamo con M_1 e m_1 il massimo e il minimo di f in $[x_0, x_1]$, con M_2 e m_2 il massimo e il minimo di f in $[x_1, x_2]$, $\ldots$, con M_n e m_n massimo e il minimo di f in $[x_{n-1}, x_n]$.

Definizione 10.1. *Le due somme*

$$\underline{s}_n = m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 + \ldots + m_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i,$$

$$\overline{s}_n = M_1\Delta x_1 + M_2\Delta x_2 + \ldots + M_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i,$$

si chiamano, rispettivamente, somma integrale inferiore *e* somma integrale superiore.

Osservazioni:

1. Se $f(x) \geq 0\ \forall x \in [a, b]$, la somma integrale inferiore rappresenta l'area della figura inscritta in f, mentre la somma integrale superiore rappresenta l'area della figura circoscritta a f; cfr. la Figura 10.1.

2. Poiché $m_i \leq M_i$ per $i = 1, \ldots, n$ si ha $\underline{s}_n \leq \overline{s}_n$, dove il segno $=$ vale se e solo se la funzione f è costante.

3. Poiché $m_i \geq m$ per $i = 1, \ldots, n$ si ha

$$\underline{s}_n \geq m\Delta x_1 + \ldots + m\Delta x_n \geq m\left(\Delta x_1 + \ldots + \Delta x_n\right) = m\left(b - a\right).$$

4. Poiché $M_i \leq M$ per $i = 1, \ldots, n$ si ha

$$\overline{s}_n \leq M\Delta x_1 + \ldots + M\Delta x_n \leq M\left(\Delta x_1 + \ldots + \Delta x_n\right) = M\left(b - a\right).$$

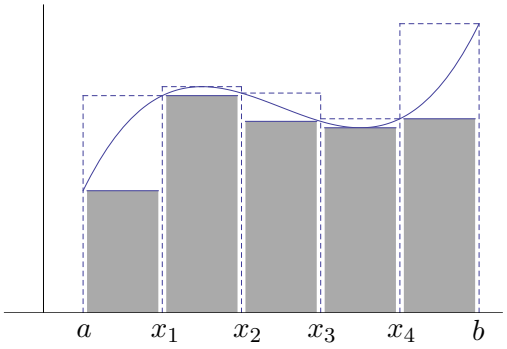


Figura 10.1: Somma integrale inferiore e somma integrale superiore.

Definizione 10.2. *Per ogni $i = 1, \ldots, n$ si scelga un punto $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. La somma*

$$s_n = f(\xi_1)\,\Delta x_1 + \ldots + f(\xi_n)\,\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i$$

prende il nome di somma integrale.

Osservazioni:

1. Sia le somme integrali superiore e inferiore che la somma integrale dipendono dalla suddivisione dell'intervallo.
2. La somma integrale dipende anche dalla scelta dei punti $\xi_1, \ldots, \xi_n$.
3. Poiché $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ si ha $m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i$, quindi
$$\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i,$$
ovvero
$$\underline{s}_n \leq s_n \leq \overline{s}_n.$$
4. Per n fissato il numero degli intervalli è finito, quindi possiamo considerare $\max_i \Delta x_i$. Al crescere di n il numero degli intervalli aumenta: possiamo per esempio infittire i punti in modo tale che $\max_i \Delta x_i$ divenga sempre più piccolo. Si può allora considerare il limite della somma integrale per suddivisioni dell'intervallo $[a, b]$ in intervalli di ampiezze Δx_i tali che $\max_i \Delta x_i \to 0$. Ovviamente in tale limite $n \to +\infty$.

Definizione 10.3. *Data una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua, se per ogni suddivisione dell'intervallo $[a, b]$ in n segmenti $[x_{i-1}, x_i]$ e per ogni scelta dei punti $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, nel limite in cui $\max_i \Delta x_i$ tende a 0, la somma integrale s_n tende a uno stesso limite s, allora tale limite si chiama* integrale definito *della funzione $f(x)$ sul segmento $[a, b]$ e si indica con*

$$s = \lim_{\max_i \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_n)\,\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

*Diciamo anche che a è l'*estremo inferiore *e b è l'*estremo superiore *dell'integrale, e che $[a, b]$ è l'*intervallo di integrazione.

Definizione 10.4. *Se il limite s esiste la funzione f si dice* integrabile *in $[a, b]$.*

Teorema 10.5. *Sia $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora f è integrabile in $[a, b]$.*

Osservazioni:

1. Finora abbiamo assunto $a < b$. Per consistenza si definisce
$$\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$
che permette di considerare anche i casi $a > b$ e $a = b$.

2. Se $f(x) \geq 0$ in $[a, b]$ allora l'integale $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ rappresenta geometricamente l'area della regione racchiusa tra l'asse x, il grafico della funzione $f(x)$ e i due segmenti verticali che uniscono i punti $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ ai punti $(a, 0)$ e $(b, 0)$, rispettivamente; cfr. la Figura 10.2.

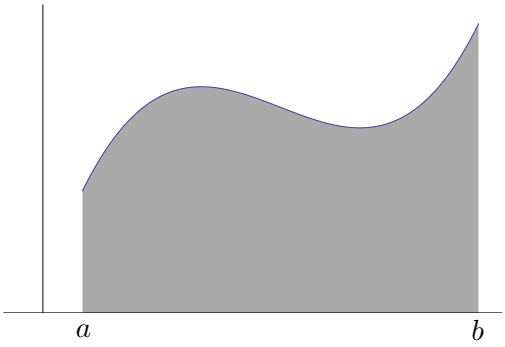


Figura 10.2: Interpretazione dell'integrale di una funzione positiva.

Esempi:

1. Se $f(x) = k$, con k costante, data una suddivisione qualsiasi di $[a, b]$ in intervalli $[x_{i-1}, x_i]$ e scelti comunque i punti $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, si ha
$$s_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i = k \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = k(b - a),$$
dove $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, quindi $\displaystyle\int_a^b k\,\mathrm{d}x = \lim_{\max_i \Delta x_i \to 0} s_n = k\,(b - a)$; cfr. la Figura 10.3.

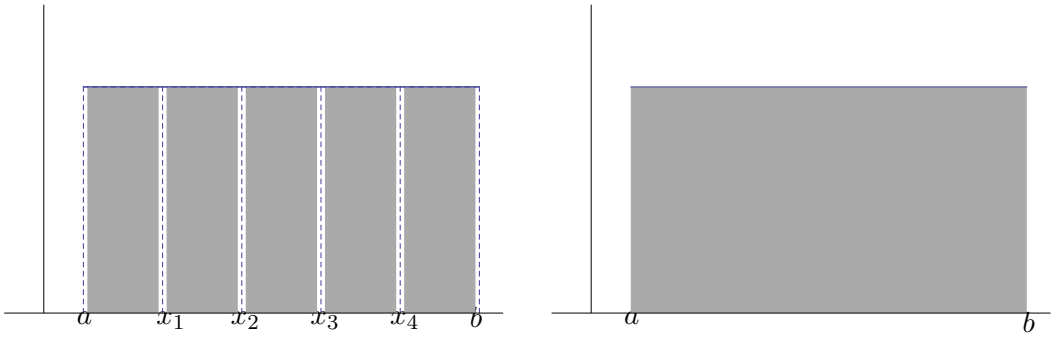


Figura 10.3: Somme integrali e integrale di $f(x) = k$.

2. Se $f(x) = x$ consideriamo una suddivisione di $[a, b]$ in n intervalli, tutti con la stessa ampiezza $\Delta x = (b-a)/n$: $x_0 = a$, $x_1 = a + \Delta x$, $x_2 = a + 2\Delta x$, ..., $x_n = a + n\Delta x = b$, e scegliamo i punti ξ_i nel modo seguente: $\xi_1 = a$, $\xi_2 = a + \Delta x$, ..., $\xi_n = a + (n-1)\Delta x = b - \Delta x$. Si ha allora

$$\begin{aligned} s_n &= \xi_1\Delta x + \xi_2\Delta x + \ldots + \xi_n\Delta x = (\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n)\,\Delta x \\ &= (a + (a + \Delta x) + \ldots + (a + (n-1)\Delta x))\,\Delta x \\ &= (na + (1 + \ldots + (n-1))\,\Delta x)\,\Delta x \\ &= \left(na + \frac{n(n-1)}{2}\Delta x\right)\Delta x = n\Delta x\, a + \frac{n(n-1)}{2}(\Delta x)^2 \\ &= (n\Delta x)\, a + \frac{n-1}{2n}(n\Delta x)^2 = (b-a)\, a + \frac{n-1}{2n}(b-a)^2, \end{aligned}$$

dove abbiamo usato il fatto che

$$1 + 2 \ldots + (n-1) = \sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Poiché $\Delta x_i = \Delta x = (b-a)/n$ per ogni i, il limite di s_n per $\max_i \Delta x_i \to 0$ si può riscrivere come limite per $n \to \infty$, e si ottiene quindi

$$\begin{aligned} \lim_{\max_i \Delta x_i \to 0} s_n &= \lim_{n\to+\infty}\left((b-a)\, a + \frac{n-1}{2n}(b-a)^2\right) = a\,(b-a) + \frac{1}{2}(b-a)^2 \\ &= (b-a)\left(a + \frac{b-a}{2}\right) = (b-a)\left(\frac{b+a}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(b^2 - a^2\right). \end{aligned}$$

In conclusione $\displaystyle\int_a^b x\,\mathrm{d}x = \lim_{\max_i \Delta x_i \to 0} s_n = \frac{1}{2}\left(b^2 - a^2\right)$; cfr. la Figura 10.4

10.2 Proprietà degli integrali definiti

1. f continua in $[a, b]$ e $\alpha \in \mathbb{R} \Longrightarrow \displaystyle\int_a^b \alpha\, f(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$

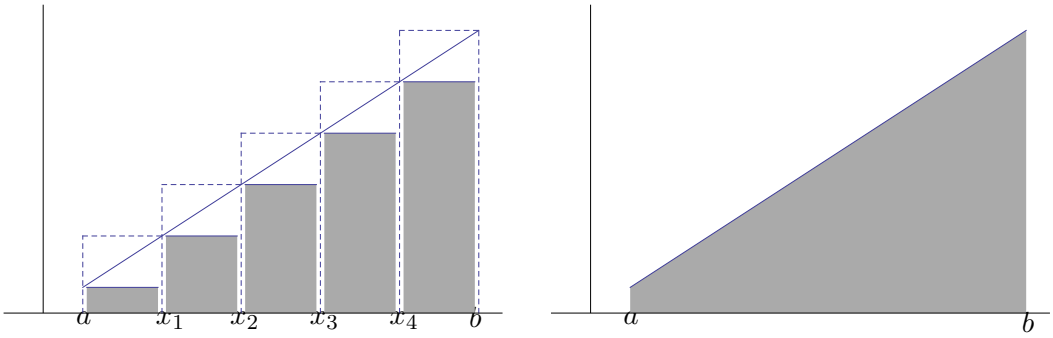


Figura 10.4: Somme integrali e integrale di $f(x) = x$.

2. f e g continue in $[a,b] \Longrightarrow \displaystyle\int_a^b (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

3. f e g continue in $[a,b]$ e $f(x) \geq g(x)\ \forall x \in [a,b] \Longrightarrow \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

4. f continua in $[a,b]$ e $f(x) \geq 0\ \forall x \in [a,b] \Longrightarrow \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$.

5. f continua in $[a,b] \Longrightarrow m(b-a) \leq \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq M(b-a)$, dove m e M sono il minimo e il massimo, rispettivamente, di f in $[a,b]$.

Dimostrazioni:

1. Si ha

$$\int_a^b \alpha\, f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n} \alpha f(\xi_i)\,\Delta x_i$$

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \alpha \sum_{i=0}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i = \alpha \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

2. Se $h(x) = f(x) + g(x)$, effettuando la stessa suddivisione in intervalli per le due funzioni e scegliendo gli stessi punti ξ_i per entrambe, si vede che la somma integrale per h è data dalla somma delle somme integrali di f e g:

$$\int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n} (f(\xi_i)+g(\xi_i))\,\Delta x_i$$

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i + \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n} g(\xi_i)\,\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

3. Effettuando la stessa suddivisione in intervalli e la stessa scelta dei punti ξ_i per le due funzioni f e g, si trova

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i \geq \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n} g(\xi_i)\,\Delta x_i = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

4. Segue dalla proprietà 3 con la funzione $g(x) = 0$.

5. Segue di nuovo dalla proprietà 3 notando che $m \leq f(x) \leq M$ in $[a, b]$.

Teorema 10.6. *f continua in $[a, b] \Longrightarrow \exists \xi \in (a, b)$ tale che* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)\,(b - a)$.

Dimostrazione. Per la proprietà 5 si ha

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq M.$$

Poiché è continua, la funzione f assume tutti i valori compresi tra m e M (per il Teorema 6.5), quindi esiste un punto $\xi \in (a, b)$ tale che

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

da cui segue l'asserto. ∎

Osservazione: il teorema è noto come *teorema della media.*

Teorema 10.7. *f continua in I e $a, b, c \in I \Longrightarrow$* $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$.

10.3 Integrali indefiniti

Definizione 10.8. *Si dice che una funzione F è una* primitiva *della funzione f in $[a, b]$ se F è derivabile in (a, b) e $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in (a, b)$.*

Esempi:

1. $F(x) = \dfrac{1}{2}x^2$ è una primitiva di $f(x) = x$.

2. $F(x) = \dfrac{1}{3}x^3$ è una primitiva di $f(x) = x^2$.

3. $F(x) = e^x$ è una primitiva di $f(x) = e^x$.

4. $F(x) = \sin x$ è una primitiva di $f(x) = \cos x$.

Osservazione: una funzione $f(x)$ ammette infinite primitive. Infatti se $F(x)$ è una primitiva, anche $F(x)+c$, con c costante arbitraria, è una primitiva.

Teorema 10.9. *Siano $F_1(x)$ e $F_2(x)$ due primitive della funzione $f(x)$ in $[a,b]$. Allora $F_1(x)-F_2(x)$ è costante.*

Dimostrazione. Poiché $F_1'(x)=F_2'(x)=f(x)$ in $[a,b]$ si ha $F_1'(x)-F_2'(x)=0$ in $[a,b]$, quindi la funzione $\varphi(x)=F_1(x)-F_2(x)$ ha derivata nulla in $[a,b]$. Per il Teorema 8.3 (di Lagrange) per ogni $x\in[a,b]$ esiste $\xi\in[a,x]$ tale che

$$\varphi(x)-\varphi(a)=\varphi'(\xi)\,(x-a),$$

quindi, poiché $\varphi'(x)=0$ per ogni $x\in[a,b]$, si trova $\varphi(x)=\varphi(a)\ \forall x\in[a,b]$, ovvero $\varphi(x)$ è costante in $[a,b]$. ∎

Definizione 10.10. *L'insieme delle primitive di una funzione $f(x)$ si chiama* integrale indefinito *di f e si indica con* $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

Osservazione: quindi, se $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$, si ha $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=F(x)+c$, dove c è una costante arbitraria.

Teorema 10.11. *f continua in $[a,b]\Longrightarrow\Phi(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ è una primitiva di f.*

Dimostrazione. Il rapporto incrementale della funzione Φ è dato da

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}\left(\int_a^{x+\Delta x}f(t)\mathrm{d}t-\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right)=\frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x}f(t)\mathrm{d}t,$$

dove $\Delta\Phi=\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)$. Per il Teorema 10.6, si ha $\displaystyle\int_x^{x+\Delta x}f(t)\mathrm{d}t=f(\xi)\Delta x$, per un opportuno ξ compreso tra x e $x+\Delta x$ (ovvero $\xi\in(x,x+\Delta x)$ se $\Delta x>0$ e $\xi\in(x+\Delta x,x)$ se $\Delta x<0$). Quindi

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}\left(f(\xi)\Delta x)\right)=f(\xi)\quad\Longrightarrow\quad\Phi'(x)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta\Phi}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}f(\xi)=f(x),$$

dove si è usato che $\xi\to x$ per $\Delta x\to0$ (per la continuità di f). ∎

Teorema 10.12. *Sia f una funzione continua in $[a,b]$ e sia F una sua primitiva. Allora si ha* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$.

Dimostrazione. La funzione $\Phi(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ è anch'essa una primitiva di f per il Teorema 10.11. Quindi $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t=F(x)+c$, dove c è una costante, per il Teorema 10.9. D'altra parte

$0 = \int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = F(a) + c$, quindi $c = -F(a)$. Segue che $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = F(x) - F(a)$. Se si pone $x = b$ si ottiene l'asserto. ■

Osservazioni:

1. Il teorema è noto come *teorema fondamentale del calcolo integrale.*
2. Usualmente si scrive $F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$.
3. Il teorema fornisce una regola per calcolare l'integrale definito di una funzione: si deve prima trovare una qualsiasi primitiva di f e quindi si calcola la differenza tra i valori che essa assume in corrispondenza degli estremi di integrazione.

10.4 Tabella di integrali indefiniti

1. $\int x^\alpha\,\mathrm{d}x = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$, dove $\alpha \neq -1$.
2. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + c$.
3. $\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + c$.
4. $\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + c$.
5. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\,x + c$.
6. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\mathrm{cotg}\,x + c$.
7. $\int \mathrm{tg}\,x\,\mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + c$.
8. $\int \mathrm{cotg}\,x\,\mathrm{d}x = \ln|\sin x| + c$.
9. $\int e^x\,\mathrm{d}x = e^x + c$.
10. $\int a^x\,\mathrm{d}x = \dfrac{a^x}{\ln a} + c$, dove $a > 0$, $a \neq 1$.
11. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \mathrm{arctg}\,x + c$.

12. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + c.$

13. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c.$

14. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right| + c.$

Osservazioni:

1. Le formule sopra seguono dalle espressioni trovate in §7.1 e §7.4 per le derivate delle funzioni elementari principali, a eccezione delle formule 7, 8, 12 e 14, che possono comunque essere verificate esplicitamente per derivazione della primitiva.
2. L'integrale 7 si può ottenere mediante il metodo di integrazione per sostituzione che sarà descritto più avanti (cfr. §11.1), con la sostituzione $t = \cos x$.
3. Analogamente l'integrale 8 si può ottenere mediante il metodo di integrazione per sostituzione, con la sostituzione $t = \sin x$.
4. L'integrale 12 si può ottenere mediante il metodo di integrazione delle funzioni razionali che sarà descritto più avanti (cfr. in particolare l'Osservazione 1 di pag 227).
5. Anche l'integrale 14 si può ottenere tramite una sostituzione, però meno semplice dei casi 7 e 8. Infatti, se $a = 1$, si può introdurre una variabile t tale che
$$x = \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right),$$
così che
$$\sqrt{1+x^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}\left(t^2 - 2 + \frac{1}{t^2}\right)} = \frac{1}{2}\sqrt{\left(t+\frac{1}{t}\right)^2} = \frac{1}{2}\frac{t^2+1}{t},$$
$$\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\frac{t^2+1}{t^2}\,\mathrm{d}t,$$
da cui si ottiene
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a}} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln t + c.$$
Invertendo la relazione che lega x e t si trova
$$t^2 - 2xt - 1 \quad\Longrightarrow\quad t = x \pm \sqrt{x^2+1} \quad\Longrightarrow\quad t = x + \sqrt{x^2+1},$$
dove la determinazione con il segno $-$ va scartata poiché dobbiamo calcolare il logaritmo di t. Il caso $a \neq 1$ si pùo ricondurre al caso $a = 1$ tramite la sostituzione $x = y\sqrt{a}$.
6. Mentre le derivate di funzioni elementari sono sempre funzioni elementari, non è vero che ogni integrale indefinito si possa esprimere in termini di funzioni elementari. Per esempio
$$\int e^{-x^2}\,\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{\ln x}, \qquad \int \sqrt{1-k^2\sin^2 x}\,\mathrm{d}x, \quad \text{con } 0 < k < 1,$$

rappresentano funzioni di natura nuova rispetto a quelle incontrate finora. In particolare la primitiva

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int e^{-x^2} \, \mathrm{d}x + c$$

di $2e^{-x^2}/\sqrt{\pi}$ che si annulla in $x = 0$, i.e.

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} \, \mathrm{d}t,$$

prende il nome di *funzione degli errori di Gauss*, mentre la primitiva

$$\int \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x} \, \mathrm{d}x + c, \quad \text{con } 0 < k < 1,$$

che si annulla in $x = 0$, i.e.

$$\int_0^x \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t} \, \mathrm{d}t, \quad \text{con } 0 < k < 1,$$

prende il nome di *integrale ellittico* (incompleto del secondo tipo).

11 | Metodi di integrazione

11.1 Integrazione per sostituzione

Supponiamo di voler calcolare l'integrale $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Se $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$, i.e. $F'(x) = f(x)$, si ha

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c \qquad \Longrightarrow \qquad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Supponiamo anche che si abbia $x = \varphi(t)$, dove $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ è una funzione biunivoca (e quindi invertibile) di classe C^1 (e quindi derivabile). Indichiamo con $G(t)$ la funzione composta $G(t) = F(\varphi(t))$. Si ha allora $G'(t) = F'(\varphi(t))\,\varphi'(t) = f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$, per la regola di derivazione della funzione composta. Quindi $G(t)$ è una primitiva della funzione $f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$:

$$\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = G(t) + c \qquad \Longrightarrow \qquad \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = G(\beta) - G(\alpha).$$

D'altra parte, poiché $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ e quindi, in particolare, $\varphi(\alpha) = a$ e $\varphi(\beta) = b$, si ha $G(\beta) = F(\varphi(\beta)) = F(b)$ e $G(\beta) = F(\varphi(\alpha)) = F(a)$, così che possiamo concludere che

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Osservazioni:

1. La discussione sopra mostra che, a livello di integrali indefiniti, si ha

   $$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c = G(t) + c = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t,$$

   poiché $F(x) = F(\varphi(t)) = G(t)$, e quindi

   $$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

   Una volta calcolato $G(t)$ si trova $F(x)$ esprimendo t in funzione di x attraverso la funzione inversa di φ, i.e. $F(x) = G(\varphi^{-1}(x))$.

2. Possiamo interpretare l'espressione sopra dicendo che, formalmente, $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\mathrm{d}t$.

3. Spesso può essere utile definire x in termini di t, scrivendo $t = \psi(x)$. Si ha allora $\psi(x) = \varphi^{-1}(x)$ ovvero $\varphi(x) = \psi^{-1}(x)$.

4. Per la regola di derivazione della funzione inversa (cfr. §7.3) si ha allora $\varphi'(t) = 1/\psi'(x)$, quindi formalmente possiamo scrivere $\psi'(x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$.

Esempi:

1. $\displaystyle\int 2x\cos x^2\,\mathrm{d}x = \int \cos t\,\mathrm{d}t = \sin t + c = \sin x^2 + c$ (sostituzione $t = x^2$).

2. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \frac{1}{1+\dfrac{x^2}{3}}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{3}}{3}\int \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\operatorname{arctg} t}{\sqrt{3}} + c = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}} + c.$

3. $\displaystyle\int_1^2 \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_2^5 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(\ln 5 - \ln 2) = \ln\sqrt{\frac{5}{2}}$ (sostituzione $t = 1 + x^2$).

4. $\displaystyle\int_1^2 \frac{x}{1+x^4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_1^4 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(\operatorname{arctg} 4 - \operatorname{arctg} 1)$ (sostituzione $t = x^2$).

5. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + c$ (sostituzione $t = \frac{x}{a}$).

6. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + c$ (sostituzione $t = \frac{x}{a}$).

7. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + c$ (sostituzione $t = \frac{x}{a}$).

8. $\displaystyle\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\Big(x + \frac{1}{2}\int \cos t\,\mathrm{d}t\Big) = \frac{1}{2}\Big(x + \frac{1}{2}\sin 2x\Big) = \frac{x + \sin x\cos x}{2}$
(si è usata prima la formula $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$, poi si è effettuata la sostituzione $t = 2x$ per calcolare l'integrale di $\cos 2x$, infine si è usata la formula $\sin 2x = 2\sin x\cos x$).

9. $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{1-\sin^2\theta}\,\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = \int \cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\Big(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}\Big)$
(sostituzione: prima $x = \sin\theta$, poi $\theta = \alpha/2$; si è anche tenuto conto che la funzione $\sqrt{1-x^2}$ è definita per $|x| \le 1 \Longrightarrow \theta \in [-\pi/2, \pi/2] \Longrightarrow \cos\theta \ge 0 \Longrightarrow \sqrt{\cos^2\theta} = |\cos\theta| = \cos\theta$).

10. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2\theta}\,\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2\theta}{2}\mathrm{d}\theta$
$\displaystyle= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\int_0^{\pi} \cos\alpha\,\mathrm{d}\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\big(\sin\pi - \sin 0\big) = \frac{\pi}{4}$
(sostituzione: prima $x = \sin\theta$, poi si procede come nell'esempio precedente, usando il fatto che $\cos\theta \ge 0$ per $\theta \in [0, \pi/2]$; oppure si applica direttamente la 9).

11. $\displaystyle\int_1^3 \frac{2x+2}{x^2+2x+1}\,\mathrm{d}x = \int_4^{16} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln 16 - \ln 4 = \ln 4$ (sostituzione $t = x^2+2x+1$).

12. $\displaystyle\int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{x^2-2x+2} = \int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2+1} = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \operatorname{arctg} 2 - \operatorname{arctg} 1$ (sostituzione $t = x-1$).

13. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2}} \Longrightarrow$

(I) se $\dfrac{4ac-b^2}{4a^2} > 0$ allora

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}x}{t^2+k^2} = \frac{1}{ak}\operatorname{arctg}\frac{t}{k} + c = \frac{1}{ak}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{k}\left(x+\frac{b}{2a}\right)\right) + c,$$

dove $k^2 = \dfrac{4ac-b^2}{4a^2}$ (sostituzione: prima $t = x + \dfrac{b}{2a}$, poi si usa la 5);

(II) se $\dfrac{4ac-b^2}{4a^2} < 0$ allora

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}x}{t^2-k^2} = -\frac{1}{2ak}\ln\left|\frac{x+\frac{b}{2a}+k}{x+\frac{b}{2a}-k}\right| + c,$$

dove $k^2 = -\dfrac{4ac-b^2}{4a^2}$ (sostituzione: prima $t = x + \dfrac{b}{2a}$, poi si usa la 6).

14. $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{\mathrm{d}x}{4x^2-4x+2} = \frac{1}{4}\int_{-1}^0 \frac{\mathrm{d}x}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}} \Longrightarrow$ si applica la 13, caso (I), con $k = 1/2$ e $t = x - \dfrac{1}{2} \Longrightarrow \displaystyle\int_{-1}^0 \frac{\mathrm{d}x}{4x^2-4x+2} = \frac{1}{2}\Big(\operatorname{arctg}(-1) - \operatorname{arctg}(-3)\Big)$.

15. $$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax+b) + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right)}{ax^2+bx+c}\mathrm{d}x$$
$$= \frac{A}{2a}\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\mathrm{d}x + \left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\mathrm{d}x$$
$$= \frac{A}{2a}\ln\left|ax^2+bx+c\right| + \left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\mathrm{d}x,$$

e l'ultimo integrale si calcola usando la 13.

16. $$\int \frac{x}{x^2+x-1}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln|x^2+x-1| - \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x-1}$$
$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+x-1| + \frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{5}{4}}}{x+\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{5}{4}}}\right| + c$$

(si sono usate prima la 15 e poi la 13, caso (II), con $k^2 = 5/4$ per calcolare il secondo integrale).

17. $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+x+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x$, dove
$\displaystyle\frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln|x^2+x+1| + c = \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + c,$
$\displaystyle\frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\int \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)^2+1}\mathrm{d}x$
$\displaystyle= \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right) + c$, da cui segue che
$\displaystyle\int \frac{x}{x^2+x+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + c.$
18. $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+4x+5}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln(x^2+4x+5) - \mathrm{arctg}\,(x+2) + c.$
19. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x = -\int \mathrm{d}t = -t + c = -\sqrt{a^2-x^2} + c$ (sostituzione $t = \sqrt{a^2-x^2}$).
20. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}t = t + c = \sqrt{1+x^2} + c$ (sostituzione $t = \sqrt{1+x^2}$).

Osservazioni:

1. Nell'Esempio 13 la condizione $(4ac-b^2)/4a^2 > 0$ implica che il polinomio ax^2+bx+c non ha radici reali. Al contrario la condizione $(4ac-b^2)/4a^2 < 0$ si presenta quando le radici sono reali. In tal caso l'integrale si può calcolare anche come sarà discusso in §11.3 a proposito dell'integrazione di funzioni razionali. Il caso in cui si abbia $(4ac-b^2)/4a^2 = 0$ si riconduce invece al caso 1 di §10.4, con $\alpha = -2$.
2. Gli integrali di $\cos^2 x$ e di $\sqrt{1-x^2}$, visti negli Esempi 8 e 9, si possono calcolare anche con il metodo di integrazione per parti (cfr. gli Esempi 7 e 10 di §11.2).

11.2 Integrazione per parti

Ricordiamo che, date due funzioni derivabili f e g, si ha $(fg)' = f'g + fg'$. Quindi integrando si ottiene

$$f(x)g(x) = \int f'(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x + \int f(x)\,g'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Si trova quindi

$$\int f'(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f(x)\,g'(x)\,\mathrm{d}x,$$

che è nota come *formula di integrazione per parti*.

Esempi:

1. $\displaystyle\int x\,\sin x\,\mathrm{d}x = -x\cos x + \int \cos x\,\mathrm{d}x = -x\cos x + \sin x + c.$

2. $\displaystyle\int \ln x\,\mathrm{d}x = x\ln x - \int \mathrm{d}x = x\ln x - x + c.$

3. $\displaystyle\int x\,\ln x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + c.$

4. $\displaystyle\int x\,e^x\,\mathrm{d}x = x\,e^x - \int e^x\,\mathrm{d}x = x\,e^x - e^x + c.$

5. $\displaystyle\int x^2\,e^x\,\mathrm{d}x = x^2\,e^x - 2\int x\,e^x\,\mathrm{d}x = e^x\left(x^2 - 2x + 2\right) + c.$

6. $\displaystyle\int \left(x^2+7x-5\right)\cos 2x\,\mathrm{d}x = \left(x^2+7x-5\right)\frac{\sin 2x}{2} - \frac{1}{2}\int (2x+7)\sin 2x\,\mathrm{d}x$
$\displaystyle= \left(x^2+7x-5\right)\frac{\sin 2x}{2} + (2x+7)\frac{\cos 2x}{4} - \frac{\sin 2x}{4} + c.$

7. $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = x\sqrt{1-x^2} - \int x\left(-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)\mathrm{d}x$
$\displaystyle= x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x + \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$
$\displaystyle= x\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x + \arcsin x + c$, da cui si ottiene
$\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x + c$ (cfr. anche l'esempio 9 di pag. 218).

8. $\displaystyle\int e^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x = e^{ax}\frac{b\sin bx + a\cos bx}{a^2+b^2} + c.$

9. $\displaystyle\int e^{ax}\sin bx\,\mathrm{d}x = e^{ax}\frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2+b^2} + c.$

10. $\displaystyle\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \int \cos x\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x)\,\mathrm{d}x = \cos x\sin x + \int \sin^2 x\,\mathrm{d}x$
$\displaystyle= \cos x\sin x + \int \left(1-\cos^2 x\right)\mathrm{d}x$, da cui si ottiene
$\displaystyle\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \sin x\cos x + x - \int \cos^2 x\,\mathrm{d}x \Longrightarrow \int \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{x+\sin x\cos x}{2}.$

11. $\displaystyle\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{x-\sin x\cos x}{2}.$

12. $\displaystyle\int \cos^4 x\,\mathrm{d}x = \int \cos^3 x\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x)\,\mathrm{d}x = \cos^3 x\sin x + 3\int \cos^2 x\sin^2 x\,\mathrm{d}x$
$= \cos^3 x\sin x + 3\displaystyle\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x - 3\int \cos^4 x\,\mathrm{d}x$, da cui si ottiene
$\displaystyle\int \cos^4 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\Big(\cos^3 x\sin x + 3\int \cos^2 x\Big) = \frac{1}{4}\Big(\cos^3 x\sin x + \frac{3}{2}\,(x + \sin x\cos x)\Big) + c.$

11.3 Integrazione di funzioni razionali

Definizione 11.1. *Le funzioni razionali del tipo*

$$1.\quad \frac{A}{x-a}, \qquad 2.\quad \frac{A}{(x-a)^k}, \qquad 3.\quad \frac{Ax+B}{x^2+px+q}, \qquad 4.\quad \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k},$$

dove $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, e A, B, p, q sono costanti reali tali che $p^2 - 4q < 0$, prendono il nome di elementi semplici *(o* fratti semplici*).*

Osservazioni:

1. La condizione $p^2 - 4q < 0$ assicura che il polinomio $x^2 + px + q$ non ha radici reali.
2. Alla luce dei risultati visti in precedenza, è immediato calcolare le primitive degli elementi semplici. Infatti per i primi tre elementi semplici si ha
$$\int \frac{A}{x-a}\,\mathrm{d}x = A\ln|x-a| + c,$$
$$\int \frac{A}{(x-a)^k}\,\mathrm{d}x = -\frac{A}{(k-1)\,(x-a)^{k-1}} + c,$$
$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x = \frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right| + \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + c,$$
dove si sono usati i risultati 1 e 2 di 10.4 (con la sostituzione $t = x - a$) e le formule degli esempi 13 e 15 di §13.1, mentre l'integrale dell'ultimo elemento semplice può essere discusso come segue.
3. Si ha $\displaystyle\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}\,\mathrm{d}x = \frac{A}{2}J_k + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) I_k$, dove
$$J_k = \int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k}\,\mathrm{d}x, \qquad I_k = \int \frac{1}{(x^2+px+q)^k}\,\mathrm{d}x.$$
Il primo integrale si calcola immediatamente e dà
$$J_k = \frac{1}{(1-k)\,(x^2+px+q)^{k-1}} + c.$$
Il secondo, ponendo $t = x + p/2$ e $m^2 = q - p^2/4 > 0$, si riscrive
$$I_k = L_k, \qquad L_k = \int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+m^2)^k} = \frac{1}{m^2}\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+m^2)^{k-1}} - \frac{1}{m^2}\int \frac{t^2\mathrm{d}t}{(t^2+m^2)^k},$$

dove, integrando per parti, si trova

$$\int \frac{t^2 \mathrm{d}t}{(t^2+m^2)^k} = -\frac{1}{2(k-1)}\left(\frac{t}{(t^2+m^2)^{k-1}} - \int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+m^2)^{k-1}}\right).$$

In conclusione

$$L_k = \frac{t}{2m^2(k-1)(t^2+m^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2m^2(k-1)} L_{k-1},$$

che fornisce un modo iterativo di calcolare L_k, fino a ridursi a

$$L_1 = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+m^2} = \frac{1}{m}\operatorname{arctg}\frac{t}{m} + c.$$

Esprimendo poi t e m in funzione di x, p, q si trova il valore di I_k.

4. Per esempio, per $k = 2$, si trova

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{Bp-2Aq+2Bx-Apx}{(4q-p^2)(x^2+px+x^2)} + \frac{2(Ap-2B)}{(4q-p^2)^{3/2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{p+2x}{\sqrt{4q-p^2}}\right) + c.$$

Esempi:

1. $\displaystyle\int \frac{4}{(x-3)^3}\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{(x-3)^2}.$
2. $\displaystyle\int \frac{2x+3}{6x^2+5x+2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\ln\left|6x^2+5x+2\right| + \frac{13}{3\sqrt{23}}\operatorname{arctg}\frac{12x+5}{\sqrt{23}} + c.$
3. $\displaystyle\int \frac{2x-1}{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}x = \ln\left|x^2+2x+5\right| - \frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2} + c.$
4. $\displaystyle\int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{x+2}{2(x^2+2x+3)} - \frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}} + c.$

Definizione 11.2. *Una funzione razionale $P(x)/Q(x)$ si dice* regolare *se il grado del numeratore è inferiore al grado del denominatore.*

Teorema 11.3. *Una funzione non regolare si può sempre scrivere come somma di un polinomio e di una funzione razionale regolare. In altre parole, se $P(x)/Q(x)$ non è regolare, allora esistono polinomi $M(x), F(x), f(x)$ tali che*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = M(x) + \frac{F(x)}{f(x)},$$

dove F ha grado inferiore a quello di f. Inoltre si ha $f(x) = Q(x)$.

Osservazione: per determinare i polinomi $M(x)$ e $F(x)$ si deve effettuare la divisione tra i due polinomi $P(x)$ e $Q(x)$: $M(x)$ è il quoziente e $F(x)$ è il resto della divisione.

Esempi:

1. $\dfrac{x^2}{x+1} = x - 1 + \dfrac{1}{x+1}$.
2. $\dfrac{x^2+2x+2}{x^2-1} = 1 + \dfrac{2x+3}{x^2-1}$.
3. $\dfrac{x^4+5x}{x^3+x+1} = x + \dfrac{4x-x^2}{x^3+x+1}$.
4. $\dfrac{x^3+3x^2+x+1}{x^2-x+3} = x + 4 + \dfrac{2x-11}{x^3+3x^2+x+1}$.

Teorema 11.4. *Sia $F(x)/f(x)$ una funzione razionale regolare e sia $x = a$ una radice reale di molteplicità k di $f(x)$, i.e. $f(x) = (x-a)^k f_1(x)$, dove $f_1(a) \neq 0$. Allora si ha*

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^k} + \frac{F_1(x)}{(x-a)^{k-1} f_1(x)},$$

dove A_1 è una costante e F_1 è un polinomio di grado inferiore a quello di $(x-a)^{k-1} f_1(x)$.

Teorema 11.5. *Sia $F(x)/f(x)$ una funzione razionale regolare e sia $x = a$ una radice reale di molteplicità k di $f(x)$. Allora si ha*

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^k} + \frac{A_2}{(x-a)^{k-1}} + \ldots + \frac{A_k}{x-a} + \frac{F_k(x)}{f_k(x)},$$

dove $A_1, A_2, \ldots, A_k$ sono costanti e $F_k(x)/f_k(x)$ è una funzione razionale regolare.

Dimostrazione. Si applica k volte di seguito il Teorema 11.4 rispetto alla radice $x = a$. ∎

Teorema 11.6. *Sia $F(x)/f(x)$ una funzione razionale regolare e sia $f(x) = (x^2+px+q)^k \varphi_1(x)$, dove $\varphi_1(x)$ non è divisibile per $x^2 + px + q$. Allora si ha*

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{M_1 x + N_1}{(x^2+px+q)^k} + \frac{\Phi_1(x)}{(x^2+px+q)^{k-1}\varphi_1(x)},$$

dove M_1, N_1 sono costanti e $\Phi_1(x)$ è un polinomio di grado inferiore a quello di $(x^2 + px + q)^{k-1}\varphi_1(x)$.

Teorema 11.7. *Sia $F(x)/f(x)$ una funzione razionale regolare e sia $f(x) = (x^2+px+q)^k \varphi_1(x)$, dove $\varphi_1(x)$ non è divisibile per $x^2 + px + q$. Allora si ha*

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{M_1 x + N_1}{(x^2+px+q)^k} + \frac{M_2 x + N_2}{(x^2+px+q)^{k-1}} + \ldots + \frac{M_k x + N_k}{x^2+px+q} + \frac{\Phi_k(x)}{\varphi_k(x)},$$

dove $M_1, N_1, M_2, N_2, \ldots, M_k, N_k$ sono costanti e $\Phi_k(x)/\varphi_k(x)$ è una funzione razionale regolare.

Dimostrazione. Si applica iterativamente il Teorema 11.6. ∎

Teorema 11.8. *Ogni funzione razionale regolare si può scrivere come somma di elementi semplici.*

Dimostrazione. Sia $F(x)/f(x)$ una funzione razionale regolare. Possiamo fattorizzare $f(x)$ scrivendo (cfr. §1.8)

$$f(x) = (x-a)^\alpha (x-b)^\beta \dots (x^2+px+q)^\mu (x^2+sx+r)^\nu \dots$$

dove si è tenuto conto che il coefficiente del monomio di ordine più alto di $f(x)$ si pùo associare a $F(x)$ (in altre parole se $f(x) = a_n x^n + \dots$ possiamo ridefinire $\bar{F}(x) = F(x)/a_n$ e $\bar{f}(x) = f(x)/a_n = x^n + \dots$).

Allora applicando iterativamente i Teoremi 11.5 e 11.7, otteniamo che $F(x)/f(x)$ si può scrivere come

$$\begin{aligned}\frac{F(x)}{f(x)} = &\frac{A_1}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-1}} + \dots + \frac{A_\alpha}{x-a} \\ &+ \frac{B_1}{(x-b)^\beta} + \frac{B_2}{(x-b)^{\beta-1}} + \dots + \frac{B_\beta}{x-b} \\ &+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &+ \frac{M_1 x + N_1}{(x^2+px+q)^\mu} + \frac{M_2 x + N_2}{(x^2+px+q)^{\mu-1}} + \dots + \frac{M_\mu x + N_\mu}{x^2+px+q} \\ &+ \frac{P_1 x + Q_1}{(x^2+rx+s)^\nu} + \frac{P_2 x + Q_2}{(x^2+rx+s)^{\nu-1}} + \dots + \frac{P_\nu x + Q_\nu}{x^2+rx+s} \\ &+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\end{aligned}$$

dove i coefficienti $A_1, A_2, \dots, B_1, B_2, \dots, M_1, N_1, M_2, N_2, \dots, P_1, Q_1, P_2, Q_2, \dots$ vanno determinati imponendo che le due espressioni siano uguali. ∎

Osservazioni:

1. Il procedimento per determinare i coefficienti qui descritto prende il nome di *metodo dei coefficienti indeterminati.*
2. In principio il metodo dei coefficienti indeterminati permette di scomporre ogni funzione razionale regolare in somma di elementi semplici. Ovviamente quello che può essere difficile, da un punto di vista pratico, è determinare le radici del polinomio $f(x)$ a denominatore.

Esempi:

1. $\dfrac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)} = -\dfrac{1}{(x+1)^3} + \dfrac{1}{3(x+1)^2} - \dfrac{2}{9(x+1)} + \dfrac{2}{9(x-2)}.$
2. $\dfrac{x+3}{x(x-2)(x+2)} = -\dfrac{3}{4x} + \dfrac{1}{8(x+2)} + \dfrac{5}{8(x-2)}.$

3. $\dfrac{x^3+x^2+x+1}{(x-1)^2x^2} = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{3}{x} + \dfrac{4}{(x-1)^2} - \dfrac{2}{x-1}$.

4. $\dfrac{x^4-x+2}{x(x+2)^4} = \dfrac{1}{8x} - \dfrac{10}{(x+2)^4} + \dfrac{23}{2(x-2)^3} - \dfrac{25}{4(x+2)^2} + \dfrac{7}{8(x+2)}$.

5. $\dfrac{x+1}{(x-1)(x^2+2)} = \dfrac{2}{3(x-1)} + \dfrac{1-2x}{3(x^2+2)}$.

6. $\dfrac{1}{x(x^2+1)^2} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{(x^2+1)^2} - \dfrac{x}{(x^2+1)}$.

I risultati visti finora permettono di calcolare l'integrale di qualsiasi funzione regolare. Infatti, data una funzione razionale $P(x)/Q(x)$, per prima cosa applichiamo il Teorema 11.3 per scrivere $P(x)/Q(x) = M(x) + F(x)/f(x)$, con $f(x) = Q(x)$. La funzione $M(x)$ si integra facilmente essendo un polinomio. Utilizzando il Teorema 11.8 si scompone quindi $F(x)/f(x)$ in somma di elementi semplici, dei quali sappiamo calcolare l'integrale (cfr. le osservazioni dopo la Definizione 11.1).

Esempi:

1. $\displaystyle\int \frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{3(x+1)} - \frac{2}{9}\ln|x+1| + \frac{2}{9}\ln|x-2| + c.$

2. $\displaystyle\int \frac{x}{(x^2+1)(x-1)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + c.$

3. $\displaystyle\int \frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)}\,\mathrm{d}x = \frac{-(x+2)}{2(x^2+2x+3)} - \frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}} + \ln|x+1| + c.$

4. $\displaystyle\int \frac{x^4-x+2}{x(x+2)^4} = \frac{1}{8}\ln|x| + \frac{10}{3(x+2)^3} - \frac{23}{4(x-2)^2} + \frac{25}{4(x+2)} + \frac{7}{8}\ln|x+2| + c.$

5. $\displaystyle\int \frac{x+1}{(x-1)(x^2+2)}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{3}\ln(x^2+2) + \frac{1}{3\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} + c.$

6. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2(x^2+1)} = -\frac{1}{x} - \operatorname{arctg} x + c.$

7. $\displaystyle\int \frac{x^3+x^2+x+1}{(x-1)^2x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{x} + 3\ln|x| - \frac{4}{x-1} - \ln|x-1| + c.$

8. $\displaystyle\int \frac{1}{x(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + \frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c.$

Osservazioni:

1. Se riconsideriamo l'integrale dell'Esempio 12 di §10.4, possiamo notare che si può scomporre $1/(a^2 - x^2)$ in elementi semplici, i.e.

$$\frac{1}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x+a} - \frac{1}{x-a}\right),$$

quindi si trova

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\left(\int \frac{1}{x+a} - \int \frac{1}{x-a}\right) = \frac{1}{2a}\left(\ln|x+a| - \ln|x-a|\right) + c,$$

i.e.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + c,$$

in accordo con quanto già trovato.

2. In particolare l'integrale 12 di §13.4 si può ottenere in questo modo.

11.4 Esercizi

1. Si calcoli $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x + 1)}$.
2. Si calcoli $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + 4x + 3}$.
3. Si calcoli $\displaystyle\int \left(\sqrt{x} + (x+2)^{3/2} + \frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$.
4. Si calcoli $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin x}\,\cos x\,\mathrm{d}x$.
5. Si calcoli $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2 - 5x + 6}\mathrm{d}x$.
6. Si calcoli $\displaystyle\int \sqrt{2^x - 1}\,\mathrm{d}x$.
7. Si calcoli $\displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt{1 - e^{2x}}}\mathrm{d}x$.
8. Si calcoli $\displaystyle\int \arccos x\,(1 + \arccos x)\,\mathrm{d}x$.
9. Si calcoli $\displaystyle\int \frac{x-1}{2x^3 - 4x^2 - 6x}\mathrm{d}x$.
10. Si calcoli $\displaystyle\int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

11. Si calcoli $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\operatorname{tg} x}$.

12. Si calcoli $\displaystyle\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

13. Si calcoli $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

14. Si calcoli $\displaystyle\int \ln^2 x\,\mathrm{d}x$.

15. Si calcoli $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$.

16. Si calcoli $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x}$.

17. Si calcoli $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x+1}}$.

18. Si calcoli $\displaystyle\int \sin(\ln x)\,\mathrm{d}x$.

19. Si calcoli $\displaystyle\int \frac{\ln(1+x)}{x^2}\mathrm{d}x$.

20. Si calcoli $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)}}$.

21. Si calcoli $\displaystyle\int e^{3x}e^{e^x}\mathrm{d}x$.

22. Si calcoli $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}\,e^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

23. Si calcoli $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3+x^2+2}{x^2+3}\mathrm{d}x$.

24. Si calcoli $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x^3}\,\mathrm{d}x$.

25. Si calcoli $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\,\cos^5 x\,\mathrm{d}x$.

26. Si calcoli $\displaystyle\int \frac{x\sqrt{x^2-3}}{x^2+1}\mathrm{d}x$.

27. Si dimostri che $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}\mathrm{d}x = 1$.

28. Si calcoli $\int x\sqrt{x+1}\mathrm{d}x$.

Soluzioni:

1. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x+1)} = \ln|\ln x+1| + c.$

2. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+3} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x+3)} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x+1} - \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x+3}$
   $= \frac{1}{2}\left(\ln|x+1| - \ln|x+3|\right) + c \Longrightarrow \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+3} = \frac{1}{2}\left(\ln|x+1| - \ln|x+3|\right)\Big|_0^1$
   $= \frac{1}{2}\left(\ln 2 - \ln 4 + \ln 3\right) = \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}.$

3. $\displaystyle\int \left(\sqrt{x} + (x+2)^{3/2} + \frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$
   $\displaystyle= \int \sqrt{x}\mathrm{d}x + \int (x+2)^{3/2}\mathrm{d}x + \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \frac{2}{3}x^{3/2} + \frac{2}{5}(x+2)^{5/2} - \frac{1}{x} + c.$

4. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin x}\,\cos x\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\,(\sin x)^{3/2}\Big|_0^{\pi/2} = \frac{2}{3}.$

5. $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2-5x+6}\mathrm{d}x = 5\ln|x-3| - 4\ln|x-2| + c.$

6. Con la sostituzione $2^x - 1 = t^2$ si ottiene

$$\int \sqrt{2^x-1}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\ln 2}\int \frac{t^2}{t^2+1}\mathrm{d}t,$$

   dove si è usato che

$$x = \log_2(t^2+1) = \frac{1}{\ln 2}\ln(t^2+1) \quad\Longrightarrow\quad \mathrm{d}x = \frac{1}{\ln 2}\frac{2t}{t^2+1}.$$

   Si ha quindi

$$\int \frac{t^2}{t^2+1}\mathrm{d}t = \int \mathrm{d}t - \int \frac{1}{t^2+1}\mathrm{d}t = t - \operatorname{arctg} t + c,$$

   da cui si ricava

$$\int \sqrt{2^x-1}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\ln 2}\left(\sqrt{2^x-1} - \operatorname{arctg}\sqrt{2^x-1}\right) + c.$$

7. $\displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\mathrm{d}x = \arcsin\, e^x + c.$

8. $\int \arccos x\,(1+\arccos x)\,\mathrm{d}x = \int \arccos x \mathrm{d}x + \int \arccos^2 x \mathrm{d}x$, dove
$\int \arccos x \mathrm{d}x = x\,\arccos x - \sqrt{1-x^2} + c$, $\int \arccos^2 x \mathrm{d}x$
$= x\,\arccos^2 x - 2\sqrt{1-x^2}\arccos x - 2x + c \Longrightarrow \int \arccos x\,(1+\arccos x)\,\mathrm{d}x$
$= x\arccos x\,(1+\arccos x) - \sqrt{1-x^2}\,(1+2\arccos x) - 2x + c.$

9. $\int \dfrac{x-1}{2x^3-4x^2-6x}\mathrm{d}x = \dfrac{1}{12}\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x-3} + \dfrac{1}{6}\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x} - \dfrac{1}{4}\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x+1}$
$= \dfrac{1}{12}\ln|x-3| + \dfrac{1}{6}\ln|x| - \dfrac{1}{4}\ln|x+1| + c.$

10. $\int \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2\sqrt{x}\,(\ln|x|-2) \Longrightarrow$
$\int_1^4 \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2\sqrt{x}\,(\ln|x|-2)\Big|_1^4 = 4\,(\ln 4 - 2) + 4 = 4\,(\ln 4 - 1).$

11. Con la sostituzione $\operatorname{tg} x = t$ si ottiene

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\operatorname{tg} x} = \int \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)(1+t^2)},$$

dove si è usato che $x = \operatorname{arctg} t \Longrightarrow \mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$. Si ha quindi

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)(1+t^2)} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{1+t} - \frac{1}{2}\int \frac{t-1}{(1+t)^2}\mathrm{d}t,$$

dove

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \ln|1+t| + c, \quad \int \frac{t}{1+t^2}\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\ln|1+t^2| + c, \quad \int \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \operatorname{arctg} t + c,$$

da cui si ottiene

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)(1+t^2)} = \frac{1}{2}\ln|1+t| - \frac{1}{4}\ln|1+t^2| + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + c$$

e quindi

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\operatorname{tg} x} &= \frac{1}{2}\ln|1+\operatorname{tg} x| - \frac{1}{4}\ln|1+\operatorname{tg}^2 x| + \frac{x}{2} + c \\ &= \frac{1}{2}\left(\ln\left|\frac{1+\operatorname{tg} x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}\right| + x\right) + c = \frac{1}{2}\left(\ln|\sin x + \cos x| + x\right) + c.\end{aligned}$$

12. $\int \dfrac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = -2\cos\sqrt{x} + c.$

13. Con la sostituzione $\sqrt{x} = t$ si ottiene

$$\int \frac{\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2\int \frac{t^2}{2+t}\mathrm{d}t,$$

dove

$$\frac{t^2}{2+t} = t - 2 + \frac{4}{2+t},$$

da cui si ha

$$\int \frac{t^2}{2+t}\mathrm{d}t = \int t\,\mathrm{d}t - 2\int \mathrm{d}t + 4\int \frac{\mathrm{d}t}{2+t} = \frac{t^2}{2} - 2t + 4\ln|2+t| + c$$

e quindi

$$\int \frac{\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}\mathrm{d}x = x - 4\sqrt{x} + 8\ln|2+\sqrt{x}| + c.$$

14. $\int \ln^2 x\,\mathrm{d}x = x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + c.$

15. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)} = \int \frac{\mathrm{d}x}{2\sin(x/2)\cos(x/2)} = \int \frac{\mathrm{d}t}{\sin t\cos t}$, dove $t = x/2$.
Quindi $\int \frac{\mathrm{d}t}{\sin t\cos t} = \int \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{tg}\,t\cos^2 t} = \ln|\mathrm{tg}\,t| + c \Longrightarrow \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \ln|\mathrm{tg}\,(x/2)| + c.$

16. $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x} = \int \frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x}\mathrm{d}x = \int \frac{1-\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} - \int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$
$= \mathrm{tg}\,x - \frac{1}{\cos x} + c.$

17. Con la sostituzione $\sqrt{x+1} = t$ si ottiene

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x+1}} = 2\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2-1},$$

dove si è usato che $x = t^2 - 1 \Longrightarrow \mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t$. Quindi

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2-1} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{t-1} - \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{t+1} = \frac{1}{2}\left(\ln|t-1| - \ln|t+1|\right) + c,$$

così che

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x+1}} = \ln|\sqrt{x+1}-1| - \ln|\sqrt{x+1}+1| + c.$$

18. Con la sostituzione $x = e^t$ si ha $\int \sin(\ln x)\,\mathrm{d}x = \int \sin t\, e^t = \frac{1}{2}\left(e^t\sin t - e^t\cos t\right) + c$
$\Longrightarrow \int \sin(\ln x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x)\right) + c.$

19. $\displaystyle\int \frac{\ln(1+x)}{x^2}\mathrm{d}x = -\frac{\ln(1+x)}{x} + \int \frac{\mathrm{d}x}{x(1+x)}$, dove $\displaystyle\frac{1}{x(1+x)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x}$
$\displaystyle\implies \int \frac{\ln(1+x)}{x^2}\mathrm{d}x = -\frac{\ln(1+x)}{x} + \ln|x| - \ln|1+x| + c.$

20. Con la sostituzione $\sqrt{x} = t$ si ottiene

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)}} = 2\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}},$$

dove si è usato che $x = t^2 \implies \mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t$. Quindi

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + c \quad\implies\quad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)}} = 2\arcsin\sqrt{x} + c.$$

21. Con la sostituzione $e^x = t$ si trova

$$\int e^{3x}e^{e^x}\mathrm{d}x = \int t^2\, e^t\,\mathrm{d}t = e^{e^x}(e^{2x} - 2e^x + 2) + c,$$

dove si è usato l'Esempio 5 di §11.2.

22. Con la sostituzione $\sqrt{x} = t$ si ha

$$\int \sqrt{x}\, e^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2\int t^2\, e^t\mathrm{d}t = 2e^{\sqrt{x}}(x - 2\sqrt{x} + 2) + c,$$

dove si è usato l'Esempio 5 di §11.2.

23. Si ha

$$\frac{x^3+x^2+2}{x^2+3} = x + 1 - \frac{3x}{x^2+3} - \frac{1}{x^2+3},$$

quindi

$$\int \frac{x^3+x^2+2}{x^2+3}\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + x - -\frac{3}{2}\ln(x^2+3) - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}},$$

da cui si ottiene

$$\int_0^1 \frac{x^3+x^2+2}{x^2+3}\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\left(1 - \ln\frac{4}{3}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

24. Si trova $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x^3}\,\mathrm{d}x = -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2}$.

25. Si ha

$$\int \sin^2 x\, \cos^5 x\,\mathrm{d}x = \int \left(\sin^2 x\, \cos x\right)\cos^4 x\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{3}\sin^3 x\right)' \cos^4 x\,\mathrm{d}x,$$

e quindi, integrando per parti si ottiene

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x\, \cos^5 x\, \mathrm{d}x &= \frac{1}{3}\sin^3 x\, \cos^4 x + \frac{4}{3}\int \sin^4 x\, \cos^3 x\, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{3}\sin^3 x\, \cos^4 x + \frac{4}{3}\int \sin^2 x\, \left(1-\cos^2 x\right) \cos^3 x\, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{3}\sin^3 x\, \cos^4 x + \frac{4}{3}\int \sin^2 x \cos^3 x\, \mathrm{d}x - \frac{4}{3}\int \sin^2 x \cos^5 x\, \mathrm{d}x,\end{aligned}$$

che implica

$$\frac{7}{3}\int \sin^2 x\, \cos^5 x\, \mathrm{d}x = \frac{1}{3}\sin^3 x\, \cos^4 x + \frac{4}{3}\int \sin^2 x \cos^3 x\, \mathrm{d}x.$$

Ci si è così ridotti a calcolare l'integrale $\displaystyle\int \sin^2 x \cos^3 x\, \mathrm{d}x$, che può essere discusso in modo simile. Si ha infatti

$$\int \sin^2 x\, \cos^3 x\, \mathrm{d}x = \int \left(\sin^2 x\, \cos x\right) \cos^2 x\, \mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{3}\sin^3 x\right)' \cos^2 x\, \mathrm{d}x,$$

e quindi, integrando di nuovo per parti,

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x\, \cos^3 x\, \mathrm{d}x &= \frac{1}{3}\sin^3 x\, \cos^2 x + \frac{2}{3}\int \sin^4 x\, \cos x\, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{3}\sin^3 x\, \cos^2 x + \frac{2}{3}\int \sin^2 x\, \left(1-\cos^2 x\right) \cos x\, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{3}\sin^3 x\, \cos^2 x + \frac{2}{3}\int \sin^2 x \cos x\, \mathrm{d}x - \frac{2}{3}\int \sin^2 x \cos^3 x\, \mathrm{d}x,\end{aligned}$$

che implica

$$\begin{aligned}\frac{5}{3}\int \sin^2 x\, \cos^3 x\, \mathrm{d}x &= \frac{1}{3}\sin^3 x\, \cos^2 x + \frac{2}{3}\int \sin^2 x \cos x\, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{3}\sin^3 x\, \cos^2 x + \frac{2}{9}\sin^3 x + c.\end{aligned}$$

Unendo i risultati, otteniamo

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x\, \cos^5 x\, \mathrm{d}x &= \frac{3}{7}\left(\frac{1}{3}\sin^3 x\, \cos^4 x + \frac{4}{3}\int \sin^2 x \cos^3 x\, \mathrm{d}x\right) \\ &= \frac{3}{7}\left(\frac{1}{3}\sin^3 x\, \cos^4 x + \frac{4}{3}\frac{3}{5}\left(\frac{1}{3}\sin^3 x\, \cos^2 x + \frac{2}{9}\sin^3 x\right)\right) + c\end{aligned}$$

In conclusione

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\, \cos^5 x\, \mathrm{d}x = \frac{3}{7}\frac{4}{3}\frac{3}{5}\frac{2}{9} = \frac{8}{105}.$$

26. Con la sostituzione $t = \sqrt{x^2-3}$ si trova

$$\int \frac{x\sqrt{x^2-3}}{x^2+1}\mathrm{d}x = \int \frac{t^2}{t^2+4}\mathrm{d}t = \int \mathrm{d}t - 4\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+4} = t - 2\operatorname{arctg}\frac{t}{2} + c,$$

quindi $\displaystyle\int \frac{x\sqrt{x^2-3}}{x^2+1}\mathrm{d}x = \sqrt{x^2-3} - 2\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{x^2-3}}{2}\right) + c.$

27. Con la sostituzione $t = e^{2x}$ si trova

$$\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{t}{t+1}\frac{\mathrm{d}t}{t} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{t+1} = \frac{1}{2}\ln|t+1| + c = \frac{1}{2}\ln\left(e^{2x}+1\right) + c,$$

dove si è usato che $t = e^{2x} \Longrightarrow 2x = \ln t = x = (1/2)\ln t = \varphi(t)$, così che $\varphi'(t) = 1/2t$. Si ha quindi

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\ln\left(e^{2x}+1\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{2}\left(\ln(e^2+1) - \ln(e^{-2}+1)\right)\\ &= \frac{1}{2}\ln\frac{e^2+1}{e^{-2}+1} = \frac{1}{2}\ln\frac{e\,(e+e^{-1})}{e^{-1}(e^{-1}+e)} = \frac{1}{2}\ln e^2 = \ln e = 1.\end{aligned}$$

28. Con la sostituzione $t = \sqrt{1+x}$ (e quindi $x = t^2-1$), si trova

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{1+x}\,\mathrm{d}x &= \int (t^2-1)t\,2t\,\mathrm{d}t = 2\int (t^2-1)t^2\,\mathrm{d}t = 2\int t^4\,\mathrm{d}t - 2\int t^2\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{2}{5}t^5 - \frac{2}{3}t^3 + c = \frac{2}{5}(1+x)^{5/2} - \frac{2}{3}(1+x)^{3/2} + c,\end{aligned}$$

così che

$$\int_1^3 x\sqrt{1+x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{5}(1+x)^{5/2} - \frac{2}{3}(1+x)^{3/2}\Big|_1^3 = \frac{2}{5}\left(4^{5/2} - 2^{5/2}\right) - \frac{2}{3}\left(4^{3/2} - 2^{3/2}\right).$$

12 | Formula di Taylor

12.1 Approssimazioni di funzioni con polinomi

La formula di Taylor serve per approssimare una funzione nell'intorno di un punto. Ricordiamo il teorema di Lagrange (Teorema 8.3): se f è derivabile in un intorno di x_0 allora si ha

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi)\,(x - x_0)$$

per un opportuno ξ. Quindi, per x vicino a x_0, possiamo dire che $f(x)$ è vicino al valore $f(x_0)$ e l'errore che si compie nell'approssimare $f(x)$ con $f(x_0)$ è infinitesimo di ordine 1 per $x \to x_0$ (cfr. §6.5): quindi più x è vicino a x_0, più piccole è l'errore.

La formula di Taylor generalizza il teorema di Lagrange e permette di approssimare una funzione sufficientemente regolare entro la precisione che si vuole.

Sia f una funzione derivabile almeno $n+1$ volte in un intervallo I contenente il punto x_0. Vogliamo determinare un polinomio $P_n(x)$ di ordine n tale che il valore che esso assume in x_0 sia uguale al valore della funzione f in x_0 e, allo stesso tempo, le sue prime n derivate in x_0 siano uguali alle derivate corrispondenti della funzione f in x_0. In formule richiediamo quindi:

$$\begin{cases} f(x_0) = P_n(x_0), \\ f'(x_0) = P_n'(x_0), \\ f''(x_0) = P_n''(x_0), \\ \dots\dots\dots, \\ f^{(n)}(x_0) = P_n^{(n)}(x_0). \end{cases}$$

Scriviamo il polinomio $P_n(x)$ nella forma

$$\begin{aligned} P_n(x) &= C_0 + C_1\,(x - x_0) + C_2\,(x - x_0)^2 + \ldots + C_n\,(x - x_0)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} C_k\,(x - x_0)^k\,, \end{aligned}$$

con i coefficienti C_k da determinare in modo che le relazioni sopra siano soddisfatte.

Calcolando le derivate di $P_n(x)$ si trova:

$$\begin{cases} P_n'(x) = C_1 + 2C_2\,(x-x_0) + 3C_3\,(x-x_0)^2 + \ldots + nC_n\,(x-x_0)^{n-1}\,, \\ P_n''(x) = 2C_2 + 3\cdot 2C_3\,(x-x_0) + 4\cdot 3C_4\,(x-x_0)^2 + \ldots + n\cdot(n-1)\,C_n\,(x-x_0)^{n-2}\,, \\ P_n'''(x) = 3\cdot 2C_3 + 4\cdot 3\cdot 2C_4\,(x-x_0) + \ldots + n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\,C_n\,(x-x_0)^{n-3}\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ P_n^{(n-1)}(x) = (n-1)\cdot(n-2)\ldots 2C_{n-1} + n\cdot(n-1)\ldots 2C_n\,(x-x_0)\,, \\ P_n^{(n)}(x) = n\cdot(n-1)\ldots 2C_n, \end{cases}$$

così che, imponendo $P^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$ per $k = 0, \ldots, n$, troviamo

$$\begin{cases} f(x_0) = P_n(x_0) = C_0, \\ f'(x_0) = P_n'(x_0) = C_1, \\ f''(x_0) = P_n''(x_0) = 2\,C_2 = 2!\,C_2, \\ f'''(x_0) = P_n'''(x_0) = 3\cdot 2C_3 = 3!\,C_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ f^{(n-1)}(x_0) = P_n^{(n-1)}(x_0) = (n-1)\cdot(n-2)\ldots 2C_{n-1} = (n-1)!\,C_{n-1}, \\ f^{(n)}(x_0) = P_n^{(n)}(x_0) = n\cdot(n-1)\ldots 2C_n = n!\,C_n, \end{cases}$$

che possiamo scrivere in modo compatto come

$$C_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0), \qquad k = 0, \ldots, n.$$

In conclusione il polinomio $P_n(x)$ avrà la forma

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)\ (x-x_0)^k\,.$$

Chiamiamo $R_n(x)$ la differenza tra la funzione $f(x)$ e il polinomio $P_n(x)$,

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x).$$

Possiamo quindi scrivere

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)\ (x-x_0)^k + R_n(x).$$

La funzione $R_n(x)$ si chiama *resto* di ordine n. Scriviamo

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}\,(x-x_0)^{n+1}\,Q(x),$$

con $Q(x)$ da determinare. Per t compreso tra x_0 e x (i.e. $t \in (x_0, x)$ se $x > x_0$ e $t \in (x, x_0)$ se $x < x_0$) definiamo la funzione

$$F(t) = f(x) - f(t) - \frac{x-t}{1} f'(t) - \frac{(x-t)^2}{2!} f''(t) - \ldots \\ - \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n)}(t) - \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} Q(x).$$

Se calcoliamo la derivata di $F(t)$ rispetto a t troviamo

$$F'(t) = -f'(t) + f'(t) - \frac{x-t}{1}f''(t) + \frac{2(x-t)}{2!}f''(t) - \frac{(x-t)^2}{2!}f'''(t) - \dots$$
$$+\frac{n(x-t)^{n-1}}{n!}f^{(n)}(t) - \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t) + \frac{(n+1)(x-t)^n}{(n+1)!}Q(x),$$

che si può semplificare in

$$F'(t) = \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t) + \frac{(n+1)(x-t)^n}{(n+1)!}Q(x).$$

Inoltre si ha, per costruzione, $F(x_0) = F(x) = 0$: possiamo quindi applicare il Teorema 8.1 (di Rolle), per concludere che esiste ξ, compreso tra x_0 e x tale che $F'(\xi) = 0$. Per tale valore $t = \xi$ si ha quindi

$$F'(\xi) = \frac{(x-\xi)^n}{n!}f^{(n+1)}(\xi) + \frac{(n+1)(x-\xi)^n}{(n+1)!}Q(x) = 0,$$

da cui si deduce $Q(x) = f^{(n+1)}(\xi)$. Quindi otteniamo la seguente espressione per il resto (nota come *forma di Lagrange per il resto*)

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}\,(x-x_0)^{n+1}\,f^{(n+1)}(\xi),$$

dove ξ è un opportuno valore compreso tra x_0 e x (quindi fissato x_0 è funzione di x). In conclusione possiamo scrivere

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)\;(x-x_0)^k + \frac{1}{(n+1)!}\,(x-x_0)^{n+1}\,f^{(n+1)}(\xi),$$

che è chiamata *formula di Taylor con il resto di Lagrange*. Nel caso in cui sia $x_0 = 0$ la formula è talvolta chiamata *formula di MacLaurin*.

Se approssimiamo una funzione $f(x)$, per x vicino a un valore x_0, con un polinomio di ordine n, troviamo che l'approssimazione diventa sempre migliore all'aumentare di n. Per esempio, se se $f(x) = e^x$, si ha (cfr. §14.2 più avanti):

$$P_1(x) = 1 + x,$$
$$P_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!},$$
$$P_3(x) = x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!},$$
$$P_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!},$$
$$P_5(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!},$$
$$P_6(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!},$$

e così via.

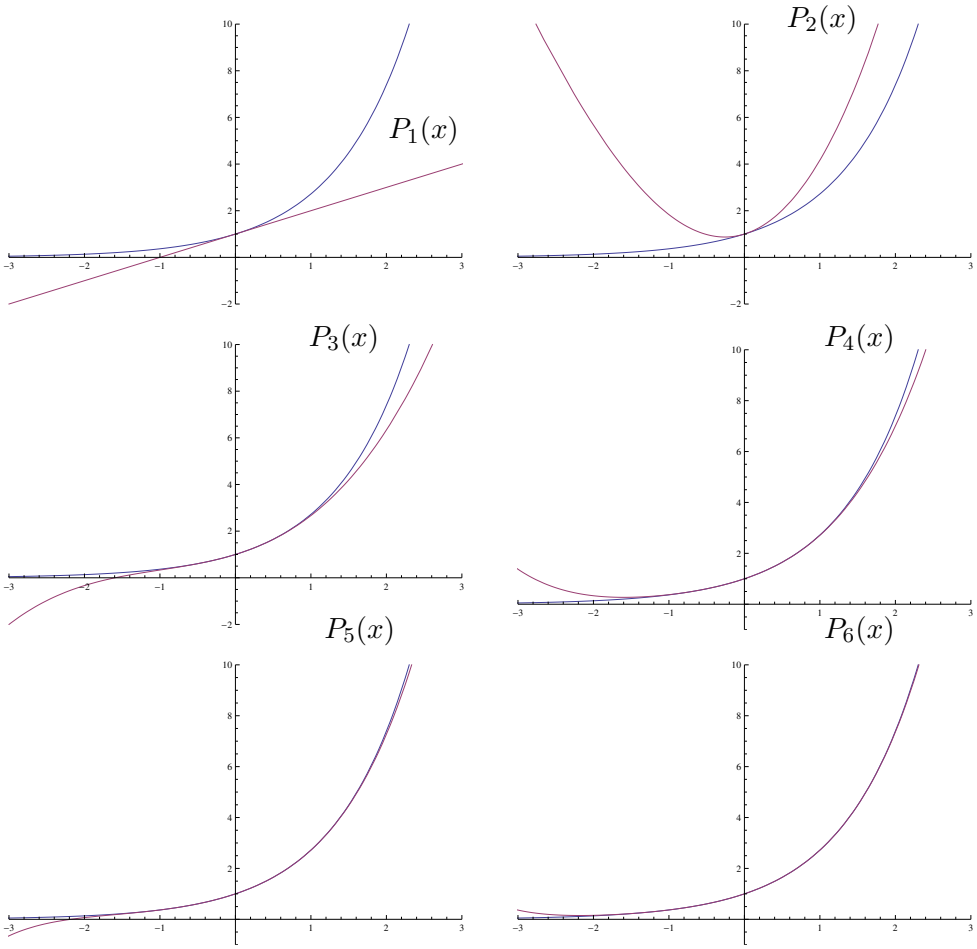


Figura 12.1: Confronto tra $f(x) = e^x$ e i polinomi approssimanti fino all'ordine 6.

Al crescere di n i polinomi $P_n(x)$ costituiscono, per x vicino a $x_0 = 0$, un'approssimazione sempre migliore di $f(x)$; cfr. la Figura 12.1. Ovviamente, per ogni $n \in \mathbb{N}$, per x grande le funzioni e^x e $P_n(x)$ sono molto diverse. Si vede comunque dalla figura che per x piccolo (in realtà fino a $|x| \approx 3$) già il polinomio $P_6(x)$ costituisce un'ottima approssimazione di e^x.

Analogamente, se $f(x) = \sin x$, si ha (cfr. §14.3 più avanti):

$$\begin{aligned}
P_1(x) &= P_2(x) = x,\\
P_3(x) &= P_4(x) = x - \frac{x^3}{3!},\\
P_5(x) &= P_6(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!},\\
P_7(x) &= P_8(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!},\\
P_9(x) &= P_{10}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!},\\
P_{11}(x) &= P_{12}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!},
\end{aligned}$$

e così via. Se confrontiamo la funzione $\sin x$ con i polinomi di ordine dispari $P_1(x)$, $P_3(x)$, $P_5(x)$ e $P_5(x)$ si ha la situazione rappresentata in Figura 12.2. Di nuovo si ha un'ottima approssimazione in tutto l'intervallo $[-\pi, \pi]$ già a $n = 11$.

12.2 Formula di MacLaurin di funzioni elementari

14.2.1 Formula di MacLaurin per la funzione e^x

Se $f(x) = e^x$ si ha $f'(x) = e^x$. Derivando ulteriormente si vede che $f^{(n)}(x) = e^x$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Quindi per $x_0 = 0$ si trova la formula di MacLaurin

$$\begin{aligned}
e^x &= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + R_n(x)\\
&= 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + R_n(x),
\end{aligned}$$

dove

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}x^{n+1}\, e^{\xi},$$

per ξ opportuno compreso tra 0 e x. Si può dimostrare che per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha $R_n(x) \to 0$ per $n \to +\infty$.

14.2.2 Formula di MacLaurin per la funzione $\sin x$

Se $f(x) = \sin x$ si ha $f'(x) = \cos x$ e $f''(x) = -\sin x$. Iterando si trova $f'''(x) = -\cos x$, $f^{(4)}(x) = \sin x$, e così via. In particolare si vede che

- le derivate dispari sono, alternativamente, $f^{(n)}(x) = \cos x$ (per $n = 1, 5, 9, 13, \ldots$) e $f^{(n)}(x) = -\cos x$ (per $n = 3, 7, 11, 15, \ldots$),

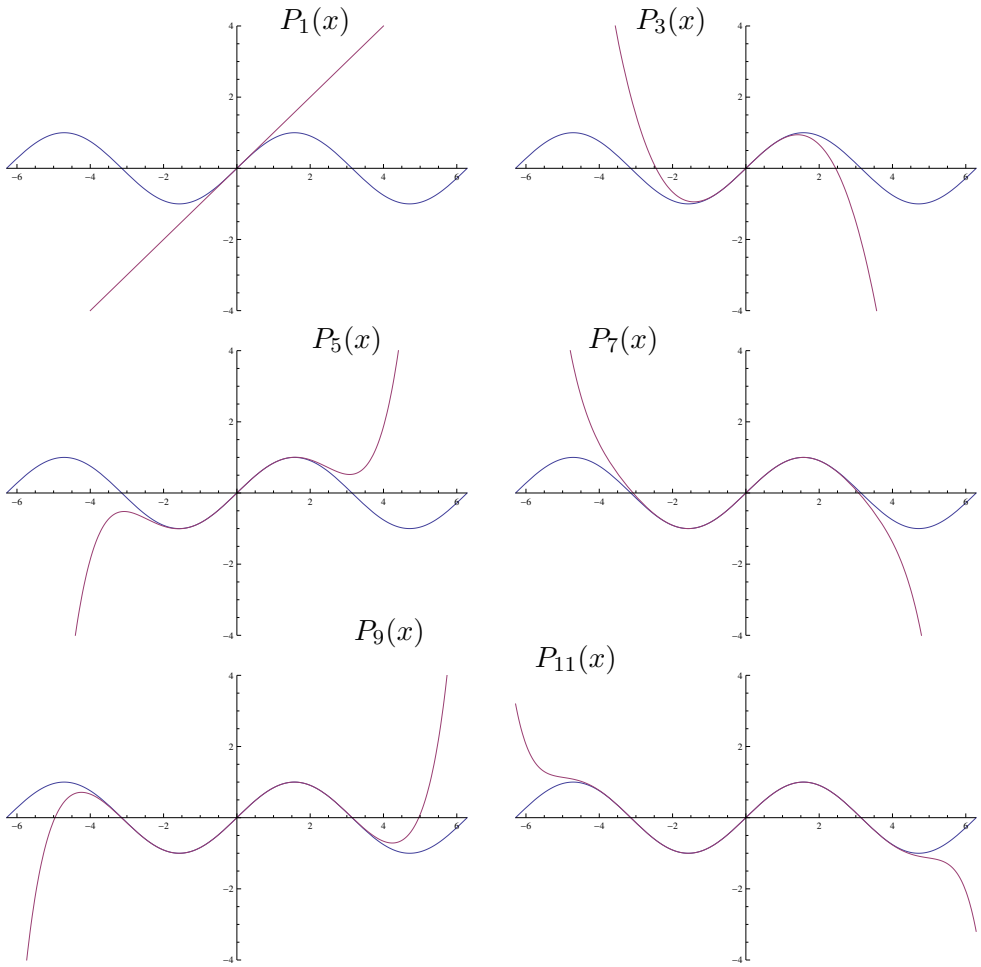


Figura 12.2: Confronto tra $f(x) = \sin x$ e i polinomi approssimanti fino all'ordine 11.

- le derivate pari sono, alternativamente, $f^{(n)}(x) = \sin x$ (per $n = 0, 4, 8, 12, \ldots$) e $f^{(n)}(x) = -\sin x$ (per $n = 2, 6, 10, 14, \ldots$).

Di conseguenza, calcolate in $x = x_0 = 0$ le derivate pari sono tutte nulle, mentre le derivate dispari sono alternativamente uguali a 1 e -1. Per $n = 2k + 1$ possiamo quindi scrivere $f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k$.

Quindi si trova la formula di MacLaurin

$$\begin{aligned} \sin x &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + R_{2n+1}(x) \\ &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + R_{2n+1}(x), \end{aligned}$$

dove

$$R_{2n+1}(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+2)!}x^{2n+2} \sin \xi,$$

per ξ opportuno compreso tra 0 e x. Anche in questo caso per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha $R_{2n+1}(x) \to 0$ per $n \to +\infty$.

14.2.3 Formula di MacLaurin per la funzione $\cos x$

Se $f(x) = \cos x$ si ha $f'(x) = -\sin x$ e $f''(x) = -\cos x$. Quindi, ragionando analogamente a quanto fatto per $\sin x$, iterando si trova $f'''(x) = \sin x$, $f^{(4)}(x) = \cos x$, e così via. In particolare si vede che

- le derivate dispari sono, alternativamente, $f^{(n)}(x) = -\sin x$ (per $n = 1, 5, 9, 13, \ldots$) e $f^{(n)}(x) = \sin x$ (per $n = 3, 7, 11, 15, \ldots$),
- la derivate pari sono, alternativamente, $f^{(n)}(x) = \cos x$ (per $n = 0, 4, 8, 12, \ldots$) e $f^{(n)}(x) = -\cos x$ (per $n = 2, 6, 10, 14, \ldots$).

Calcolate in $x = x_0 = 0$ le derivate dispari sono quindi tutte nulle, mentre le derivate pari sono alternativamente uguali a 1 e -1. Per $n = 2k$ possiamo quindi scrivere $f^{(2k)}(0) = (-1)^k$. Quindi si trova la formula di MacLaurin

$$\begin{aligned}\cos x &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + R_{2n}(x) \\ &= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + R_{2n}(x),\end{aligned}$$

dove

$$R_{2n}(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}x^{2n+1} \sin \xi,$$

per ξ opportuno compreso tra 0 e x. Anche in questo caso per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha $R_{2n}(x) \to 0$ per $n \to +\infty$.

14.2.4 Formula di MacLaurin per la funzione $1/(1-x)$

Partendo dall'identità

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x},$$

che si verifica facilmente scrivendo

$$\begin{aligned}1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots + x^n &= \frac{(1-x)(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots + x^n)}{1-x} \\ &= \frac{1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n - x - x^2 - x^3 - x^4 - \ldots - x^{n+1}}{1-x} = \frac{1 - x^{n+1}}{1-x},\end{aligned}$$

si ottiene lo sviluppo di $1/(1-x)$, con un'espressione esplicita del resto:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + R_n(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots + x^n + R_n(x),$$

dove

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

Osservazione: Nel caso della funzione $f(x) = 1/(1-x)$ si vede immediatamente che un polinomio $P_n(x)$ approosima bene la funzione, tanto più quanto più grande è n, purché x sia piccolo (cioè vicino a 0). Per esempio, se $x = 0.1$, si ha $f(0.1) = 1/0.9 = 1.\bar{1} = 1.11111111\ldots$, mentre

$$P_0(0.1) = 1, \quad P_1(0.1) = 1.1, \quad P_2(0.1) = 1.11, \quad P_3(0.1) = 1.111, \quad P_4(0.1) = 1.1111,$$

e cosìvia. D'altra parte, se invece x è vicino a 1, $f(x)$ tende a $+\infty$, mentre $P_n(x)$ tende a $n+1$: quindi il polinomio non costituisce più una buona approssimazione della funzione.

14.2.5 Formula di MacLaurin per la funzione $1/(1+x)$

Partendo dalla formula di MacLaurin per $1/(1-x)$ e sostituendo $-x$ a x si trova

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + R_n(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \ldots + (-1)^n x^n + R_n(x),$$

dove

$$R_n(x) = (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{1+x}.$$

14.2.6 Formula di MacLaurin per la funzione $1/(1-x^2)$

Partendo dalla formula di MacLaurin per $1/(1-x)$ e sostituendo x^2 a x si trova

$$\frac{1}{1-x^2} = \sum_{k=0}^{n} x^{2k} + R_{2n}(x) = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + \ldots + x^{2n} + R_{2n}(x),$$

dove

$$R_{2n}(x) = \frac{x^{2(n+1)}}{1-x^2}.$$

14.2.7 Formula di MacLaurin per la funzione $1/(1+x^2)$

Partendo dalla formula di MacLaurin per $1/(1+x)$ e sostituendo x^2 a x si trova

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + R_{2n}(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 + \ldots + (-1)^n x^{2n} + R_{2n}(x),$$

dove

$$R_{2n}(x) = (-1)^{2(n+1)} \frac{x^{2(n+1)}}{1+x^2}.$$

14.2.8 Formula di MacLaurin per la funzione $\ln(1+x)$

Partendo dalla formula di MacLaurin per $1/(1+x)$, sostituendo t a x e quindi integrando t tra 0 e x si trova

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &= \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \int_0^x t^k \,\mathrm{d}t + \int_0^x R_n(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + (-1)^{n+1}\int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t}\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

quindi si ha

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + R_n(x) \\ &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n+1}x^{n+1} + R_n(x),\end{aligned}$$

dove

$$R_n(x) = (-1)^{n+1}\int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t}\mathrm{d}t.$$

14.2.9 Formula di MacLaurin per la funzione $\operatorname{arctg} x$

Partendo dalla formula di MacLaurin per $1/(1+x^2)$, sostituendo t a x e quindi integrando t tra 0 e x si trova

$$\begin{aligned}\operatorname{arctg} x &= \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \int_0^x t^{2k} \,\mathrm{d}t + \int_0^x R_n(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + (-1)^{n+1}\int_0^x \frac{t^{2(n+1)}}{1+t^2}\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

quindi si ha

$$\begin{aligned}\operatorname{arctg} x &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{k+1} + R_n(x) \\ &= x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n+1}x^{2n+1} + R_n(x),\end{aligned}$$

dove

$$R_n(x) = (-1)^{n+1}\int_0^x \frac{t^{2n+1}}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$

14.2.10 Formula di MacLaurin per altre funzioni elementari

Più in generale, data una qualsiasi funzione elementare, se ne può calcolare la formula di Taylor o di MacLaurin fino all'ordine voluto applicando direttamente la formula vista alla fine di §14.1.

Esempi:

1. $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \dots$
2. $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 + \dots$
3. $(1+x)^{3/2} = 1 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 + \frac{3}{128}x^4 + \dots$
4. $(1+x)^{-3/2} = 1 - \frac{3}{2}x + \frac{15}{8}x^2 - \frac{35}{16}x^3 + \frac{315}{128}x^4 + \dots$
5. $\operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \dots$
6. $\arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \frac{35}{1152}x^9 + \dots$
7. $\arccos x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{40}x^5 - \frac{5}{112}x^7 - \frac{35}{1152}x^9 + \dots$
8. $\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 + \dots$

Osservazioni:

1. A volte può essere utile applicare iterativamente le formule. Per esempio lo sviluppo di $\operatorname{tg} x$ si può anche calcolare come segue: (1) si scrive $\operatorname{tg} x = \sin x / \cos x$, (2) si calcola la formula di MacLaurin $\sin x$ e di $\cos x$, (3) poiché $\cos x = 1 + \alpha(x)$, dove

$$\alpha(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots,$$

si scrive $1/\cos x$ utilizzando la formula di MacLaurin della funzione $1/(1+x)$, con x sostituita da $\alpha(x)$. Quindi si ha

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} x &= \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots}{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots}{1 - \left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots\right)} \\ &= \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots\right)\left(1 + \left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots\right) + \left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots\right)^2 + \dots\right),\end{aligned}$$

da cui si ottiene la formula dell'Esempio 5.

2. In particolare si può calcolare la formula di Taylor di qualsiasi funzione composta $f(g(x))$: prima si calcola la formula di Taylor $f(y)$, con $y = g(x)$ in un intorno di $y_0 = g(x_0)$, ottenendo un polinomio in $y - y_0$, poi si scrive la formula di Taylor di y in ciascun termine del polinomio:

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= f(g(x_0)) + f'(g(x_0))\ (g(x) - g(x_0)) + \frac{1}{2!}f''(g(x_0))\ (g(x) - g(x_0))^2 + \dots \\ &= f(g(x_0)) + f'(g(x_0))\left(g'(x_0)\ (x - x_0) + \frac{1}{2!}g''(x_0)\ (x - x_0)^2 + \dots\right) \\ &+ \frac{1}{2!}f''(g(x_0))\left(g'(x_0)\ (x - x_0) + \frac{1}{2!}g''(x_0)\ (x - x_0)^2 + \dots\right)^2 + \dots \end{aligned}$$

Esempi:

1. $e^x \sin x = x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5 - \frac{1}{90}x^6 + \dots$
2. $e^x \cos x = 1 + x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{30}x^5 + \dots$
3. $e^{\sin x} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{15}x^5 + \dots.$
4. $e^{\cos x} = e\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^4 - \frac{31}{720}x^6 + \dots\right)$.

12.3 Calcolo di limiti mediante la formula di Taylor

La formula di Taylor può essere utilizzata per calcolare i limiti. Risulta infatti essere un metodo molto efficiente per trattare le forme indeterminate, al pari dei Teoremi di de l'Hôpital studiati in §8.2.

Osservazioni:

1. Se le formule di MacLaurin di due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ iniziano rispettivamente dall'ordine n e dall'ordine m (ovvero $f(x) = a\,x^n + \dots$ e $g(x) = b\,x^m + \dots$, con $a, b \neq 0$), allora si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} 0, & n \geq m, \\ +\infty, & n < m, \quad a/b > 0, \\ -\infty, & n < m, \quad a/b < 0, \\ a/b, & n = m. \end{cases}$$

   Infatti se $n = m$, $f(x)$ e $g(x)$ sono infinitesimi dello stesso ordine; se $n > m$, $f(x)$ è infinitesimo di ordine più alto di $g(x)$ e se $n < m$, $g(x)$ è infinitesimo di ordine più alto di $f(x)$.

2. In pratica, se si vuole utilizzare la formula di Taylor per calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)},$$

conviene scegliere, tra $f(x)$ e $g(x)$, la funzione per la quale sia più facile calcolare la formula di Taylor. Supponiamo che tale funzione sia $g(x)$. Se ne calcola allora la formula di Taylor e si trova $g(x) = b\,x^m + \ldots$, per qualche $m \geq 1$ e $b \neq 0$. Si calcola allora la formula di Taylor per $f(x)$ fino all'ordine m. Se tutti i termini dello sviluppo sono nulli, allora $f(x) = a\,x^n + \ldots$, per qualche $n > m$, quindi il limite è 0. Se invece si trova $f(x) = ax^n$ per qualche $a \neq 0$ e $n \leq m$, si ragiona come segue: se $n = m$ il limite vale a/b, mentre se $n < m$ il limite vale $+\infty$ se a e b hanno lo stesso segno e $-\infty$ se a e b hanno segno opposto. Analogamente se si parte dalla formula di Taylor di $f(x)$ e si trova $f(x) = a\,x^n + \ldots$, per qualche $n \geq 1$ e $a \neq 0$, si calcola poi la formula di Taylor di $g(x)$ e si ragiona in modo simile.

Esempi:

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x - \sin x + \cos x - 2}{x^3} = \frac{1}{3}.$
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x - \sin^2 x - \cos x - x}{2x^3} = \frac{1}{12}.$
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x\,(\sin x - 1) + \cos x}{x^3} = \frac{1}{6}.$
4. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1 - x}{1 - \cos x} = 1.$
5. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = 2.$
6. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x) - \sin x + x^2}{e^x - x - \cos x} = \frac{1}{2}.$
7. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\Big(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\Big) = 0.$
8. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$
9. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1.$
10. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$
11. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x^2} - \sqrt{1 + 2\sin^2 x} - \dfrac{x^4}{3}}{x^2\sin^2 x} = 1.$

12. $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$.

13. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+\sin x)}{\sin(\ln(1+x)} = 1$.

14. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+(\sin x)^3)}{x^3} = 1$.

Soluzioni:

1. Si ha $e^x - \sin x + \cos x - 2 = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} - x + \dfrac{x^3}{6} + 1 - \dfrac{x^2}{2} - 2 + \ldots$, da cui segue $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - \sin x + \cos x - 2}{x^3} = \lim_{x\to 0} \dfrac{(x^3/3) + \ldots}{x^3} = \dfrac{1}{3}$.

2. Si ha $e^x - \sin^2 x - \cos x - x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} - x^2 - 1 + \dfrac{x^2}{2} - x + \ldots$, da cui si ottiene $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - \sin^2 x - \cos x - x}{2x^3} = \lim_{x\to 0} \dfrac{(x^3/6) + \ldots}{2x^3} = \dfrac{1}{12}$.

3. Si ha

$$\begin{aligned} &e^x(\sin x - 1) + \cos x \\ &\quad = \Big(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots\Big)\Big(x - \frac{1}{6}x^3 - 1 + \ldots\Big) + 1 - \frac{x^2}{2} + \ldots \\ &\quad = x - \frac{x^3}{6} - 1 + x^2 - x + \frac{x^3}{2} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + 1 - \frac{x^2}{2} + \ldots = \frac{x^6}{6} + \ldots, \end{aligned}$$

   da cui si ottiene $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x(\sin x - 1) + \cos x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \dfrac{(x^3/6) + \ldots}{x^3} = \dfrac{1}{6}$.

4. Si ha

$$e^x - 1 - x = \frac{x^2}{2} + \ldots, \qquad 1 - \cos x = \frac{x^2}{2} + \ldots,$$

   da cui segue il risultato.

5. Si ha

$$\begin{aligned} &e^x - e^{-x} - 2x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - 1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - 2x + \ldots = \frac{x^3}{3} + \ldots, \\ &x - \sin x = x - x + \frac{x^3}{6} + \ldots = \frac{x^3}{6} + \ldots, \end{aligned}$$

   da cui segue il risultato.

6. Si ha

$$\begin{aligned} &\ln(1+x) - \sin x + x^2 = \Big(x - \frac{x^2}{2} + \ldots\Big) - \Big(x + \ldots\Big) + x^2 = \frac{x^2}{2} + \ldots, \\ &e^x - x - \cos x = 1 + x + \frac{x^2}{2} - x - 1 + \frac{x^2}{2} + \ldots = x^2 + \ldots, \end{aligned}$$

   da cui segue il risultato.

7. Scrivendo
$$\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} = \frac{x - \sin x}{x \sin x},$$
si ha $x - \sin x = x - x + \dfrac{x^3}{6} + \ldots = \dfrac{x^3}{6} + \ldots$ e $x \sin x = x^2 + \ldots$, da cui segue il risultato.

8. $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + \ldots \Longrightarrow \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1.$

9. $e^x - 1 = 1 + x - 1 + \ldots = x + \ldots \Longrightarrow \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1.$

10. $\ln(1 + x) = x + \ldots \Longrightarrow \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1 + x)}{x} = 1.$

11. Si ha
$$\begin{aligned}
e^{\sin x^2} &= 1 + (\sin x^2) + \frac{1}{2}(\sin x^2)^2 + \ldots = 1 + (x^2 + \ldots) + \frac{1}{2}(x^2 + \ldots)^2 + \ldots \\
&= 1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 + \ldots, \\
\sqrt{1 + 2\sin^2 x} &= 1 + \frac{1}{2}(2\sin^2 x) - \frac{1}{8}(2\sin^2 x)^2 + \ldots = 1 + (\sin x)^2 - \frac{1}{2}(\sin x)^4 + \ldots \\
&= 1 + x^2 - \frac{5}{6}x^4 + \ldots, \\
x^2 \sin^2 x &= x^4 + \ldots,
\end{aligned}$$
da cui si ottiene $e^{\sin x^2} - \sqrt{1 + 2\sin^2 x} - x^4/3 = x^4 + \ldots$ e $x^2 \sin^2 x = x^4 + \ldots$, che implica il risultato.

12. $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \ldots \Longrightarrow 1 - \cos x = \dfrac{x^2}{2} + \ldots \Longrightarrow \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}.$

13. Si ha
$$\begin{aligned}
\ln(1 + \sin x) &= \sin x - \frac{1}{2}(\sin x)^2 + \ldots = x - \frac{x^3}{3!} - \frac{1}{2}(x - \frac{x}{3!} + \ldots)^2 + \ldots = x + \ldots \\
\sin(\ln(1 + x) &= \ln(1 + x) - \frac{1}{3}\left(\ln(1 + x)\right)^3 + \ldots \\
&= x - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{3!}\left(x - \frac{x^2}{2} + \ldots\right) + \ldots = x + \ldots,
\end{aligned}$$
da cui si ottiene il risultato.

14. Si ha
$$\begin{aligned}
\ln(1 + (\sin x)^3) &= (\sin x)^3 - \frac{1}{2}(\sin x)^6 + \ldots \\
&= \left(x - \frac{x^3}{3!} + \ldots\right)^3 - \frac{1}{2}(x - \frac{x}{3!} + \ldots)^6 + \ldots = x^3 + \ldots,
\end{aligned}$$
da cui segue il risultato.

Osservazioni:

1. I limiti 4, 5 e 6 sono già stati discussi in §8.2, applicando i Teoremi di de l'Hôpital. Analogamente il limite 7 è stato discusso in §8.3.

2. I limiti 8 e 9 sono i limiti notevoli discussi 3 e 2, visti a pag. 90 e a pag. 104, rispettivamente.

12.4 Esercizi

1. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos(\sin x) - \cos x}{x^2 \sin(x^2)}$ (cfr. l'esercizio 16 di §8.4).

2. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x \sin x + e^{-x} \sin x - 2x \cos x}{x - \sin x}$.

3. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin x^2} - 2 + \cos x}{x\,(e^x - e^{-x})}$.

4. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{\operatorname{arctg} x} - 1}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}$.

5. $\lim_{x\to 0} \dfrac{(e^x - x - 1)\ln(1+x)}{(1-\cos x)\sin x}$.

6. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin x} - \cos x - \ln(1+x)}{\sqrt{1+x^2} - \cos x}$.

7. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{3x} + e^{2x} - \cos 2x}{\sin x - x}$.

8. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{e^x - e^{-x}} - e^{2x}}{x^3}$.

Soluzioni.

1. Si ha

$$\begin{aligned} \cos(\sin x) &= 1 - \frac{1}{2}(\sin x)^2 + \frac{1}{4!}(\sin x)^4 + \ldots = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{4!}x^4 + \ldots, \\ \cos x &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \ldots, \\ x^2 \sin(x^2) &= x^4 + \ldots \end{aligned}$$

   da cui si ottiene che il limite è: 1/6.

2. Si ha

$$\begin{aligned}
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \dots, \\
e^x \sin x &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots\right)\left(x - \frac{x^3}{3!} + \dots\right), \\
e^{-x} \sin x &= \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} + \dots\right)\left(x - \frac{x^3}{3!} + \dots\right), \\
x \cos x &= x\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \dots\right),
\end{aligned}$$

quindi il imite è: 10.

3. Si ha

$$\begin{aligned}
x\left(e^x - e^{-x}\right) &= x\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} - 1 + x - \frac{x^2}{2!} + \dots\right) = x\left(2x + \dots\right) = 2x^2 + \dots, \\
e^{\sin x^2} &= 1 + (\sin x^2) + \dots = 1 + x^2 + \dots, \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots,
\end{aligned}$$

quindi il limite è: $3/4$.

4. Si ha

$$\begin{aligned}
e^{\operatorname{arctg} x} &= 1 + \operatorname{arctg} x + \dots = 1 + (x + \dots) + \dots = 1 + x + \dots, \\
\sqrt{1+x} &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} + \dots, \\
\sqrt{1-x} &= 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} + \dots,
\end{aligned}$$

quindi il limite è: 1.

5. Si ha

$$\begin{aligned}
e^x - x - 1 &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots\right) - x - 1 = \frac{x^2}{2} + \dots, \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \dots = x + \dots, \\
(1 - \cos x)\sin x &= \left(\frac{x^2}{2} + \dots\right)\left(x - \frac{x^3}{3!} + \dots\right) = \frac{x^3}{2} + \dots,
\end{aligned}$$

quindi il limite è: 1.

6. Si ha

$$\begin{aligned} e^{\sin x} &= 1+\sin x+\frac{(\sin x)^2}{2!}+\ldots = 1+x+\frac{x^2}{2}+\ldots, \\ \cos x &= 1-\frac{x^2}{2!}+\ldots, \\ \ln(1+x) &= x-\frac{x^2}{2}+\ldots, \\ \sqrt{1+x^2}-\cos x &= \left(1+\frac{x^2}{2}+\ldots\right)-\left(1-\frac{x^2}{2!}+\ldots\right) = x^2+\ldots, \end{aligned}$$

quindi il limite è: 3/2.

7. Si ha

$$\begin{aligned} e^x &= 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots = 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\ldots, \\ e^{2x} &= 1+2x+\frac{4x^2}{2!}+\frac{8x^3}{3!}+\ldots 1+2x+2x^2+\frac{4x^3}{3}+\ldots, \\ e^{3x} &= 1+3x+\frac{9x^2}{2!}+\frac{27x^3}{3!}+\ldots 1+3x+\frac{9x^2}{2}+\frac{9x^3}{2}+\ldots, \\ \cos 2x &= 1-\frac{4x^2}{2!}+\ldots = 1-2x^2 \\ \sin x-x &= x-\frac{x^3}{3!}-x+\ldots = -\frac{x^3}{6}+\ldots, \end{aligned}$$

quindi il limite è: 18.

8. Si ha

$$\begin{aligned} e^x-e^{-x} &= \left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots\right)-\left(1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\ldots\right) = 2x+\frac{x^3}{3}+\ldots, \\ e^{e^x-e^{-x}} &= 1+(e^x-e^{-x})+\frac{(e^x-e^{-x})^2}{2!}+\frac{(e^x-e^{-x})^3}{3!}+\ldots \\ &= 1+\left(2x+\frac{x^3}{3}+\ldots\right)+\frac{1}{2}\left(4x^2+\ldots\right)+\frac{1}{3!}\left(8x^3+\ldots\right)+\ldots \\ &= 1+2x+2x^2+\frac{5}{3}x^3+\ldots, \\ e^{2x} &= 1+2x+\frac{4x^2}{2}+\frac{8x^3}{3!}+\ldots = 1+2x+2x^2+\frac{4x^3}{3}+\ldots, \end{aligned}$$

quindi il limite è: 1/3.

Bibliografia

[1] Nikolaj S. Piskunov *Calcolo differenziale e integrale Vol. 1*, Editori Riuniti, Roma, 2010.

[2] Enrico Giusti, *Analisi Matematica 1*, Bollati Boringhieri, Torini, 1988.

[3] Enrico Giusti, *Esercizi e Complementi di Analisi Matematica Volume 1*, Bollati Boringhieri, Torini, 1991.

[4] Jaures P. Cecconi, Guido Stampacchia, *Analisi Matematica Volume 1*, Liguori Editore, Napoli, 1974.

[5] Jaures P. Cecconi, Livio C. Piccinini, Guido Stampacchia, *Esercizi e Problemi di Analisi Matematica Volume 1*, Liguori Editore, Napoli, 1979.

[6] S. Lang, *Algebra lineare*, Boringhieri, 1970.

Indice analitico

addizione, 13, 14
altezza di un numero razionale, 21
approssimazione di una funzione con un polinomio, 233
arco di cerchio, 90
arcocosecante, 71
arcocoseno, 71
arcocotangente, 71
arcosecante, 71
arcoseno, 71
arcotangente, 71
ascissa, 29
asintoto, 133
asintoto obliquo, 133
asintoto orizzontale, 133
asintoto verticale, 133
asse x, 29
asse y, 29
asse delle ascisse, 29
asse delle ordinate, 29
asse reale, 13, 21
assi cartesiani, 30
assi coordinati, 30
assioma di completezza, 16
assioma di continuità, 16
assioma di Dedekind, 16

base del logaritmo, 39
base dell'esponenziale, 39

campo di definizione, 34
campo di esistenza, 34
codominio, 35
coefficiente angolare, 42
coefficiente binomiale, 5
combinazione, 6
combinazione lineare, 73
composizione di funzioni, 68
concavità, 42
continuità dei numeri reali, 13, 14, 16
continuità della funzione inversa, 106
controimmagine, 67
coordinate nel piano, 30
corrispondenza biunivoca, 14
cosecante, 39, 49
coseno, 39, 49
cotangente, 39, 49
cubo del bimonio, 5

derivata, 111
derivata della funzione composta, 115
derivata della funzione inversa, 117
derivata di ordine n, 118
derivata seconda, 118
dicotomia, 15
differenza di insiemi, 1
dimostrazione per assurdo, 86
discontinuità eliminabile, 104
discriminante, 42
diseguaglianza di Bernouilli, 9
diseguaglianza trangolare, 32
disequazione di primo grado, 44
disequazione di secondo grado, 45
distanza, 79
dominio, 34

elementi di un insieme, 1
elementi semplici, 220
elemento inverso, 8, 15
elemento neutro del prodotto, 4, 14
elemento neutro dell'addizione, 4, 7, 8, 14
elemento neutro della moltiplicazione, 8

elemento opposto, 7, 14
elemento reciproco, 15
elemento separatore, 15
equazione di primo grado, 42
equazione di secondo grado, 42
esponente, 39
esponenziale, 39, 55
estremo di integrazione, 207
estremo inferiore di un insieme, 19
estremo inferiore di una funzione, 85
estremo superiore di un insieme, 19
estremo superiore di una funzione, 85

fattoriale, 5
fattorizzazione di un polinomio, 25
fattorizzazione reale, 25
forma di Lagrange per il resto, 235
forma indeterminata, 125, 126
formula del binomio, 5
formula di Cardano, 27
formula di integrazione per parti, 218
formula di McLaurin, 235
formula di Newton, 5
formula di Pascal, 11
formula di Taylor, 235
formula ridotta, 42
formule di addizione, 50
formule di bisezione, 51
formule di prostaferesi, 50
formule di Werner, 51
fratti semplici, 220
funzione, 33
funzione algebrica, 74
funzione bigettiva, 67
funzione biiettiva, 67
funzione biunivoca, 67
funzione composta, 68, 115
funzione concava, 145
funzione continua, 99
funzione convessa, 145
funzione crescente, 68, 137
funzione decrescente, 68, 137
funzione degli errori di Gauss, 214
funzione derivabile, 111
funzione derivata, 111
funzione di classe C^∞, 119
funzione di classe C^n, 119
funzione discontinua, 102
funzione dispari, 59
funzione elementare, 73
funzione elementare principlae, 39
funzione identità, 69
funzione illimitata, 84
funzione iniettiva, 67
funzione integrabile, 207
funzione inversa, 69, 117
funzione invertibile, 70
funzione irrazionale, 74
funzione limitata, 84
funzione limitata inferiormente, 84
funzione limitata superiormente, 84
funzione monotona, 68
funzione pari, 59
funzione periodica, 37
funzione razionale, 74
funzione razionale regolare, 221
funzione strettamente crescente, 68, 137
funzione strettamente decrescente, 68, 137
funzione strettamente monotona, 68
funzione suriettiva, 67
funzione trascendente, 74
funzione trigonometrica, 39, 48
funzione trigonometrica inversa, 71
funzione univoca, 34

grafico, 37
grafico della funzione inversa, 70

immagine, 67
infinitesimo, 106
infinitesimo dello stesso ordine, 107
infinitesimo di ordine inferiore, 107
infinitesimo di ordine superiore, 107
insieme, 1
insieme aperto, 17
insieme complementare, 2
insieme inferiormente limitato, 19
insieme numerico, 1
insieme superiormente limitato, 19

insieme totalmente ordinato, 13
insieme vuoto, 2
integrale definito, 206
integrale ellittico, 214
integrale indefinito, 211
integrazione di funzioni razionali, 220
integrazione per parti, 218
integrazione per sostituzione, 215
intersezione di insiemi, 1
intervallo, 16
intervallo aperto, 16
intervallo aperto a destra, 16
intervallo aperto a sinistra, 16
intervallo chiuso, 16
intervallo di integrazione, 207
intervallo illimitato, 16
intervallo limitato, 16
intorno, 79
inverso, 15

limite, 81
limite destro, 83
limite sinistro, 83
limiti notevoli, 89, 102
logaritmo, 39, 57
logartitmo naturale, 59
lunghezza dell'arco di cerchio, 90

maggiorante, 19
massimo assoluto, 140
massimo assoluto di una funzione, 104
massimo comun divisore, 8
massimo di un insieme, 19
massimo di una funzione, 85
massimo relativo di una funzione, 138
massimo relativo forte di una funzione, 138
massimo relativo proprio di una funzione, 138
massimo relativo stretto di una funzione, 138
metodo dei coefficienti indeterminati, 223
minimo assoluto, 140
minimo assoluto di una funzione, 104
minimo di un insieme, 19
minimo di una funzione, 85
minimo relativo di una funzione, 138
minimo relativo forte di una funzione, 138
minimo relativo proprio di una funzione, 138
minimo relativo stretto di una funzione, 138
minorante, 19
modulo, 31, 79
molteplicità algebrica di una radice, 25
moltiplicazione, 13

numeri complessi, 21
numeri immaginari puri, 21
numeri interi, 7
numeri irrazionali, 13
numeri naturali, 4
numeri primi tra loro, 8
numeri razionali, 8
numeri reali, 13
numero complesso coniugato, 21
numero di Eulero, 91
numero di Nepero, 56, 91
numero intero negativo, 7
numero intero non negativo, 7
numero intero non positivo, 7
numero intero positivo, 7

opposto, 14
ordinamento totale, 15
ordinata, 29
ordine di derivazione, 118
ordine di infinitesimo, 107
origine, 13, 30

parabola, 42, 60
parte immaginaria, 21
parte reale, 21
periodo, 37
periodo fondamentale, 37
permutazione, 6
piano cartesiano, 30
piano complesso, 21
polinomio, 74
polinomio irriducibile, 25
potenza, 39
primitiva, 210
principio di induzione, 9
prodotto, 14
prodotto cartesiano, 2, 29

prodotto di numeri naturali, 4
proprietà antisimmetrica, 15
proprietà archhimedea, 20
proprietà associativa del prodotto, 14
proprietà associativa dell'addizione, 4, 14
proprietà associativa della moltiplicazione, 4
proprietà commutativa del prodotto, 14
proprietà commutativa dell'addizione, 4, 14
proprietà commutativa della moltiplicazione, 4
proprietà distributiva, 4, 14
proprietà riflessiva, 15
proprietà transitiva, 15
punto di discontinuità di prima specie, 104
punto di discontinuità di seconda specie, 104
punto di discontinuità essenziale, 104
punto di flesso, 146
punto di flesso obliquo, 146
punto di flesso orizzontale, 139, 146
punto di massimo assoluto, 104
punto di massimo locale, 138
punto di massimo relativo, 138
punto di massimo relativo forte, 138
punto di massimo relativo proprio, 138
punto di massimo relativo stretto, 138
punto di miniimo relativo stretto, 138
punto di minimo assoluto, 104
punto di minimo locale, 138
punto di minimo relativo, 138
punto di minimo relativo forte, 138
punto di minimo relativo proprio, 138
punto estremale, 138
punto stazionario, 138

quadrato del bimonio, 5

radice di un polinomio, 24
radice di un'equazione, 24
radice quadrata, 13
rapporto incrementale, 111
reciproco, 8, 15, 69
regola grafica per la funzione inversa, 70
regole di derivazione, 114
resto, 234
resto di Lagrange, 235
retta, 42
retta tangente, 113
riflessione rispetto a un asse, 59
riflessione rispetto all'origine, 59
riflessione rispetto alla bisettrice, 70

secante, 39, 49
seno, 39, 49
sezione, 15
sistema di riferimento, 29
somma, 14
somma di numeri naturali, 4
somma geometrica, 9
somma integrale, 206
somma integrale inferiore, 205
somma integrale superiore, 205
sommatoria, 5
sottoinsieme proprio, 3

tangente, 39, 49
teorema degli zeri di una funzione continua, 106
teorema dei carabinieri, 86
teorema dei valori intermedi, 105
teorema del confronto, 86
teorema della media, 210
teorema della permanenza del segno, 106
teorema di Abel-Ruffini, 26
teorema di Cauchy, 125
teorema di de l'Hôpital, 130
teorema di Fermat, 138
teorema di Lagrange, 124
teorema di Rolle, 123
teorema di Weierstrass, 104
teorema fondamentale del calcolo integrale, 212
teorema fondamentale dell'algebra, 23
traslazione, 59

unione di insiemi, 1
unità immaginaria, 21

valore assoluto, 31
variabile, 33
versione debole del principio di induzione, 9
versione forte del principio di induzione, 9

zero, 4
zero di un'equazione, 24