

Teorema 2.17 *Il polinomio caratteristico associato all'equazione differenziale (2.35) è dato da*

$$p_n(\lambda) = (-1)^n [\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n]. \quad (2.39)$$

Dimostrazione La dimostrazione è per induzione su n . Se $n = 2$ un conto esplicito dà

$$p_2(\lambda) = -\lambda(-a_1 - \lambda) - (-a_2) = \lambda^2 + a_1 \lambda + a_2.$$

Assumiamo che la (2.39) valga per $n - 1$, i.e.

$$p_{n-1}(\lambda) = (-1)^{n-1} [\lambda^{n-1} + a_1 \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-2} \lambda + a_{n-1}],$$

e mostriamo che allora vale per n .

Se indichiamo con A_n la matrice (2.36) per sottolinearne la dipendenza da n e con $\mathbb{1}_n$ la matrice identità $n \times n$, la matrice $A_n - \lambda \mathbb{1}_n$ è data da

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_2 & -a_1 - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & & & & & \\ 0 & & & & & \\ \dots & & A_{n-1} - \lambda \mathbb{1}_{n-1} & & & \\ 0 & & & & & \\ -a_n & & & & & \end{pmatrix}.$$

Il determinante di $A_n - \lambda \mathbb{1}_n$, calcolato sviluppando, per esempio, secondo la prima colonna, è

$$\begin{aligned} \det(A_n - \lambda \mathbb{1}_n) &= -\lambda p_{n-1}(\lambda) - (-1)^{n-1} a_n \\ &= (-1)^n (\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda) + (-1)^n a_n, \end{aligned}$$

che dimostra che la (2.39) vale anche per n . □

Osservazione 2.18 Il teorema 2.17 implica che il polinomio caratteristico associato all'equazione differenziale (2.35) può essere ricavato direttamente dall'equazione stessa, senza bisogno di passare esplicitamente al sistema di equazioni del primo ordine (2.38) e senza calcolare il determinante della matrice $A - \lambda \mathbb{1}$: è sufficiente considerare l'equazione algebrica che si ottiene dall'equazione differenziale (2.35) sostituendo ogni $x^{(j)}$, $j = 0, \dots, n$, con λ^j (il segno in evidenza in (2.39) è ovviamente irrilevante ai fini del calcolo degli zeri del polinomio caratteristico).

Esempio 2.19 Si discuta l'equazione lineare del secondo ordine che descrive un oscillatore armonico di massa m e di frequenza propria (o semplicemente frequenza) ω , in presenza di attrito (oscillatore armonico smorzato):

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + m\omega^2 x = 0, \quad (2.40)$$

al variare dei parametri $\omega, \gamma > 0$. Il parametro γ prende il nome di *coefficiente di attrito* (o *coefficiente di dissipazione*), in quanto il termine $\gamma \dot{x}$ rappresenta fisicamente l'azione dell'attrito, dovuto, per esempio, alla resistenza dell'aria. Se $\gamma = 0$ si ottiene l'equazione dell'*oscillatore armonico* con *costante elastica* $k = m\omega^2$ (cfr. §2.2.2), nota in fisica anche come *legge di Hooke*.

Discussione dell'esempio Poniamo per semplicità $m = 1$. L'equazione (2.40) si può riscrivere

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\omega^2 x - \gamma y, \end{cases} \quad (2.41)$$

così che gli autovalori della matrice corrispondente sono $\lambda_{\pm} = -\Gamma \pm \sqrt{\Gamma^2 - \omega^2}$, dove $\Gamma := \gamma/2$. Distinguiamo i casi $\Gamma > \omega$, $\Gamma = \omega$ e $\Gamma < \omega$.

- Se $\Gamma > \omega$ poniamo $\Omega := \sqrt{\Gamma^2 - \omega^2}$, dove $\Gamma := \gamma/2$, così che $\lambda_{\pm} = -\Gamma \pm \Omega$. In tal caso la soluzione è

$$x(t) = e^{-\Gamma t} (a e^{\Omega t} + b e^{-\Omega t}), \quad (2.42)$$

dove le costanti a e b dipendono dai dati iniziali. Si ha $\Omega < \Gamma$, quindi la soluzione (2.42) è combinazione lineare di due esponenziali decrescenti: $x(t)$ tende a zero monotonamente.

- Se $\Gamma = \omega$ la soluzione si scrive nella forma

$$x(t) = e^{-\Gamma t} (at + b), \quad (2.43)$$

dove le costanti a e b dipendono dai dati iniziali. Anche la soluzione (2.43) tende a zero (monotonamente per t sufficientemente grande).

- Se $\Gamma < \omega$ poniamo $i\Omega := \sqrt{\Gamma^2 - \omega^2}$, così che $\lambda_{\pm} = -\Gamma \pm i\Omega$. In tal caso la soluzione è

$$x(t) = e^{-\Gamma t} (a \cos \Omega t + b \sin \Omega t), \quad (2.44)$$

dove le costanti a e b dipendono dai dati iniziali. La soluzione (2.44) è dunque combinazione lineare di due funzioni oscillanti moltiplicate per un esponenziale decrescente: $x(t)$ tende a zero oscillando.

Osservazione 2.20 Per $\gamma = 0$ l'equazione (2.41) diventa un sistema lineare con matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix},$$

che ha autovalori $\lambda_{\pm} = \pm i\omega$. Tale sistema si riduce, attraverso il cambiamento di coordinate $(x, y) \mapsto (x, y/\omega)$, al sistema lineare con matrice (2.6b), con $a = 0$ e

$b = -\omega$, a cui si applica l'analisi del §2.2.2: le corrispondenti soluzioni, in accordo con la (2.9), sono della forma $x(t) = x(0) \cos \omega t + \omega^{-1} \dot{x}(0) \sin \omega t$; in particolare, sono tutte periodiche con lo stesso periodo $2\pi/\omega$ (*isocronismo*), indipendentemente dai dati iniziali, purché $(x(0), \dot{x}(0)) \neq (0, 0)$. Se $\gamma > 0$ e $\Gamma < \omega$, ci si riconduce allo stesso sistema, con $a \neq 0$. Infine, per $\gamma < 0$ valgono gli stessi risultati dell'esempio 2.19, purché si inverta il segno del tempo (i.e. il comportamento nel futuro diventa il comportamento nel passato e viceversa); in tal caso, tuttavia, γ non è più interpretabile come coefficiente di attrito.

2.5 Equazioni differenziali lineari non omogenee

Nei paragrafi precedenti abbiamo considerato solo il caso di equazioni differenziali lineari *omogenee*, i.e. della forma $\dot{x} = Ax$. Vogliamo ora vedere cosa succede se si considerano equazioni differenziali lineari non omogenee, i.e. della forma $\dot{x} = Ax + B(t)$, dove $t \mapsto B(t)$ è una qualche funzione assegnata. Un ulteriore passo sarebbe considerare il caso in cui anche A dipende dal tempo, $A = A(t)$, ma, mentre la teoria sviluppata nei precedenti paragrafi permette di risolvere senza troppa fatica l'equazione $\dot{x} = Ax + B(t)$, a meno di piccole modifiche, al contrario lo studio dell'equazione $\dot{x} = A(t)x$ è assolutamente non banale. Anche nel caso in cui si facciano delle ipotesi sulla funzione $A(t)$ (per esempio che sia periodica), la teoria risulta essere molto più complicata e va oltre i nostri scopi (cfr. anche i commenti nel §3.4).

Definizione 2.21 (Equazioni differenziali ordinarie lineari non omogenee del primo ordine) *Siano E uno spazio vettoriale reale, A la matrice che rappresenta un operatore $T \in L(E)$ in una data base e $B: I \rightarrow E$ una funzione continua definita su $I \subseteq \mathbb{R}$. Chiamiamo*

$$\dot{x} = Ax + B(t), \quad x \in E, \quad (2.45)$$

un sistema di n equazioni differenziali ordinarie lineari non omogenee del primo ordine a coefficienti costanti – o semplicemente un'equazione (vettoriale) differenziale ordinaria lineare non omogenea del primo ordine a coefficienti costanti.

Definizione 2.22 (Soluzione generale di un'equazione differenziale lineare non omogenea) *Si chiama soluzione generale dell'equazione (2.45) l'insieme di tutte le soluzioni di (2.45) che si ottengono al variare dei dati iniziali.*

Osservazione 2.23 L'equazione (2.45) è un'equazione differenziale *non autonoma*, i.e. in cui il membro di destra dipende esplicitamente dal tempo (cfr. la definizione 3.6 più avanti).

Teorema 2.24 *Sia E uno spazio vettoriale reale, sia A un operatore lineare su E e sia infine $B: I \rightarrow E$ una funzione continua definita su $I \subseteq \mathbb{R}$. Si consideri il sistema*