

Dimostrazione Possiamo riscrivere la (2.46) nella forma

$$\begin{aligned} x(t) &= u(t) + e^{A(t-t_0)} x_0, \\ u(t) &= e^{A(t-t_0)} \int_0^t ds e^{-A(s-t_0)} B(s), \end{aligned}$$

dove la funzione $u(t)$ risolve la (2.45) con condizioni iniziali $x(0) = 0$, mentre $v(t) := e^{A(t-t_0)} x_0$ è la soluzione dell'equazione omogenea associata $\dot{x} = Ax$ con condizioni iniziali $x(0) = x_0$. $\square$

Osservazione 2.29 La (2.50) costituisce la soluzione generale dell'equazione lineare non omogenea (2.45) (cfr. la definizione 2.22). Possiamo enunciare il corollario 2.28 dicendo che la soluzione generale di un'equazione lineare non omogenea si ottiene sommando una soluzione particolare alla soluzione generale dell'equazione differenziale lineare omogenea associata.

Osservazione 2.30 Se in (2.45) la matrice A è non singolare ($\det A \neq 0$) e il vettore $B(t)$ è costante ($B(t) = B$), allora si possono applicare i risultati del §2.1 per trovare la soluzione. Basta infatti porre

$$\begin{cases} u := A^{-1} B, \\ y = x + u, \end{cases}$$

dove l'inversa di A è ben definita se il suo determinante è non nullo, per portare l'equazione $\dot{x} = Ax + B$, con dati iniziali $x(t_0) = x_0$, nella forma $\dot{y} = Ay$, con dati iniziali $y(t_0) = x_0 + A^{-1} B =: y_0$. Quindi la soluzione è $y(t) = e^{A(t-t_0)} y_0$, che, espressa in termini delle coordinate originali, diventa

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{A(t-t_0)} x_0 + (e^{A(t-t_0)} - \mathbb{I}) A^{-1} B \\ &= e^{A(t-t_0)} \left[x_0 + \int_{t_0}^t ds e^{-A(s-t_0)} B \right], \end{aligned} \quad (2.51)$$

che è esattamente la (2.46) nel caso in cui B sia costante. Si noti che, mentre l'espressione intermedia nella (2.51) è definita solo se la matrice A è invertibile, al contrario l'espressione a destra ha senso sempre. Come mostra *a posteriori* il teorema 2.24, il risultato finale nella forma (2.46) è sempre valido.

Esempio 2.31 Si studi l'equazione differenziale lineare del secondo ordine in $\mathbb{R}$

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega^2 x = \cos \omega_0 t, \quad (2.52)$$

al variare dei parametri $\omega, \omega_0 > 0$ e $\gamma \geq 0$ (cfr. anche gli esercizi 2.31 ÷ 2.35). Tale equazione descrive un *oscillatore armonico forzato smorzato*, i.e. un oscillatore armonico forzato in presenza di attrito (o dissipazione). Il parametro ω_0 prende il nome di *frequenza del termine forzante*.

Discussione dell'esempio Si consideri prima il caso $\gamma > 0$. Si cerca la soluzione $x(t)$ nella forma $x(t) = u(t) + v(t)$, dove $v(t)$ risolve l'equazione differenziale lineare omogenea associata, i.e. $\ddot{v} + \gamma\dot{v} + \omega^2 v = 0$, e $u(t)$ è una soluzione particolare dell'equazione. La soluzione $v(t)$ è data dalla (2.42) se $\gamma > 2\omega$, dalla (2.43) se $\gamma = 2\omega$ e dalla (2.44) se $\gamma < 2\omega$. Si cerca la soluzione particolare $u(t)$ nella forma $u(t) = \alpha \cos \omega_0 t + \beta \sin \omega_0 t$. Imponendo che u risolva l'equazione (2.52) si trovano le relazioni

$$(\omega^2 - \omega_0^2)\beta = \gamma\omega_0\alpha, \quad (\omega^2 - \omega_0^2)\alpha + \gamma\omega_0\beta = 1,$$

che risolte fissano i coefficienti

$$\alpha = \alpha_0 := \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2\omega_0^2}, \quad \beta = \beta_0 := \frac{\gamma\omega_0}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2\omega_0^2}, \quad (2.53)$$

che risultano ben definiti per ogni valore di ω , ω_0 e γ , purché si abbia $\gamma > 0$. Quindi la soluzione generale dell'equazione (2.52), nel caso $\gamma > 0$, è della forma $x(t) = v(t) + \alpha_0 \cos \omega_0 t + \beta_0 \sin \omega_0 t$.

Si consideri ora il caso $\gamma = 0$. Si ragiona in modo analogo. Se $\omega_0 \neq \omega$, i coefficienti α_0 e β_0 in (2.53) risultano ancora ben definiti, quindi la soluzione generale è ancora della forma $x(t) = v(t) + \alpha_0 \cos \omega_0 t + \beta_0 \sin \omega_0 t$, dove $v(t)$ risolve l'equazione omogenea associata (così che $v(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$, con A, B costanti). Se invece $\omega_0 = \omega$, si cerca la soluzione particolare nella forma $u(t) = \alpha t \cos \omega t + \beta t \sin \omega t$. Imponendo di nuovo che u risolva l'equazione (2.52) si trovano le relazioni

$$\alpha = \alpha_1 := 0, \quad \beta = \beta_1 := \frac{1}{2\omega}, \quad (2.54)$$

da cui si ottiene $x(t) = v(t) + (2\omega)^{-1}t \sin \omega t$.

Osservazione 2.32 La discussione dell'esempio 2.31 si può generalizzare al caso in cui $\cos \omega_0 t$ sia sostituito da una qualsiasi funzione $f(\omega_0 t)$, dove f è una funzione *periodica* di classe C^∞ , di periodo 2π nel suo argomento, i.e. tale che $f(t + 2\pi) = f(t) \forall t \in \mathbb{R}$ (cfr. gli esercizi 2.33÷2.35). La condizione $\omega_0 = \omega$ prende il nome di *risonanza*. L'esempio considerato mostra che un termine forzante la cui frequenza sia in risonanza con la frequenza propria del sistema può alterarne significativamente il comportamento con effetti rilevanti, se non catastrofici. L'esempio forse più famoso che si cita a testimonianza è costituito dal crollo del ponte di Tacoma Narrows nel 1940: a causa del vento si produssero vibrazioni in risonanza con le frequenze proprie della struttura, tali da amplificare le oscillazioni torsionali fino al collasso finale. Si è argomentato in tempi recenti che il crollo non può essere realmente spiegato in termini di risonanza, dal momento che, avendo il vento una velocità pressoché costante, non avrebbe senso considerarlo un termine forzante periodico: si tratterebbe più di un fenomeno di oscillazione autoindotta generata da una sorgente aperiodica (nel caso specifico, un'instabilità dinamica nota

come *flutter* o *sventolio*) che non di un fenomeno di risonanza parametrica o forzata. Di fatto, in conseguenza dell'azione del vento, si instaurarono nel ponte oscillazioni aeroelastiche con frequenze risonanti con quelle proprie del sistema e, proprio per questo motivo, di intensità crescente, fino al punto da causare la distruzione del ponte. In ultima analisi, se descrivere o no l'accaduto in termini di risonanza è più che altro una questione semantica, legato a cosa si intenda esattamente per risonanza: possiamo sempre immaginare, semplificando, di descrivere il ponte attraverso un'equazione della forma (2.52), con un termine forzante $f(\omega_0 t)$ più generale, che non descrive l'azione del vento, quanto piuttosto le oscillazioni autoindotte causate per via indiretta dal vento.

Nota bibliografica Come nel capitolo precedente anche in questo, tranne che per il §2.3, abbiamo seguito essenzialmente [HS74, Capp. 3÷6].

Per il teorema di Rolle e il teorema di Lagrange (cfr. gli esercizi 2.3 e 2.4) si veda [G85, Cap. 8], per il teorema di passaggio al limite sotto il segno di derivata (per serie convergenti uniformemente), discusso nell'esercizio 2.8 e utilizzato nella dimostrazione del lemma 2.3, si veda [R53, Cap. 7], mentre per definizioni e proprietà delle curve rimandiamo, per esempio, a [G83, Cap. 15]. Infine, per un'introduzione alle serie di Fourier (utilizzate negli esercizi 2.33 e 2.34), si veda [G83, Cap. 14].

2.6 Esercizi

Esercizio 2.1 Una funzione $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ si dice *derivabile* (o *differenziabile*) in $c \in (\alpha, \beta)$ se esiste il limite

$$\dot{f}(c) := \lim_{t \rightarrow c} \frac{f(t) - f(c)}{t - c},$$

che prende il nome di *derivata* di f in c , e derivabile in (α, β) se è derivabile in ogni $t \in (\alpha, \beta)$ (cfr. l'esercizio 1.27, rispetto al quale stiamo considerando funzioni di variabile reale e indicando la derivata con un punto invece che con l'apice). Si dimostri che se f è derivabile in (α, β) e $c \in (\alpha, \beta)$ è un punto di massimo o di minimo per f , allora c è un *punto critico*, i.e. tale che $\dot{f}(c) = 0$. [Soluzione. Se c è un punto di massimo per f si ha $f(t) \leq f(c) \forall t \in [\alpha, \beta]$. Poiché f è derivabile si ha

$$\dot{f}(c) = \lim_{t \rightarrow c^+} \frac{f(t) - f(c)}{t - c} = \lim_{t \rightarrow c^-} \frac{f(t) - f(c)}{t - c},$$

dove i due limiti rappresentano, rispettivamente, il limite destro e il limite sinistro del rapporto incrementale (data una funzione $g: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ e un punto $c \in (\alpha, \beta)$, il *limite destro* $\lim_{t \rightarrow c^+} g(t)$ è ℓ se $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tale che $|f(t) - \ell| < \varepsilon$ se $0 < t - c < \delta$ e, analogamente, il *limite sinistro* $\lim_{t \rightarrow c^-} g(t)$ è ℓ' se $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tale che $|f(t) - \ell'| < \varepsilon$ se $0 > t - c > -\delta$). D'altra parte, poiché $t - c > 0$ se t tende a