Corso di laurea in Matematica

Sistemi dinamici – Primo Modulo

Prova d'esonero del 16-11-98

Si consideri il sistema dinamico planare

$$\begin{cases} \dot{x} = 4y\left(y^2 - 1\right), \\ \dot{y} = 4x\left(x^2 - 1\right). \end{cases}$$

(1) Verificare che esiste una costante del moto $H(x, y)$ e determinarla.

(2) Individuare i punti critici e discuterne la stabilità.

(3) Tracciare le curve di livello nello spazio delle fasi e discuterne qualitativamente la forma.

(4) Individuare i dati iniziali che dànno origine a traiettorie periodiche. Dimostrare in particolare che la traiettoria con dato iniziale $(1/\sqrt{2}, 0)$ è periodica e scriverne il periodo come integrale definito.

(5) Se si aggiunge un campo vettoriale $(-\alpha x, -\alpha y)$, individuare il valore α_0 tale che per $\alpha > \alpha_0$ l'origine diventa asintoticamente stabile. Verificare che la regione

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \leq 2\}$$

è in tal caso contenuta nel bacino d'attrazione dell'origine.

(6) Trovare esplicitamente la soluzione $(x(t), y(t))$ con dati iniziali $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ e discuterne il comportamento asintotico per $t \to \pm\infty$.

(7) Come al punto precedente per la traiettoria con dati iniziali $(\sqrt{2}, 0)$.
[Suggerimento. Nell'integrale che esprime la soluzione $x(t)$ in funzione di t si consiglia di procedere con due sostituzioni successive, la prima delle quali è $x \to y = 1/x$.]