Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2009/2010

FM1 - Equazioni differenziali e meccanica

Seconda prova d'esonero (01-06-2010)

Esercizio 1. [8] Dato un sistema di riferimento $\kappa = Oxyz$ (sistema assoluto), sia $K = O'\xi\eta\zeta$ un sistema di riferimento mobile (sistema relativo) tale che O' si muova lungo l'asse x con legge oraria $x_{O'}(t) = X(t)$ e l'asse ζ sia parallelo all'asse z, mentre il piano (ξ, η) ruota intorno all'asse ζ con velocità angolare $\omega = 1$. Un punto materiale P di massa $m = 1$ si muove nel sistema K con legge oraria $t \to (\xi(t), \eta(t), 0)$.
(1.1) [1] Scrivere la trasformazione rigida $D : K \to \kappa$ come composizione di una traslazione C con una rotazione B, e determinare C e B.
(1.2) [1] Determinare la velocità assoluta del punto P.
(1.3) [1] Determinare la velocità relativa.
(1.4) [1] Determinare la componente traslatoria della velocità di trascinamento.
(1.5) [1] Determinare la componente rotatoria della velocità di trascinamento.
(1.6) [1] Determinare la forza di Coriolis che agisce sul punto P.
(1.7) [1] Dimostrare che se nel sistema K il punto P si muove lungo la spirale che, in coordinate polari, ha equazione $\rho(t) = -\theta(t) = t$, allora P nel sistema κ rimane sull'asse x.
(1.8) [1] Determinare $X(t)$ in modo che P si muova nel sistema κ di moto rettilineo uniforme.

Esercizio 2. [8] Si consideri il sistema dinamico planare $\dot{x} = f(x)$, con f di classe C^1, e si assuma che l'insieme $A = \{x \in \mathbb{R}^2 : r \leq |x| \leq R\}$, con $0 < r < R$, sia invariante e non contenga punti d'equilibrio. Si utilizzi il teorema di Poincaré-Bendixson per concludere che se la regione A non contiene cicli limite allora tutte le traiettorie con dati iniziali in A sono periodiche.

Esercizio 3. [16] Sia dato il sistema meccanico unidimensionale che descrive un punto materiale di massa $m = 1$ sottoposto alla forza di energia potenziale

$$V(x) = -\frac{\alpha}{x^2} + \frac{1}{6x^6} + \frac{\beta}{2}x^2,$$

con $\beta = 1$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Al variare del parametro α rispondere alle seguenti domande.
(3.1) [1] Scrivere l'equazione del moto e le equazioni che definiscono il sistema dinamico associato.
(3.2) [2] Determinare i punti d'equilibrio del sistema dinamico e discuterne la stabilità.
(3.3) [4] Studiare il grafico dell'energia potenziale $V(x)$.
(3.4) [4] Discutere qualitativamente il moto del sistema.
(3.5) [4] Discutere come cambia lo scenario al variare di entrambi i parametri α e β in $\mathbb{R}$.
(3.6) [3] Determinare in particolare i valori di α e β per i quali tutti i moti sono periodici.

Esercizio 4. [6] In un campo centrale, il moto della variabile $\mathbf{r}$ (coordinata relativa) è descritto dall'equazione $\mu\ddot{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{r}}\, F(|\mathbf{r}|)$, dove μ è la massa ridotta, $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/|\mathbf{r}|$ e $F \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. Discutere le condizioni perché il moto della variabile $\mathbf{r}$ sia periodico.

Esercizio 5. [8] Si consideri il sistema rigido costituito da 8 punti di massa m disposti in corrispondenza dei vertici di un cubo di lato ℓ.
(5.1) [1] Determinare il centro di massa del sistema.
(5.2) [3] Determinare gli assi d'inerzia.
(5.3) [2] Calcolare i momenti principali d'inerzia.
(5.4) [2] Determinare un solido che abbia gli stessi momenti principali d'inerzia.

Esercizio 6. [4] Derivare le equazioni di Eulero per un sistema rigido libero e determinare i punti d'equilibrio.