

**Corso di laurea in Matematica**  
**Sistemi dinamici – Primo Modulo**

PROVA D'ESONERO DEL 28-01-99

Due punti materiali  $P_1$  e  $P_2$ , entrambi di massa  $m$ , sono vincolati a muoversi su una guida circolare di raggio  $r = 1$  posta in un piano verticale  $\pi$ . Si scelga in  $\pi$  un sistema di coordinate  $(x, y)$  nel quale la circonferenza abbia equazione

$$x^2 + (y - 1)^2 = 1.$$

Due punti materiali  $P_3$  e  $P_4$ , anch'essi di massa  $m$ , possono scorrere lungo una guida orizzontale contenuta nel piano  $\pi$ , di equazione  $y = 0$ .

I punti  $P_1$  e  $P_2$  sono collegati tramite una molla, rispettivamente, ai punti  $P_3$  e  $P_4$ , i quali, a loro volta, sono collegati tramite una molla allo stesso punto materiale  $P_5$ , di massa  $m$ , libero di scorrere lungo l'asse  $y$ ; le molle hanno tutte lunghezza a riposo nulla e costante elastica  $k > 0$ .

(1) Scrivere la lagrangiana del sistema e le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange, utilizzando come coordinate lagrangiane le coordinate cartesiane non banali dei punti  $P_3$ ,  $P_4$  e  $P_5$  e gli angoli che i raggi vettori  $OP_1$  e  $OP_2$  formano con la verticale discendente (se  $O$  è il centro della guida circolare).

(2) Determinare le posizioni d'equilibrio e discuterne la stabilità.

(3) Per valori dei parametri  $m = g = k = 1$ , studiare le piccole oscillazioni del sistema intorno a una posizione d'equilibrio stabile, risolvendo esplicitamente le equazioni del moto in funzione dei dati iniziali. Trovare in particolare la soluzione che corrisponde ai dati iniziali (espressi in coordinate cartesiane)

$$\begin{aligned} P_1 &= (0, 0), & P_2 &= (0, 0), & P_3 &= (0, 0), & P_4 &= (0, 0), & P_5 &= (0, -mg/2k), \\ \mathbf{v}_1 &= (0, 0), & \mathbf{v}_2 &= (0, 0), & \mathbf{v}_3 &= (u, 0), & \mathbf{v}_4 &= (w, 0), & \mathbf{v}_5 &= (0, 0), \end{aligned}$$

dove  $\mathbf{v}_i$  è la velocità del punto  $P_i$  e  $u, w \in \mathbb{R}$ .

(4) Nella configurazione

$$\begin{aligned} P_1 &= (1, 1), & P_2 &= (-1, 1), & P_3 &= (1, 0), & P_4 &= (-1, 0), & P_5 &= (0, -mg/2k), \\ \mathbf{v}_1 &= (0, 0), & \mathbf{v}_2 &= (0, 0), & \mathbf{v}_3 &= (0, 0), & \mathbf{v}_4 &= (0, 0), & \mathbf{v}_5 &= (0, 0), \end{aligned}$$

determinare le reazioni vincolari che agiscono sul punto  $P_3$ .

(5) Se i punti  $P_1$  e  $P_2$  sono fissati nelle configurazioni, rispettivamente,  $P_1 = (1, 1)$  e  $P_2 = (-1, 1)$  e il piano  $\pi$  ruota intorno all'asse  $y$  con velocità angolare costante  $\omega$ , determinare le posizioni d'equilibrio relativo (*i.e.* le posizioni d'equilibrio nel sistema di riferimento solidale con il piano  $\pi$ ) e studiarne la stabilità.

(6) Sotto le stesse ipotesi del punto precedente, determinare le reazioni vincolari che agiscono sul punto  $P_3$ , in corrispondenza di una generica configurazione compatibile con il moto.