Corso di laurea in Matematica

Sistemi dinamici – Primo Modulo

Prova d'esonero del 28-01-99

CORREZIONE

---

(1) In termini delle coordinate lagrangiane suggerite nel testo, le coordinate cartesiane dei punti P_1, P_2, P_3, P_4 e P_5 sono date da

$$P_1 = (\sin\theta_1, 1-\cos\theta_1)\ , \qquad P_2 = (\sin\theta_2, 1-\cos\theta_2)\ ,$$
$$P_3 = (x_1, 0)\ , \qquad P_4 = (x_2, 0)\ , \qquad P_5 = (0, y)\ .$$

Le corrispondenti velocità sono quindi

$$\mathbf{v}_1 = (\cos\theta_1\,\dot\theta_1, \sin\theta_2\,\dot\theta_2)\ , \qquad \mathbf{v}_2 = (\cos\theta_2\,\dot\theta_2, \sin\theta_2\,\dot\theta_2)\ ,$$
$$\mathbf{v}_3 = (\dot x_1, 0)\ , \qquad \mathbf{v}_4 = (\dot x_2, 0)\ , \qquad \mathbf{v}_5 = (0, \dot y)\ .$$

L'energia cinetica del sistema è

$$T = \frac{m}{2}\left[\dot\theta_1^2 + \dot\theta_2^2 + \dot x_1^2 + \dot x_2^2 + \dot y^2\right]$$

e l'energia potenziale è

$$\begin{aligned} U &= mg\,(1-\cos\theta_1) + mg\,(1-\cos\theta_2) + mgy \\ &\quad + \frac{k}{2}\left\{\left[(\sin\theta_1 - x_1)^2 + (1-\cos\theta_1)^2\right] + \left[(\sin\theta_2 - x_2)^2 + (1-\cos\theta_2)^2\right] + \left[x_1^2 + y^2\right] + \left[x_2^2 + y^2\right]\right\} \end{aligned}$$

che si può riscrivere, trascurando i termini costanti,

$$U = mg\,(y - \cos\theta_1 - \cos\theta_2) + k\left[x_1^2 + x_2^2 + y^2 - x_1\sin\theta_1 - \cos\theta_1 - x_2\sin\theta_2 - \cos\theta_2\right]\ .$$

Quindi la lagrangiana del sistema è data da

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = T - U &= \frac{m}{2}\left[\dot\theta_1^2 + \dot\theta_2^2 + \dot x_1^2 + \dot x_2^2 + \dot y^2\right] \\ &\quad - mg\,(y - \cos\theta_1 - \cos\theta_2) - k\left[x_1^2 + x_2^2 + y^2 - x_1\sin\theta_1 - \cos\theta_1 - x_2\sin\theta_2 - \cos\theta_2\right]\ . \end{aligned}$$

Per ottenere le equazioni di Eulero-Lagrange, si calcolano le derivate parziali $\partial\mathcal{L}/\partial\dot q$ e $\partial\mathcal{L}/\partial q$ e si pone $d/dt[\partial\mathcal{L}/\partial\dot q] = \partial\mathcal{L}/\partial q$, se q denota la generica coordinata lagrangiana. Si ha

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\theta_1} = m\dot\theta_1\ , \qquad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\theta_2} = m\dot\theta_2\ , \qquad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot x_1} = m\dot x_1\ , \qquad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot x_2} = m\dot x_2\ , \qquad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot y} = m\dot y\ ,$$
$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta_1} = -mg\sin\theta_1 + kx_1\cos\theta_1 - k\sin\theta_1\ , \qquad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta_2} = -mg\sin\theta_2 + kx_2\cos\theta_2 - k\sin\theta_2\ ,$$
$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_1} = -2kx_1 + k\sin\theta_1\ , \qquad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_2} = -2kx_2 + k\sin\theta_2\ , \qquad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y} = -2ky - mg\ ,$$

e se ne deduce quindi

$$\begin{cases} m\ddot\theta_1 = -mg\sin\theta_1 + kx_1\cos\theta_1 - k\sin\theta_1\ , \\ m\ddot\theta_2 = -mg\sin\theta_2 + kx_2\cos\theta_2 - k\sin\theta_2\ , \\ m\ddot x_1 = -2kx_1 + k\sin\theta_1\ , \\ m\ddot x_2 = -2kx_2 + k\sin\theta_2\ , \\ m\ddot y = -2ky - mg\ . \end{cases}$$

(2) I punti d'equilibrio sono i punti stazionari del potenziale. Si devono quindi trovare i valori $(\theta_1, \theta_2, x_1, x_2, y)$ tali che siano nulle le derivate del potenziale U. Imponiamo perciò:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial \theta_1} &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_1} = mg \sin\theta_1 - kx_1 \cos\theta_1 + k \sin\theta_1 = 0 \ , \\
\frac{\partial U}{\partial \theta_2} &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_2} = mg \sin\theta_2 - kx_2 \cos\theta_2 + k \sin\theta_2 = 0 \ , \\
\frac{\partial U}{\partial x_1} &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 2kx_1 - k \sin\theta_1 = 0 \ , \\
\frac{\partial U}{\partial x_2} &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = 2kx_2 - k \sin\theta_2 = 0 \ , \\
\frac{\partial U}{\partial y} &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 2ky + mg = 0 \ .
\end{aligned}
$$

L'ultima equazione dà

$$
y = -\frac{mg}{2k} \equiv -y_0 \ ,
$$

mentre dalla terza e dalla quarta si ricavano le relazioni

$$
2x_1 = \sin\theta_1 \ , \qquad 2x_2 = \sin\theta_2 \ ,
$$

che, introdotte nelle prime due equazioni, dànno due equazioni chiuse, rispettivamente per θ_1 e per θ_2. Le due equazioni sono uguali, a meno dello scambio di θ_1 con θ_2: è quindi sufficiente studiarne una. Consideriamo, per esempio, l'equazione per θ_1:

$$
\frac{\partial U}{\partial \theta_1} = \frac{\sin\theta_1}{2} \left[2\,(mg + k) - k \cos\theta_1 \right] = 0
$$

che, per essere soddisfatta, richiede $\sin\theta_1 = 0$, dal momento che l'equazione

$$
\cos\theta_1 = \frac{2\,(mg + k)}{k}
$$

non ammette soluzione poiché $2mg + k > k$, mentre $|\cos\theta_1| \leq 1$.

Quindi saranno possibili sono le soluzioni $\sin\theta_1 = 0$, che implicano $\theta_1 = 0$ oppure $\theta_1 = \pi$.

Analogamente la condizione di annullamento per la derivata di U rispetto a θ_2 porta a $\theta_2 = 0$ oppure $\theta_2 = \pi$.

In conclusione abbiamo 4 configurazioni d'equilibrio:

$$
\begin{array}{lllll}
(Q_1) & \theta_1 = 0 \ , \ \theta_2 = 0 \ , & x_1 = x_2 = 0 \ , & y = -y_0 \ , \\
(Q_3) & \theta_1 = 0 \ , \ \theta_2 = \pi \ , & x_1 = x_2 = 0 \ , & y = -y_0 \ , \\
(Q_3) & \theta_1 = \pi \ , \ \theta_2 = 0 \ , & x_1 = x_2 = 0 \ , & y = -y_0 \ , \\
(Q_4) & \theta_1 = \pi \ , \ \theta_2 = \pi \ , & x_1 = x_2 = 0 \ , & y = -y_0 \ ,
\end{array}
$$

che corrispondono alle 4 configurazioni rappresentate in Figura 1.

Per discutere la stabilità delle posizioni d'equilibrio trovate occorre studiare la matrice hessiana. Il sistema sotto studio è un sistema a 5 gradi di libertà. È tuttavia immediato notare che la lagrangiana si separa nella somma di tre lagrangiane indipendenti

$$
\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}(\theta_1, \theta_2, x_1, x_2, y, \dot\theta_1, \dot\theta_2, \dot x_1, \dot x_2, \dot y) = \mathcal{L}_1(\theta_1, x_1, \dot\theta_1, \dot x_1) + \mathcal{L}_2(\theta_2, x_2, \dot\theta_2, \dot x_2) + \mathcal{L}_3(y, \dot y) \ ,
$$

dove

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_1 &= T_1 - U_1 = \frac{m}{2}\left[\dot\theta_1^2 + \dot x_1^2\right] + mg\cos\theta_1 - k\left[x_1^2 - x_1\sin\theta_1 - \cos\theta_1\right] \ , \\
\mathcal{L}_2 &= T_2 - U_2 = \frac{m}{2}\left[\dot\theta_2^2 + \dot x_2^2\right] + mg\cos\theta_2 - k\left[x_2^2 - x_2\sin\theta_2 - \cos\theta_2\right] \ , \\
\mathcal{L}_3 &= T_3 - U_3 = \frac{m}{2}\dot y^2 - mgy - ky^2 \ ,
\end{aligned}
$$

con ovvio significato dei simboli.

Quindi è sufficiente studiare i tre sistemi disaccopiati così ottenuti e trovare i corrisponenti punti d'equilibrio stabili e instabili. Inoltre, visto che la lagrangiana $\mathcal{L}_2$ si ottiene semplicemente da $\mathcal{L}_1$ per scambio di (θ_1, x_1) con (θ_2, x_2), basta studiare le lagrangiane $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_3$.

Per $\mathcal{L}_3$ si ottiene

$$
\frac{\partial^2 U_3}{\partial y^2} = 2k > 0 \ ,
$$

da cui possiamo concludere che il punto $y = y_0$ è un punto di minimo per il potenziale e quindi $(y, \dot y) = (y_0, 0)$ è una posizione d'equilibrio stabile per $\mathcal{L}_3$.

Per $\mathcal{L}_1$ si ottiene

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}_{11}(\theta_1, x_1) &\equiv \frac{\partial^2 U_1}{\partial \theta_1^2} = mg\cos\theta_1 + k\cos\theta_1 + kx_1\sin\theta_1 \ , \\
\mathcal{H}_{12}(\theta_1, x_1) &\equiv \mathcal{H}_{21}(\theta_1, x_1) = \frac{\partial^2 U_1}{\partial\theta_1 \partial x_1} = -k\cos\theta_1 \ , \\
\mathcal{H}_{22}(\theta_1, x_1) &\equiv \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_1^2} = 2k \ ,
\end{aligned}
$$

e quindi la matrice hessiana corrispondente è

$$
\mathcal{H}(\theta_1, x_1) = \begin{pmatrix} mg\cos\theta_1 + k\cos\theta_1 + kx_1\sin\theta_1 & -k\cos\theta_1 \\ -k\cos\theta_1 & 2k \end{pmatrix} \ .
$$

Ne segue che

$$
\mathcal{H}(0,0) = \begin{pmatrix} mg + k & -k \\ -k & 2k \end{pmatrix} \ ,
$$

così che

$$
\det\mathcal{H}(0,0) = 2mgk + k^2 > 0 \ , \qquad \mathcal{H}_{11}(0,0) = mg + k > 0 \ ,
$$

quindi $(\theta_1, x_1) = (0,0)$ è un punto di minimo per il potenziale. Allo stesso modo

$$
\mathcal{H}(\pi,0) = \begin{pmatrix} -mg - k & -k \\ -k & 2k \end{pmatrix} \ ,
$$

così che

$$
\det\mathcal{H}(\pi,0) = -2mgk - 3k^2 < 0 \ ,
$$

quindi $(\theta_1, x_1) = (\pi, 0)$ è un punto di sella per il potenziale.

Ragionando analogamente per $\mathcal{L}_2$ si trova che l'unica configurazione d'equilibrio stabile per $\mathcal{L}$ è quella in cui ognuno dei tre sistemi lagrangiani $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ e $\mathcal{L}_3$ ammette posizioni d'equilibrio stabile, *i.e.*

$$
(Q_1) \qquad (\theta_1, x_1, \theta_2, x_2, y) = (0,0,0,0,y_0) \ , \qquad y_0 = -\frac{mg}{2k} \ ,
$$

mentre le altre possibili configurazioni d'equilibrio

$$
\begin{aligned}
&(Q_2) \qquad (\theta_1, x_1, \theta_2, x_2, y) = (\pi,0,0,0,y_0) \ , \qquad y_0 = -\frac{mg}{2k} \ , \\
&(Q_3) \qquad (\theta_1, x_1, \theta_2, x_2, y) = (0,0,\pi,0,y_0) \ , \qquad y_0 = -\frac{mg}{2k} \ , \\
&(Q_4) \qquad (\theta_1, x_1, \theta_2, x_2, y) = (\pi,0,\pi,0,y_0) \ , \qquad y_0 = -\frac{mg}{2k}
\end{aligned}
$$

sono instabili.

---

(3) Poiché $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3$, per le piccole oscillazioni possiamo considerare separatemente i tre sistemi lagrangiani. Come segue dal punto precedente, esiste un'unica posizione d'equilibrio stabile: dovremo quindi studiare le piccole oscillazioni intorno a tale posizione. Occorre quindi sviluppare fino al secondo ordine $\mathcal{L}_1$ nell'intorno di $(\theta_1, x_1, \dot{\theta}_1, \dot{x}_1) = (0,0,0,0)$, $\mathcal{L}_2$ nell'intorno di $(\theta_2, x_2, \dot{\theta}_2, \dot{x}_2) = (0,0,0,0)$ e $\mathcal{L}_3$ nell'intorno di $(y, \dot{y}) = (y_0, 0)$.

Per $\mathcal{L}_1$ otteniamo quindi, se $z = (\theta_1, x_1)$, a meno di ordini superiori al secondo,

$$\mathcal{L}_1 = \frac{1}{2}\langle \dot{z}, A\dot{z}\rangle - \frac{1}{2}\langle z, Bz\rangle ,$$

dove A e B sono due matrici 2×2 date da

$$A = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} , \qquad B = \mathcal{H}(0,0) = \begin{pmatrix} mg + k & -k \\ -k & 2k \end{pmatrix} .$$

L'equazione caratteristica per la determinazione delle frequenze proprie è allora

$$\det(B - \lambda A) = m^2\lambda^2 - m(3k + g)\lambda + 2k\,(mg + k) - k^2 = 0 ,$$

che, per $m = g = k = 1$, dà

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 3)\,(\lambda - 1) = 0 ,$$

le cui radici sono dunque $\lambda = 1$ e $\lambda = 3$.

Le frequenze proprie sono allora

$$\omega_1 = \sqrt{\lambda_1} = 1 , \qquad \omega_2 = \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{3} .$$

Le direzioni dei modi normali $\boldsymbol{\xi}_1$ e $\boldsymbol{\xi}_2$ sono tali che

$$(B - \lambda_j)\boldsymbol{\xi}_j = \mathbf{0} , \qquad j = 1, 2 ,$$

ovvero (tenendo conto che $m = g = k = 1$)

$$(2 - \lambda_1)\xi_{11} - \xi_{12} = \xi_{11} - \xi_{12} = 0 , \qquad (2 - \lambda_2)\xi_{11} - \xi_{12} = -\xi_{11} - \xi_{12} = 0 ;$$

quindi

$$\boldsymbol{\xi}_1 = (1, 1) , \qquad \boldsymbol{\xi}_2 = (-1, 1) .$$

Nella base $(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2)$ le equazioni del moto sono

$$\ddot{Q}_1 = -\omega_1^2 Q_1 , \qquad \ddot{Q}_2 = -\omega_2^2 Q_2 ,$$

che ammettono soluzioni

$$Q_1(t) = a_1 \cos\omega_1 t + b_1 \sin\omega_1 t ,$$
$$Q_2(t) = a_2 \cos\omega_2 t + b_2 \sin\omega_2 t ,$$

dove le costanti a_1, a_2, b_1, b_2 dipendono dai dati iniziali nel modo seguente:

$$a_1 = Q_1(0) , \qquad b_1 = \frac{\dot{Q}_1(0)}{\omega_1} , \qquad a_2 = Q_2(0) , \qquad b_2 = \frac{\dot{Q}_2(0)}{\omega_2} ,$$

Introducendo la matrice

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} \xi_{11} & \xi_{21} \\ \xi_{12} & \xi_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} ,$$

risulta

$$\begin{pmatrix} \theta_1 \\ x_1 \end{pmatrix} = \mathcal{C} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} , \qquad \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = \mathcal{C}^{-1} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ x_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ x_1 \end{pmatrix} ,$$

così che

$$\begin{aligned} Q_1(0) &= \frac{\theta_1(0) + x_1(0)}{2} , \qquad \dot{Q}_1(0) = \frac{\dot{\theta}_1(0) + \dot{x}_1(0)}{2} , \\ Q_2(0) &= \frac{-\theta_1(0) + x_1(0)}{2} , \qquad \dot{Q}_2(0) = \frac{-\dot{\theta}_1(0) + \dot{x}_1(0)}{2} , \end{aligned}$$

che permette di esprimere i dati iniziali nelle variabili (Q_1, Q_2) in termini dei dati iniziali nelle variabili (θ_1, x_1).

In conclusione

$$\begin{aligned} \theta_1(t) &= \frac{\theta_1(0) + x_1(0)}{2} \cos t + \frac{\dot{\theta}_1(0) + \dot{x}_1(0)}{2} \sin t + \frac{\theta_1(0) - x_1(0)}{2} \cos \sqrt{3}t + \frac{\dot{\theta}_1(0) - \dot{x}_1(0)}{2\sqrt{3}} \sin \sqrt{3}t , \\ x_1(t) &= \frac{\theta_1(0) + x_1(0)}{2} \cos t + \frac{\dot{\theta}_1(0) + \dot{x}_1(0)}{2} \sin t - \frac{\theta_1(0) - x_1(0)}{2} \cos \sqrt{3}t - \frac{\dot{\theta}_1(0) - \dot{x}_1(0)}{2\sqrt{3}} \sin \sqrt{3}t , \end{aligned}$$

e, analogamente, si trova per $\mathcal{L}_2$

$$\begin{aligned} \theta_2(t) &= \frac{\theta_2(0) + x_2(0)}{2} \cos t + \frac{\dot{\theta}_2(0) + \dot{x}_2(0)}{2} \sin t + \frac{\theta_2(0) - x_2(0)}{2} \cos \sqrt{3}t + \frac{\dot{\theta}_2(0) - \dot{x}_2(0)}{2\sqrt{3}} \sin \sqrt{3}t , \\ x_1(t) &= \frac{\theta_2(0) + x_2(0)}{2} \cos t + \frac{\dot{\theta}_2(0) + \dot{x}_2(0)}{2} \sin t - \frac{\theta_2(0) - x_2(0)}{2} \cos \sqrt{3}t - \frac{\dot{\theta}_2(0) - \dot{x}_2(0)}{2\sqrt{3}} \sin \sqrt{3}t , \end{aligned}$$

vista la completa simmetria tra $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$.

Per $\mathcal{L}_3$ abbiamo, a meno di costanti,

$$\mathcal{L}_3 = \frac{1}{2}\dot{y}^2 - (y - y_0)^2 ,$$

e quindi la frequenza propria del sistema risulta essere

$$\omega_3 = \sqrt{\lambda_3} = \sqrt{2} ,$$

così che

$$y(t) = y_0 + y(0) \cos \sqrt{2}t + \frac{\dot{y}(0)}{\sqrt{2}} \sin \sqrt{2}t .$$

In particolare la scelta dei dati iniziali data nel testo implica, in termini delle variabili lagrangiane,

$$\begin{aligned} &\theta_1(0) = \theta_2(0) = x_1(0) = x_2(0) = y(0) - y_0 = 0 , \\ &\dot{\theta}_1(0) = \dot{\theta}_2(0) = \dot{y}(0) = 0 , \\ &\dot{x}_1(0) = u , \qquad \dot{x}_2(0) = w , \end{aligned}$$

da cui segue

$$\begin{aligned} \theta_1(t) &= \frac{u}{2} \sin t - \frac{u}{2\sqrt{3}} \sin \sqrt{3}t , \\ x_1(t) &= \frac{u}{2} \sin t + \frac{u}{2\sqrt{3}} \sin \sqrt{3}t , \\ \theta_2(t) &= \frac{w}{2} \sin t - \frac{w}{2\sqrt{3}} \sin \sqrt{3}t , \\ x_2(t) &= \frac{w}{2} \sin t + \frac{w}{2\sqrt{3}} \sin \sqrt{3}t , \\ y(t) &= y_0 = -\frac{mg}{2k} = -\frac{1}{2} , \end{aligned}$$

(4) Per trovare le reazioni vincolari che agiscono sul punto $P_3 = (x_3, y_3)$ si considerano le equazioni

$$\begin{cases} m\ddot{x}_3 = F_x^{(3)} + R_x^{(3)} \ , \\ m\ddot{y}_3 = F_y^{(3)} + R_y^{(3)} \ , \end{cases}$$

dove, tenendo conto del vincolo, si ha $P_3 = (x_3, y_3) = (x_1, 0)$. Quindi

$$\begin{aligned} & m\ddot{x}_3 = m\ddot{x}_1 = -2kx_1 + k\sin\theta_1 \ , \\ & m\ddot{y}_3 = 0 \ . \end{aligned}$$

Per il Principio di d'Alembert si deve inoltre avere

$$\mathbf{R}^{(3)} \equiv (R_x^{(3)}, R_y^{(3)}) = (0, R_y^{(3)}) \ .$$

Consideriamo la configurazione indicata nel testo:

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2} \ , \qquad \theta_2 = -\frac{\pi}{2} \ , \qquad x_1 = 1 \ , \qquad x_2 = -1 \ , \qquad y = y_0 \ ,$$

corrispondente alla situazione rappresentata in Figura 2.

Per calcolare le forze che agiscono sul punto P_3 in tale configurazione, occorre considerare le forze attive $(F_x^{(3)}, F_y^{(3)})$ che agiscono sul punto P_3.

Si ha

$$F_x^{(3)} = -kx_3 = -k \ , \qquad F_y^{(3)} = ky_0 + k - mg = -\frac{mg}{2} + k - mg = k - \frac{3mg}{2} \ .$$

Sempre nella configurazione considerata si ha

$$\ddot{x}_1 = -2kx_1 + k\sin\theta_1 = -2k + k = -k \ ,$$

così che risulta

$$R_x^{(3)} = -F_x^{(3)} + m\ddot{x}_3 = -F_x^{(3)} + m\ddot{x}_1 = k - k = 0 \ ,$$

che era ovvio a priori, come già anticipato, e

$$R_y^{(3)} = -F_y^{(3)} + m\ddot{y}_3 = \frac{3mg}{2} - k \ ,$$

che dunque esprime la reazione vincolare sul punto P_3.

Alternativamente si poteva calcolare la forza attiva sul punto P_3 considerando il potenziale

$$U = \frac{1}{2}k\left[(1-x_3)^2 + (1-y_3)^2 + x_3^2 + (y_3 - y_0)^2\right] + mgy_3 + \text{ termini indipendenti da } x_3, y_3$$

e ottenendo la forza come gradiente, cambiato di segno, di U, calcolato in $(x_3, y_3) = (1, 0)$. Quindi

$$F_x^{(3)} = -\frac{\partial U}{\partial x_3} = k\left[(1-x_3) - x_3\right] \ , \qquad F_y^{(3)} = -\frac{\partial U}{\partial y_3} = k\left[(1-y_3) - (y_3 - y_0)\right] - mg \ ,$$

che, calcolato in $(x_3, y_3) = (1, 0)$ dà ovviamente il risultato precedente.

---

(5) Si i punti P_1 e P_2 sono fissati come indicato nel testo, poiché si può tener conto della forza centrifuga che agisce sui punti P_3 e P_4 attraverso l'introduzione di un potenziale

$$U_0 = -\frac{1}{2}m\omega^2\left(x_1^2 + x_2\right) \ ,$$

la lagrangiana che descrive il sistema diventa

$$\mathcal{L} = T - U\frac{m}{2}\left[\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{y}^2\right] - \left[mgy + k\left(x_1^2 + x_2^2 + y^2 - x_1 + x_2\right) + U_0\right] ,$$

così che si può scrivere

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, y, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{y}) = \mathcal{L}_1(x_1, \dot{x}_1) + \mathcal{L}_2(x_2, \dot{x}_2) + \mathcal{L}_3(y, \dot{y}) ,$$

dove

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_1(x_1, \dot{x}_1) &= \frac{m}{2}\dot{x}_1^2 - kx_1^2 + kx_1 - \frac{1}{2}m\omega^2 x_1^2 , \\
\mathcal{L}_2(x_2, \dot{x}_2) &= \frac{m}{2}\dot{x}_2^2 - kx_2^2 - kx_2 - \frac{1}{2}m\omega^2 x_2^2 , \\
\mathcal{L}_3(y, \dot{y}) &= \frac{m}{2}\dot{y}^2 - mgy - ky^2 ,
\end{aligned}$$

Le posizioni d'equilibrio sono quindi date dalle soluzioni del sistema di equazioni

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial x_1} &= 2kx_1 - k - m\omega^2 x_1 = 0 , \\
\frac{\partial U}{\partial x_2} &= 2kx_2 - k - m\omega^2 x_2 = 0 , \\
\frac{\partial U}{\partial y} &= 2ky + mg = 0 ;
\end{aligned}$$

si ha quindi una sola posizione d'equilibrio, data da

$$(Q) \qquad x_1 = \frac{k}{\alpha} , \qquad x_2 = -\frac{k}{\alpha} , \qquad y = y_0 = -\frac{mg}{2k} ,$$

purché

$$\alpha = 2k - m\omega^2 \neq 0 .$$

Per discutere la stabilità occorre considerare le derivate seconde dell'energia potenziale dei tre sistemi lagrangiani indipendenti ottenuti. Si ha, rispettivamente,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U^2}{\partial x_1^2} &= 2k - m\omega^2 , \\
\frac{\partial U^2}{\partial x_2^2} &= 2k - m\omega^2 , \\
\frac{\partial U^2}{\partial y^2} &= 2k > 0 ,
\end{aligned}$$

da cui si vede che la posizione d'equilibrio trovata è stabile se $\alpha > 0$, *i.e.* se $2k > m\omega^2$, e instabile se $\alpha < 0$, *i.e.* se $2k < m\omega^2$.

Il caso $\alpha = 0$ va discusso a parte. Se $\alpha = 0$, si vede che l'energia potenziale diventa

$$U = kx_1 - kx_2 - mgy - ky^2 ,$$

e quindi $\partial U/\partial x_1 = k$ e $\partial U/\partial x_2 = -k$, cosí che il sistema non ammette alcuna posizione d'equilibrio.

In conclusione, per $\alpha < 0$ esiste la posizione d'equilibrio instabile (Q), per $\alpha = 0$ non esistono posizioni d'equilibrio e per $\alpha > 0$ esiste la posizione d'equilibrio stabile (Q); ved. la Figura 3.

---

(6) Per determinare le reazioni vincolari che agiscono sul punto P_3, si considera, come al punto (4),

$$\begin{cases} m\ddot{x}_3 = F_x^{(3)} + R_x^{(3)} , \\ m\ddot{y}_3 = F_y^{(3)} + R_y^{(3)} , \end{cases}$$

dove, tenendo conto del vincolo, si ha $P_3 = (x_3, y_3) = (x_1, 0)$.

Quello che cambia rispetto al caso precedente è che la forza ha ora anche un contributo $m\omega^2 x_3$ alla componente orizzontale (lungo l'asse x) dovuto alla forza centrifuga e la posizione del punto P_5 non è fissata a y_0. Poiché per il Principio di d'Alembert la reazione vincolare deve essere ortogonale al vincolo e la componente della forza nella direzione verticale non è modificata dalla forza centrifuga possiamo concludere che, nella configurazione del punto (4), la rezione vincolare è esattamente quella calcolata al punto (4).

Se inoltre notiamo che la componente $F_y^{(3)}$ della forza non dipende dalla posizione x_3, otteniamo che la reazione vincolare è, per ogni valore di x_3, data da

$$\mathbf{R}^{(3)} = (R_x^{(3)}, R_y^{(3)}) = (0, k - ky - mg) \ .$$

Questo in ogni caso si può verificare esplicitamente notando che

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_3 &= m\ddot{x}_1 = -2kx_1 + k + m\omega^2 x_1 \ , \\ m\ddot{y}_3 &= 0 \ , \end{aligned}$$

mentre, per le forze attive, abbiamo

$$\begin{aligned} F_x^{(3)} &= -kx_3 + m\omega^2 x_3 - k(x_3 - 1) = -2kx_3 + m\omega^2 x_3 + k \ , \\ F_y^{(3)} &= -ky + k - mg = -\frac{mg}{2} + k - mg = k - ky - \frac{mg}{2} \ , \end{aligned}$$

così che si vede che il valore di $F_x^{(3)}$ dipende da x_3 ma non contribuisce alla reazione vincolare, poiché $F_x^{(3)} = m\ddot{x}_3$, mentre

$$R_y^{(3)} = -F_y^{(3)} + m\ddot{y}_3 = \frac{mg}{2} - k + ky \ ,$$

che è indipendente da x_3.